Chapitre II. Modélisation des systèmes dynamiques linéaires Continus

II.1 MODELISATION

Pour commander correctement un système, il est nécessaire de définir un modèle mathématique qui représente la relation entre les signaux d'entrée et les signaux de sortie. À l'aide de ce modèle mathématique, il est possible de calculer la sortie du système étudié si on connaît l'entrée et les conditions initiales. L'ensemble des procédures permettant d'obtenir un modèle mathématique est la modélisation. On peut distinguer deux sortes de modèle :

- **le modèle de connaissance** est obtenu en se basant sur les lois de la physique (Newton, Kirchoff…) qui régissent le comportement du système. Les paramètres d'un tel modèle ont alors une interprétation physique,
- **le modèle de représentation** est un modèle déterminé à partir de données expérimentales (données entrée-sortie). Les paramètres de ce modèle n'ont pas d'interprétation physique.

Quand le système étudié est complexe, l'écriture des lois physique régissant le système devienne difficile. Dans ce cas, on cherchera un modèle de représentation permettant de modéliser le fonctionnement du système étudié. Ce chapitre a pour but de donner les principales représentations d'un système dynamique linéaire continu dans le temps invariant mono variable.

II.2 REPRESENTATIONS TEMPORELLES

II.2.1 Représentation par une équation différentielle

La plupart du temps, on représente un système dynamique linéaire continu mono variable d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ par une équation différentielle à coefficients constants de la manière suivant:

$$a_n \frac{dy^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{dy^2}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y \quad = b_m\frac{dx^m}{dt^m} + \ b_{m-1}\frac{dx^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + b_2\frac{dx^2}{dt^2} + b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x \qquad (2.1)$$

où :

- les coefficients ai et bi sont des constantes réelles, n et m sont des entiers positifs tels que $m \le n$;
- n est l'ordre du système,

Cette équation différentielle est une représentation entrée/sortie du système. La solution de cette équation représente l'évolution de la sortie du système $y(t)$ au cours du temps en fonction de l'entrée $u(t)$ et de conditions initiales.

Exemple 2.1 :

Considérons le circuit RLC ci-dessous

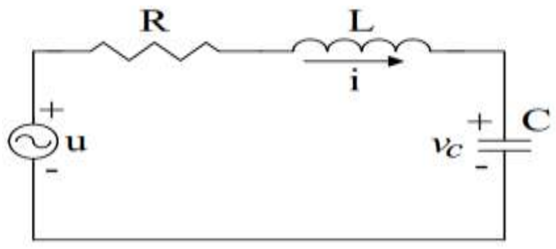


Figure 2.1 : Circuit RLC

On veut déterminer la relation liant $u(t)$ (tension d'alimentation) et $y(t)$ (le courant $i(t)$).

L'équation de maille donne :

$$\mathrm{R}i(t)+\mathrm{L}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt=u(t) \qquad (2.2)$$

$$\mathrm{L}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\mathrm{R}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{\mathrm{C}}y(t)=\frac{du(t)}{dt} \qquad (2.3)$$

Exemple 2.2 :

Soit le moteur électrique d'écrit par le schéma 2.2.

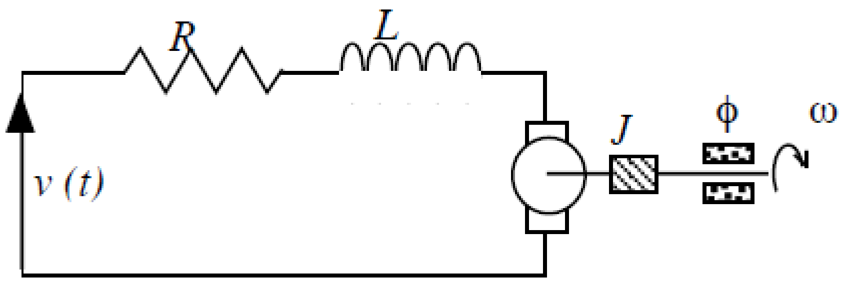


Figure 2.2: Schéma du moteur électrique

L'équation électrique est :

$$v(t)=R.i+L.\frac{di}{dt}+K_e.\omega$$

L'équation mécanique donne :

$$J.\frac{d\omega}{dt}=K_ci-\phi.\omega$$

On peut obtenir une l'équation différentielle reliant la sortie ω à l'entrée $v(t)$:

$$\frac{L.J}{K_c}.\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{R.J+L.\phi}{K_c}.\frac{d\omega}{dt}+\left(\frac{R.\phi}{K_c}+K_e\right).\omega=v(t)$$

On en déduit que ce système est d'ordre 2.

