

## Interrogation

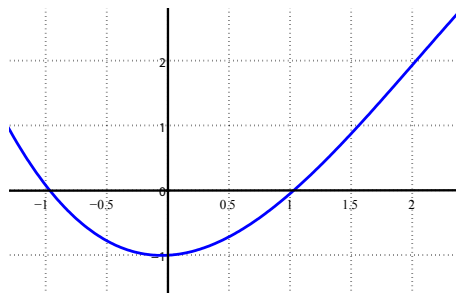
**Exercice 1** (02 points) Soit  $X$  une variable aléatoire ayant comme densité la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} kx^4, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec  $k$  est une constante réelle.

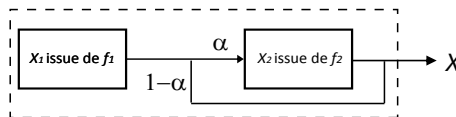
1. Donner la fonction de répartition associée à  $f$ . **(01pt)**
2. Proposer un algorithme, qui nous permet de générer un échantillon de taille  $n$  de même loi que  $X$ . **(01pt)**

**Exercice 2** (/04.50 points) Soit la fonction  $f(x) = \frac{-1}{6}x^3 + x^2 + \frac{1}{6}x - 1$  dont le graphe est présenté dans la figure suivante:



1. Proposer un simulateur qui nous permet de calculer la surface délimitée par la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses ( $x$ ) et les deux droites verticales  $x = -1$  et  $x = 2$ . **(2pts)**
2. Proposer un algorithme de simulation qui nous permet de calculer l'intégrale  $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$ . **(2.5pts)**

**Exercice 3** (/01.50 points) Soit la variable aléatoire  $X$  décrite comme suite :



$$X = X_1 + \begin{cases} X_2, & \text{avec une probabilité } \alpha; \\ 0, & \text{avec une probabilité } 1 - \alpha. \end{cases}$$

**Question:** Proposer un algorithme qui nous permettra de générer un  $n$ -échantillon de même loi que la variable aléatoire  $X$ .

**Remarque :** On suppose que  $f_1$  et  $f_2$  sont facile à simuler.

## Corrigé de l'Interrogation

### Solution de l'Exercice 1 (02 points)

1. Nous devons d'abord déterminer la valeur de la constante  $k$ , le fait que  $f$  est une densité alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 kx^4 dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{5}x^5 \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{k}{5} = 1 \Rightarrow k = 5.$$

2. Par définition on a  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ , ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ x^5, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

3. Pour concevoir un simulateur qui peut générer un échantillon de taille  $n$  de même loi que  $X$  on peut faire recours à la méthode d'inversion. Soit  $u$  une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

$$u = x^5 \Rightarrow x = u^{\frac{1}{5}} \text{ (le fait que } x^5 \text{ est positif).}$$

Ainsi l'algorithme de notre simulateur peut être comme suit:

```
1 for i=1:n
2     u=random('unif', 0, 1);
3     x(i)=u^(1/5);
4 end
```

### Solution de l'Exercice 2

1. Pour estimer la surface en question nous proposons d'utiliser la méthode de rejet (Monté Carlo). Mais nous constatons que  $f$  change de signe dans  $[-1; 2]$ , à cet effet nous proposons d'utiliser  $|f(x)|$  plutôt que  $f(x)$  elle-même. Pour générer un point, notons que:

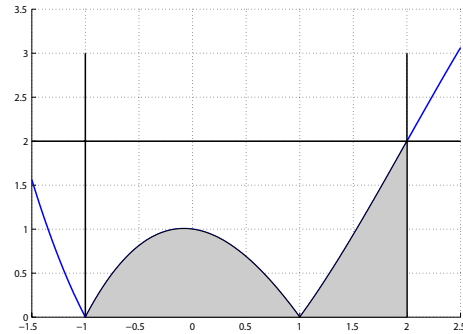
- $x \in [-1; 2]$  de ce fait il suffit de générer des  $x$  selon une loi uniforme sur  $[-1; 2]$ .
- $|f(x)| \in [0; 2]$  de ce fait il suffit de générer des  $y$  selon une loi uniforme sur  $[0; 2]$ .
- La surface du rectangle délimité par  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  et  $y = 2$  est  $S=(2-(-1))*(2-0)=6$ ;
- La surface recherchée est  $s = S * Nbr/n$  où  $Nbr$  est le nombre de point à l'intérieur de la surface recherchée,  $n$  est le nombre de point généré et  $S$  est la surface du rectangle précédent.

