

EMD 1

Exercice 1 (*./05 points*) Soit X une variable aléatoire ayant comme densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} kx^4, & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec k est une constante réelle.

1. Donner la fonction de répartition associée à f .
2. Proposer un algorithme, qui nous permet de générer un échantillon de taille n de même loi que X .

Exercice 2 (*./07 points*) Soit la fonction $f(x) = 1 - x^2$.

1. Vérifier ce qui suit:

$$\text{si } x \in [-1, 1] \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \text{et si } x \notin [-1, 1] \Rightarrow f(x) < 0.$$

2. Déterminer le maximum et le minimum de f dans l'intervalle $[-2, 2]$.
3. Proposer un simulateur qui nous permet de calculer la surface délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses (x') et les deux droites verticales $x = -2$ et $x = 2$.
4. Proposer un algorithme de simulation qui nous permet de calculer l'intégrale $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$

Exercice 3 (*./05pts*) Soit X une variable aléatoire qui représente la note d'étudiant de master 1 option probabilités et statistiques dans le module Modélisation et simulation. Notons que la note X dépend du type d'examen effectué (examen ordinaire ou examen remplacement) où elle est décrite comme suite :

Examen ordinaire: X suit une loi normale tronquée sur $[5, 20]$ de moyenne μ_1 et d'écart-type σ_1 .

Examen remplacement : X suit une loi normale tronquée sur $[0, 5]$ de moyenne μ_2 et d'écart-type σ_2 .

Question: Si on sait que la probabilité d'absence d'un étudiant est égale p , alors proposer un simulateur qui nous permet d'estimer la moyenne et la variance de la note de cet étudiant.

Exercice 4 (*./03pts*) On désire estimer à l'aide de la simulation les caractéristiques de la variable aléatoire N définie comme suite :

$$N = \inf_{k \geq 1} \{X_1 + X_2 + \dots + X_k \geq M\},$$

où M est une constante donnée et les X_1, X_2, \dots sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Poisson de paramètre λ .

1. Proposer un simulateur qui nous permet de générer une seule variable de même loi que N .
2. Proposer un simulateur qui nous permet d'estimer la moyenne et la variance de la variable N .

Corrigé de l'EMD 1

Solution de l'Exercice 1 (05 points)

1. Nous devons d'abord déterminer la valeur de la constante k , le fait que f est une densité alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 kx^4 dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{5} x^5 \Big|_{-1}^1 = 1 \Rightarrow \frac{2k}{5} = 1 \Rightarrow k = \frac{5}{2}.$$

2. Par définition on a $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1; \\ \frac{1}{2} (x^5 + 1), & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

3. Pour concevoir un simulateur qui peut générer un échantillon de taille n de même loi que X on peut faire recours à la méthode d'inversion. soit u une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$u = F(x) \Rightarrow u = \frac{1}{2} (x^5 + 1) \Rightarrow x^5 = 2u - 1 \Rightarrow x = \begin{cases} +\sqrt[5]{2u - 1}, & \text{si } u \geq \frac{1}{2}; \\ -\sqrt[5]{1 - 2u}, & \text{si } u < \frac{1}{2}. \end{cases}.$$

Ainsi l'algorithme de notre simulateur peut être comme suit:

```

1 function [X]=Exercice1(n)
2 for i=1:n
3     u=random('unif',0,1);
4     if (u < .5)
5         X(i)=-(1-2*u)^(1/5);
6     else
7         X(i)=(2*u-1)^(1/5);
8     end
9 end
10 end
    
```

Solution de l'Exercice 2

1. On a $f(x) = 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, $f(x)$ est un polynôme d'ordre deux dont les racines sont -1 et $+1$, alors

x		-1		$+1$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

2. on a

$$f'(x) = -2x \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0, & \text{si } x \in [-2, 0[; \\ f'(x) = 0, & \text{si } x = 0; \\ f'(x) < 0, & \text{si } x \in]0, 2]. \end{cases}$$

On peut déduire alors, que

$$\min(f(x)) = \min\{f(-2), f(2)\} = \min -3, -3 = -3$$

$$\max(f(x)) = f(0) = 1$$

$$\max(|f(x)|) = \max\{|\min(f(x))|, |\max(f(x))|\} = \max 3, 1 = 3.$$

Pour estimer la surface en question nous proposons d'utiliser la méthode de rejet (Monté Carlo). Mais nous constatons que f change de signe dans $[-2; 2]$, à cet effet nous proposons d'utiliser $|f(x)|$ plutôt que $f(x)$ elle-même (voir figure 1). Pour générer un point, notons que:

- $x \in [-2; 2]$ de ce fait il suffit de génère des x selon une loi uniforme sur $[-2; 2]$.
- $|f(x)| \in [|\min(f(x))|; \max(|f(x)|)] = [0; 3]$ de ce fait il suffit de génère des y selon une loi uniforme sur $[0; 3]$.
- La surface du rectangle délimité par $x = -2, x = 2, y = 0$ et $y = 3$ est $S = (2 - (-2)) * (3 - 0) = 12$;
- La surface recherchée est $s = S * Nbr/n$ où Nbr est le nombre de point à l'intérieur de la surface recherché, n est le nombre de point généré et S est la surface du rectangle précédent.