II.3. PRESENTATION DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

Nous allons nous intéresser à des systèmes linéaires et invariants (ou stationnaires). Il s'agit de systèmes tels, que les relations entre les grandeurs d'entrée et les grandeurs de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (si le système n'est pas rigoureusement linéaire, on arrive tout de même souvent à le linéariser autour d'un point de fonctionnement…). Or les opérations liées à cette manipulation sont souvent délicates et la résolution des équations n'est pas toujours simple. Pour faciliter les calculs, on utilise un outil mathématique puissant: **la transformée de Laplace**

II.3.1. Transformée de Laplace

La transformée de Laplace permet de remplacer les équations différentielles qui relient les grandeurs caractéristiques de nos systèmes par des relations à base de fractions rationnelles.

II.3.1.1. Définition.

Considérons une fonction f de la variable réelle t supposée nulle pour les valeurs négatives de t. La transformée de Laplace de f, notée F est une fonction de la variable complexe p définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \qquad (2.4)$$

P étant une variable complexe.

On note : $F(p) = TL[f(t)] et\ f(t) = TLLP^{-1}[F(p)]$ (2.5)

On dit que F(p) est la transformée de *f(t)* et que *f(t)* est l'original de *F(p)*

Pour résoudre les équations différentielles grâce à la transformée de Laplace, il est nécessaire de savoir effectuer le passage de *f(t)* à *F(p)* mais aussi de *F(p)* à *f(t)*.

II.3.1.2. Conditions initiales

Dans la suite du cours, on supposera souvent que les valeurs initiales de l'entrée et de la sortie sont nulles. En fait, si ce n'est pas le cas mais que l'on se trouve dans des conditions de repos du système, on peut montrer que les variations autour de ce point d'équilibre vérifient la même équation 2.1 que les grandeurs elles-mêmes.

II.3.1.3. Propriétés et théorèmes

Les propriétés de la transformée de Laplace sont réunies dans le tableau ci-après :

a. Linéarité :

$$TL[a * f_1(t) + b * f_2(t)] = a * F_1(p) + b * F_2(p) \qquad (2.6)$$

b. Dérivation

$$TL[f'(t)] = p * F(p) - f(0^+) \qquad (2.7)$$

c. Dérivation d'ordre n

$$TL[f^n(t)] = p^n * F(p) - p^{n-1} * f(0^+) - \cdots - p * f^{n-2}(0^+) - f^{n-1}(0^+) \qquad (2.8)$$

(n>0)

d. Intégration :

$$TL[\int f(t)] = \frac{F(p)}{p} \qquad (2.9)$$

e. Retard :

$$TL[f(t-\theta)] = e^{-\theta p} F(p) \qquad (2.10)$$

f. Changement d'échelle :

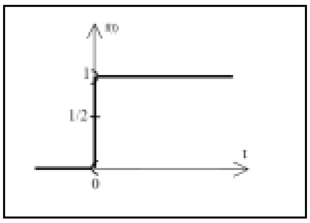
$$TL[f(a * t)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \qquad (2.11)$$

II.3.1.4. Transformée de Laplace de signaux particuliers.

Ces méthodes sont basées sur l'utilisation d'entrées dites canoniques, faciles a mettre en œuvre dans toutes les techniques (électrique, mécanique, hydraulique). On en déduit alors les différentes constantes de la fonction de transfert.