Ainsi, le simulateur peut être comme suit:

```

1 Nbr=0;
2 for i=1:n
3     x=random('unif',-1,2);
4     y=random('unif',0,2);
5     if (y <= abs(f(x)))
6         Nbr=Nbr+1;
7     end
8 end
9 s=6*(Nbr/n);

```

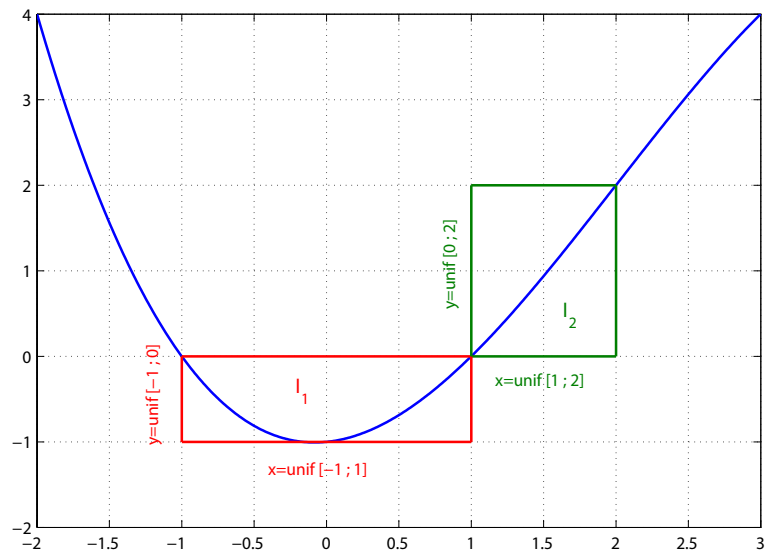


2. Calcul d'intégrale. Le fait que la fonction  $f$  change de signe dans  $[-1; 2]$  (négative sur  $[-1; 1]$  et positive sur  $[1; 2]$ ), pour estimé  $I$  par simulation nous allons décomposé l'intégrale  $I$  en deux intégrales  $I_1$  et  $I_2$  où  $I_1 = \int_{-1}^1 f(x)dx$  et  $I_2 = \int_1^2 f(x)dx$ . Ainsi de la même approche et la même analyse que dans la première question, l'algorithme suivant peut donner une estimation pour  $I$ .

```

1 Nbr1=0;
2 Nbr2=0;
3 for i=1:n
4     x1=random('unif',-1,1);
5     y1=random('unif',-1,0);
6     if (y1 >= f(x1))
7         Nbr1=Nbr1+1;
8     end
9     x2=random('unif',1,2);
10    y2=random('unif',0,2);
11    if (y2 <= f(x2))
12        Nbr2=Nbr2+1;
13    end
14 end
15 I1=((1-(-1))*(1-(0)))*(Nbr1/n);
16 I2=((2-1)*(2-0))*(Nbr2/n);
17 I=I2-I1;

```



**Remarque:** Les ligne 15, 16 et 17 peuvent être résumé en:  $I = (2/n) * (Nbr2 - Nbr1)$ .

**Solution de l'Exercice 3** L'analyse du problème exposé dans l'exercice donne issue à l'algorithme suivant:

```

1 for i=1:n
2     u=random('unif',0,1);
3     if (u<=alpha)
4         a=random('f1');
5         b=random('f2');
6         x(i)=a+b;
7     else
8         x(i)=random('f1');
9     end
10 end

```

ou simplement:

```

1 for i=1:n
2     x(i)=random('f1');
3     u=random('unif',0,1);
4     if (u<=alpha)
5         x(i)=x(i)+random('f2');
6     end
7 end

```