Le simulateur de s est présenter dans la figure 2

3. Calcul d'intégrale. Le fait que la fonction f change de signe dans $[-2; 2]$ (négative sur $[-2; -1]$, positive sur $[-1; 1]$ et négative sur $[1, 2]$, voir figure 1), pour estimé I par simulation nous allons décomposé l'intégrale I en trois intégrales I_1 et I_2, I_3 où $I_1 = \int_{-2}^{-1} f(x)dx, I_2 = \int_{-1}^1 f(x)dx$ et $I_3 = \int_1^2 f(x)dx$. Ainsi de la même approche et la même analyse que dans la première question, l'algorithme suivant peut donner une estimation pour $I = -I_1 + I_2 - I_3$ (voir figure 2).

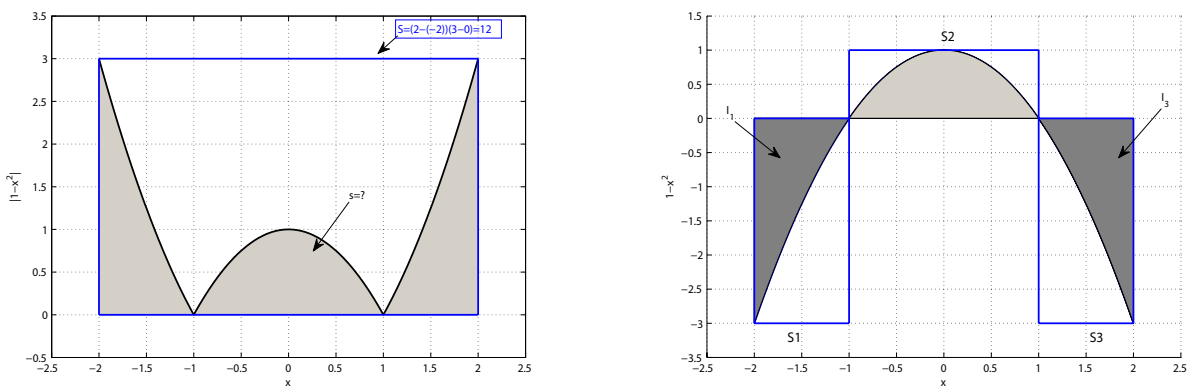


Figure 1: Illustration graphique de calcul d'intégrale de l'exercice 2.

```

1 function [s,I]=Exercice2(n)
2 %Calcul de surface
3 nbr=0;
4 for i=1:n
5     xi=random('unif',-2,2);
6     yi=random('unif',0,3);
7     if (yi <abs(1-xi^2))
8         nbr=nbr+1;
9     end
10 end
11 s=(nbr/n)*12;
12
13 %calcul d'integrale
14 nbr1=0;
15 nbr2=0;
16 nbr3=0;
17 for i=1:n
18     xi=random('unif',-2,-1);
19     yi=random('unif',0,3);
20     if (yi <abs(1-xi^2))
21         nbr1=nbr1+1;
22     end
23     xi=random('unif',-1,1);
24     yi=random('unif',0,1);
25     if (yi <(1-xi^2))
26         nbr2=nbr2+1;
27     end
28     xi=random('unif',1,2);
29     yi=random('unif',0,3);
30     if (yi <abs(1-xi^2))
31         nbr3=nbr3+1;
32     end
33 end
34 I1=(nbr/n)*3;
35 I2=(nbr/n)*2;
36 I3=(nbr/n)*3;
37 I=I2-I1-I3;
38 end

```

Figure 2: Programme Matlab de l'exercice 2

Solution de l'Exercice 3 L'analyse du problème exposé dans l'exercice donne issue à l'algorithme suivant:

```

1 function [Xbar,Xvar,X]=Exercice3(n,p,mu1,mu2,sigma1,sigma2)
2 for i=1:n
3     u=random('unif',0,1);
4     if u<(1-p)
5         y=random('norm',mu1,sigma1);
6         while or((y<5),(y>20)) % La notes doit être dans [5,20]
7             y=random('norm',mu1,sigma1);
8         end
9         X(i)=y;
10    else % L'étudiant est absent dans l'examen normal et il
11        % doit effectuer l'examen de remplacement)
12        y=random('norm',mu2,sigma2);
13        while or((y<0),(y>5)) % La notes doit être dans [0,5]
14            y=random('norm',mu2,sigma2);
15        end
16        X(i)=y;
17    end
18 Xbar=mean(X);
19 Xvar=var(X);

```

Solution de l'Exercice 4 L'analyse du problème exposé dans l'exercice donne issue à l'algorithme suivant:

```

1 function [N,Nbar]=Exercice4(n,lambda,M)
2 %Programme de la question N°2
3 for i=1:n
4     N(i)=simulN(lambda,M);
5 end
6 Nbar=mean(N);
7
8 end
9
10 %Programme de la question N°1
11 function N=simulN(lambda,M)
12 s=0;
13 N=0;
14 while s<=M
15     N=N+1;
16     y=random('poiss',lambda);
17     s=s+y;
18 end
19 end

```