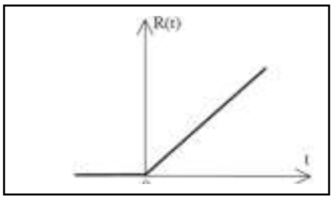
- ***échelon u(t) :***

$TL[f(t)]=\frac{1}{p}$ (2.12)



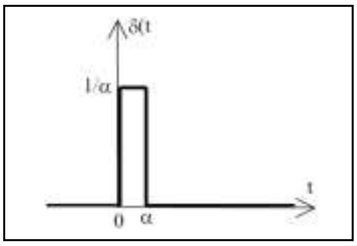
- ***fonction rampe***

$r(t) = a.t.u(t) \qquad TL[r(t)] = \frac{a}{p^2}$ (2.13)



- ***Impulsion de Dirac*** **δ(t)**

Ce signal est issu de la théorie mathématique des distributions. A titre d'information, les distributions sont des fonctions non continues pour lesquelles les propriétés mathématiques relatives aux fonctions continues s'appliquent. La figure présente une visualisation d'une impulsion de Dirac.



Dans le modèle mathématique le paramètre α tend vers 0.

On aura donc les relations suivantes :

$\lim_{\alpha \to \infty} \delta(t) = 0$ pour tout t≠0 (2.14)

$\lim_{\alpha \to \infty} \delta(t) = +\infty$ pour tout t=0

plus, nous appellerons impulsion de Dirac **unité**, le signal δ(t) vérifiant la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad (2.15)$$

Cette relation signifie que l'énergie du signal considéré est unitaire.

A ces propriétés, on doit joindre les théorèmes suivants :

1. **Théorème de la valeur finale :**

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t) \qquad (2.16)$$

2. **Théorème de la valeur initiale :**

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = \lim_{t\to 0} f(t) \qquad (2.17)$$

II.4. APPLICATION A LA RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Un système linéaire d'entrée *x(t)* et de sortie *y(t)* est régi par une équation différentielle à coefficients constants du type:

$$a_n \frac{dy^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{dy^2}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{dx^m}{dt^m} + \ b_{m-1}\frac{dx^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + b_2\frac{dx^2}{dt^2} + b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x \qquad (2.18)$$

Si on écrit la transformation de la Laplace de l'équation différentielle à conditions initiales nulles on trouve :

$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ Appelée fonction de transfert ou transmittance du système

Le but de cette représentation est de pouvoir déterminer les caractéristiques de la sortie *y(t)* connaissant la fonction de transfert *H(p)* du système et le signal d'entrée *x(t)*.

On peut mettre *H(p)* sous la forme :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0} \qquad (2.19)$$

H(p) peut s'écrire sous la forme :

$$H(p) = K\frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(p-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(p-p_i)} \qquad (2.20)$$

D'une manière générale, cette notation n'est valable que si :

- **le système est linéaire à coefficients constants,**
- **toutes les variables et leurs dérivées sont nulles pour t < 0 (le système part du repos absolu),**

Les principales propriétés de la transformée de Laplace sont présentées dans le Tableau 2.1.

Tableau 2.1 : Propriétés de la transformée de Laplace

Table des Transformées de Laplace

$f(t) \quad (t \geq 0)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
Impulsion unitaire $\delta(t)$	1
Echelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$t.sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t.cos(\omega t)$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$e^{-at}.sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}.cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

(n : entier positif)

Propriétés des Transformées de Laplace

$f(t) \quad (t \geq 0)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$f(t)$	$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$
$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$	$\lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$p^2F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} . \frac{d^{(r-n-1)} f(0)}{dt^{(r-n-1)}}$
$\int_0^t \int_0^t .... \int_0^t f(t).dt^n$ (avec conditions initiales nulles)	$\frac{F(p)}{p^n}$
$f(kt)$	$\frac{1}{k}.F\left(\frac{p}{k}\right)$
$f(\frac{t}{k})$	$k.F(kp)$
$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
$f(t-\tau)$ pour $(t \geq \tau)$	$e^{-p\tau}.F(p)$
$\int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau)d\tau$	$F_1(p).F_2(p)$
$t.f(t)$	$-\frac{d}{dp}F(p)$

- $f(t)$ fonction périodique de période T.
- $f_1(t)$ fonction définie sur la 1ère période de $f(t)$.

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}$$

$$f(0^+) = \lim_{p \to \infty} \{pF(p)\} \qquad f(\infty) = \lim_{p \to 0} \{pF(p)\}$$

Si les limites existent

Le Tableau 2.2 donne les transformées de Laplace des signaux usuels.

Tableau 2.2 : Transformées de Laplace des signaux d'excitation usuels

$f(t)$	$F(s)$	Seuil de convergence
impulsion de Dirac $\delta(t)$	1	$\forall s$
Échelon unitaire $u_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re(s) > 0$
Rampe unitaire $t\, u_{-1}(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re(s) > 0$
Fonction puissance $t^n u_{-1}(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re(s) > 0$
Fonctions sin et cos	$\frac{w}{s^2+w^2}, \frac{s}{s^2+w^2}$	$\Re(s) > 0$

II.5. TRANSFORMEE INVERSE PAR DECOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES

La décomposition en éléments simples partielles permet de représenter la transformée de Laplace sous la forme suivante:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0} = K \frac{\prod_{i=1}^{m}(p - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(p - p_i)}$$

où $m \leq n$, $K = b_m / a_n$. On distingue en général trois cas selon la nature de dénominateurs (pôles):

II.5.1. Pôles réels et distincts : si les pôles sont réels et distincts, on peut représenter $F(p)$ par :

$$F(p) = \frac{C_1}{p - p_1} + \frac{C_2}{p - p_2} + \cdots \ldots \ldots \ldots . + \frac{C_n}{p - p_n}$$

Ou

$$C_i = (p - p_i) H(p)|_{p = p_i}$$

Ainsi, on peut prendre la transformée inverse de chacun des termes pour obtenir :

$$h(t) = (C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + C_n e^{p_n t}) u(t)$$

Exemple 2.3 :

Trouver la transformée inverse de la fonction suivante:

$$F(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

II.5.2. Pôles complexes et distincts : les pôles complexes résultent en des formes quadratiques au dénominateur.

Exemple 2.4 :

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2 + p + 2)}$$

II.5.3. Pôles réels et multiples : si les pôles sont réels et un des pôles se répète k fois, on peut représenter $F(p)$ par :

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p+p_k)^m} = \frac{A_1}{p+p_k} + \frac{A_2}{(p+p_k)^2} \dots \dots + \frac{A_i}{(p+p_k)^i} + \cdots \dots . + \frac{A_n}{(p+p_k)^n}$$

Ou pour les pôles simples, on a:

$$C_i = (p+p_i)H(p)|_{p=-p_i}$$

Et pour le pôle de multiplicité m, on a:

$$A_i = \frac{1}{(m-i)!}\left[\frac{d^{m-i}}{dp^{m-i}}[(p+p_i)^m F(p)]\right]\Bigg|_{p=-p_k}$$

Exemple 2.5 :

$$F(p) = \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{p^2(p-2)(p-1)}$$

II.6. FONCTION DE TRANSFERT

Soit un système linéaire invariant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$. On appelle fonction de transfert du système le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée, à conditions initiales nulles

La fonction de transfert est aussi la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle (la réponse impulsionnelle d'un système est sa sortie à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac, avec conditions initiales nulles). Le dénominateur de la fonction de transfert est dit le polynôme caractéristique du système, et l'ordre du système est le degré de ce polynôme. On peut alors représenter le système sous la forme graphique ci-dessous :

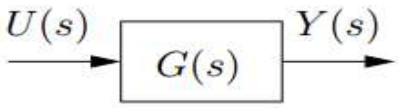
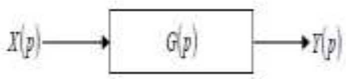


Figure 2.3 : Diagramme fonctionnel d'une fonction de transfert

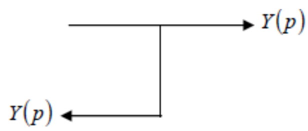
II.7. ALGEBRE DES DIAGRAMMES FONCTIONNELS

Dans le cas d'un système constitué d'un ensemble de composants interconnectés, il est possible d'adopter une représentation sous forme d'un diagramme fonctionnel d'interprétation directe à partir des fonctions de transfert des composants. Un diagramme fonctionnel est composé de blocs fonctionnels représentant les composants élémentaires. Ces blocs sont reliés par des flèches représentant un signal, l'orientation de la flèche indiquant le sens du signal. Cette représentation peut contenir également le bloc sommateur qui permet d'additionner ou de soustraire des signaux, à l'entrée de la flèche dans le sommateur le signe affectant le signal est indiqué.

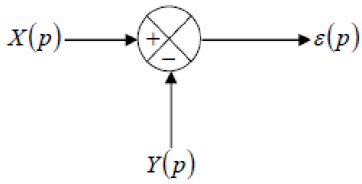
- Le système



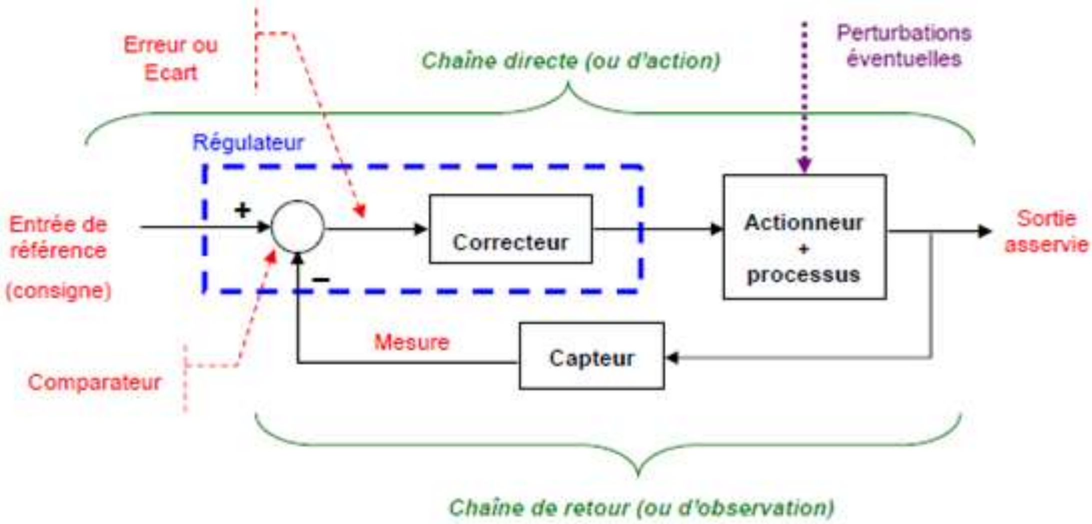
- Branchement d'un signal



- Comparateur algébrique (sommateur/soustrateur)



❖ **Exemple de schéma bloc d'un système**



- **Grandeur de sortie (Sortie Asservie)** *:* La sortie régulée représente le phénomène physique que doit régler le système, c'est la raison d'être du système. Il peut s'agir d'une tension, d'un déplacement, d'un angle de rotation, d'un niveau, d'une vitesse, etc...
- **Grandeur d'entrée ou référence (consigne) :** La consigne, est l'entrée d'action, c'est la grandeur réglante du système. Sa nature peut être différente de celle de (S). Seule importe sa valeur numérique. Si (E) et (S) sont de natures différentes, il suffit de définir une correspondance numérique entre ces deux grandeurs. Par exemple, on dira qu'un volt a l'entrée représente 100 tours/mn.
- **Erreur ou écart entrée – sortie :** On appelle écart ou erreur, la différence entre la consigne et la sortie. Cette mesure ne peut être réalisée que sur des grandeurs comparables, on la réalisera donc en général entre la consigne et la mesure de la sortie. Elle est fournie par le comparateur et est proportionnelle à la différence. Elle peut être de nature différente.
- **Mesure de la sortie** : Elle est fournie par la chaine de retour, généralement après transformation. Elle doit obligatoirement avoir même nature physique que l'entrée. Ce qui est

évident si on veut donner un sens a la différence. Un des rôles de la chaine de retour est donc d'assurer la conversion de la mesure de Sortie dans la grandeur physique de d'entrée

- **Chaîne directe ou d'action** *:* Englobe tous les organes de puissance (nécessitant un apport extérieur d'énergie) et qui exécute le travail.

  - Comporte généralement nombreux éléments, notamment des amplificateurs.

  - La nature de ces éléments n'est pas spécifiée sur le schéma, il peut s'agir aussi bien d'engins électriques, mécaniques, pneumatiques, etc…

- **Chaîne de retour ou de réaction**

  - Analyse et mesure le travail effectue et transmet au comparateur une grandeur physique proportionnelle à ce travail.
  - Elle comprend généralement un capteur qui donne une mesure de la grandeur de sortie, qui est ensuite amplifiée et transformée avant d'être utilisée.

- **Régulateur**

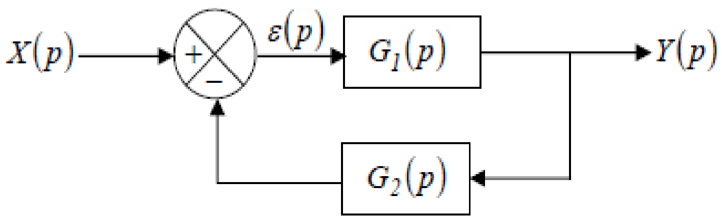
Le régulateur se compose d'un comparateur qui détermine l'écart entre la consigne et la mesure et d'un correcteur qui élabore à partir du signal d'erreur l'ordre de commande.

- **Perturbation**

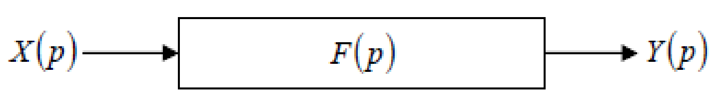
On appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie a son niveau indépendamment des perturbations.

II.8. FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMEE (FTBF)

Soit un système asservi, le plus général, représente par le schéma suivant



Equivalent à :



On a $Y(p) = \varepsilon(p).G_1(p)$ et $\varepsilon(p) = X(p) - Y(p).G_2(p)$ (2.21)

$$\Rightarrow Y(p) = \big(X(p) - Y(p).G_2(p)\big).G_1(p)$$

$$\Rightarrow Y(p).\big(1 + G_1(p).G_2(p)\big) = G_1(p).X(p) \qquad (2.22)$$

D'où $F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G_1(p)}{1+G_1(p).G_2(p)}$ (2.23)

$T(p) = G_1(p)$: Fonction de transfert en boucle ouverte

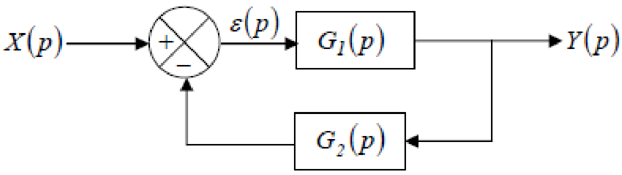
F(p) : Fonction de transfert en boucle fermée

Remarque :

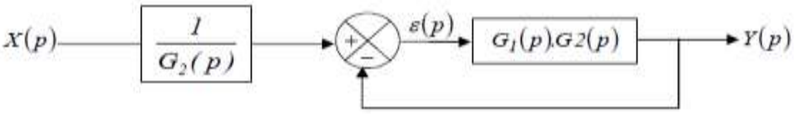
❖ Dans le cas où $G_2(p) = 1 \Longrightarrow F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G_1(p)}{1+G_1(p)}$ (2.24)

F(p) a une chaîne de retour de transmittance *1*.

Il est toujours possible de ramener un système à retour non unitaire à un système à retour unitaire



Equivalent à :



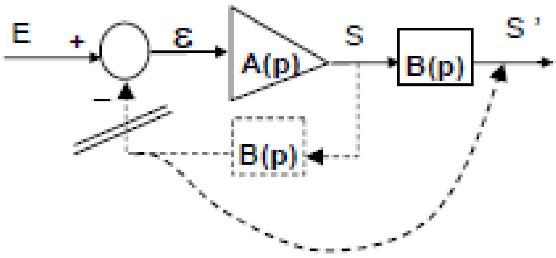
La fonction de transfert d'un système bouclé ou en Boucle Fermée (FTBF) est donc le rapport de la fonction de transfert de sa chaîne directe à $\boldsymbol{1 + G_1(p) * G_2(p)}$

$$\boldsymbol{F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p).G_2(p)}}$$

II.9. FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE OUVERTE (FTBO)

Un système en boucle ouverte est un système qui ne comporte pas de contre-réaction entre la sortie et l'entrée.

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (également appelée F.T.B.O.) est la fonction de transfert qui lie les transformées de Laplace de la sortie de la chaine de retour S ' (p) à l'erreur ε(p). Elle correspond à l'ouverture de la boucle



Dans ce cas ε =E puisque le comparateur ne reçoit plus qu'une seule information

On a donc :

$S'(p) = B(p) * S(p)$ (2.25)

$= B(p) * A(p) * \varepsilon(p)$ (2.26)

$= B(p) * A(p) * E(p)$ (2.27)

D'où : $\frac{S'(p)}{E(p)} = K(p) = A(p) * B(p)$ (2.28)

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (ou FTBO) d'un asservissement est le produit des fonctions de transfert de la chaîne directe par la chaîne de retour.

II.10. FORMES GENERALES DE LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME LINEAIRE

Soit un système asservi représente par sa fonction de transfert de forme générale suivante :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)} \qquad (2.29)$$

H(p) peut s'écrire sous la forme :

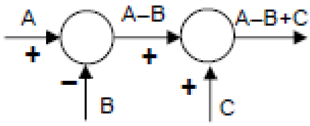
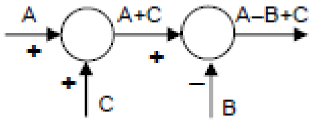
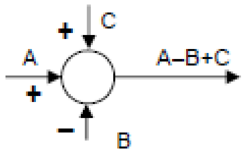
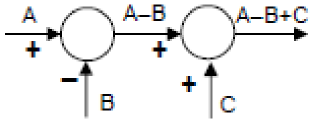
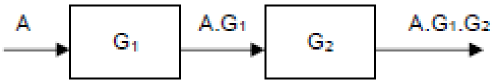
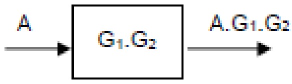
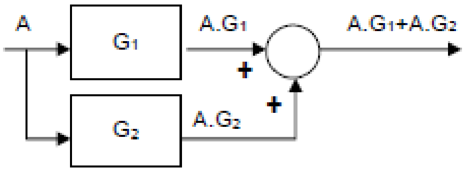
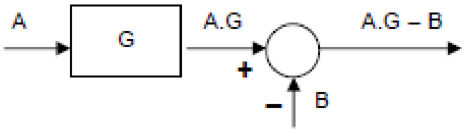
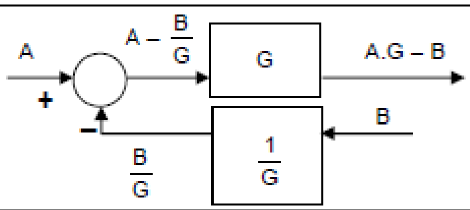
$$H(p) = K_0 \frac{(p-z_1)(p-z_2)\ldots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)} = K_0 \frac{\prod_{i=1}^{m}(p-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(p-p_j)} \qquad (2.30)$$

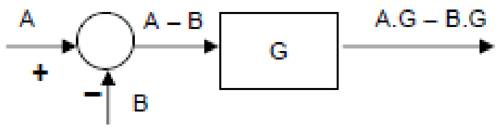
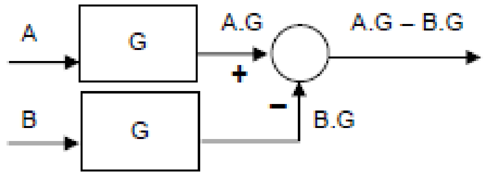
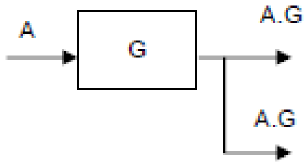
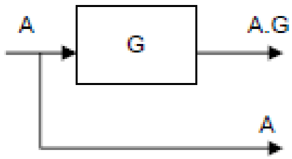
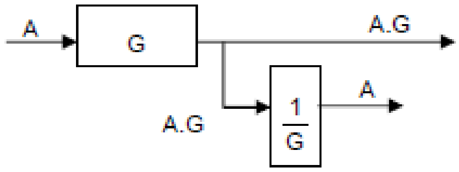
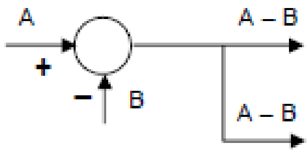
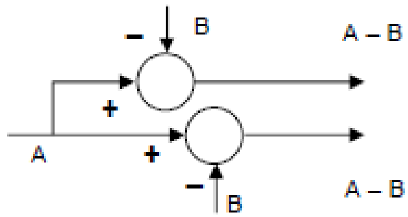
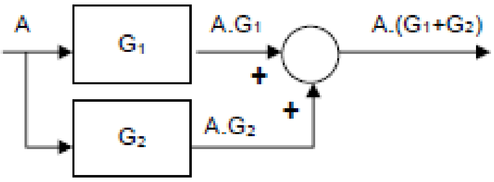
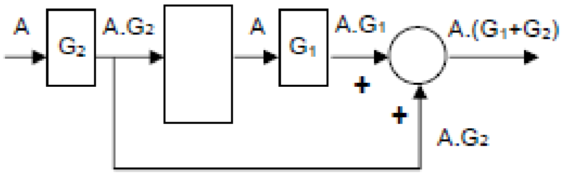
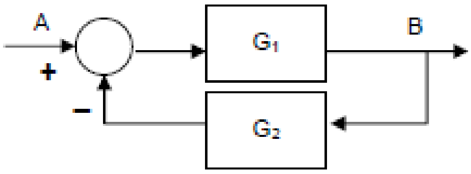
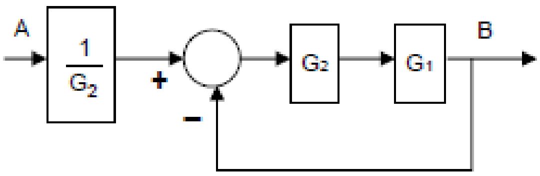
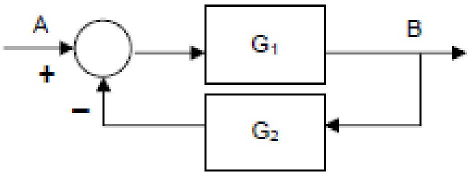
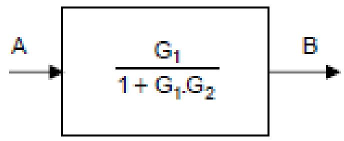
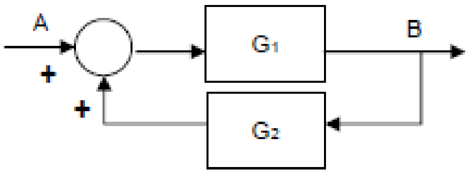
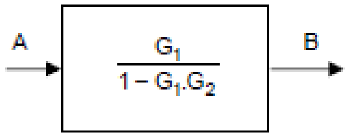
Avec $m<n$ pour un système réel

- les racines du numérateur sont appelées " **zéros de la fonction de transfert** ",
- les racines du dénominateur sont appelées " **pôles de la fonction de transfert** ",

II.11. REGLES DE TRANSFORMATION DES SCHEMAS FONCTIONNELS

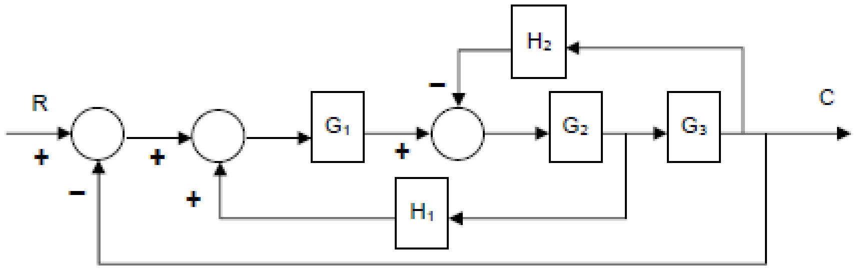
D'une manière générale, pour simplifier un bloc fonctionnel il est souvent plus judicieux de déplacer les points de connexion et les comparateurs (ou additionneurs), d'inter-changer ces derniers, puis de réduire les boucles internes.

<table>
<tr><th></th><th>Schéma fonctionnel original</th><th>Schéma fonctionnel équivalent</th></tr>
<tr><td>1.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

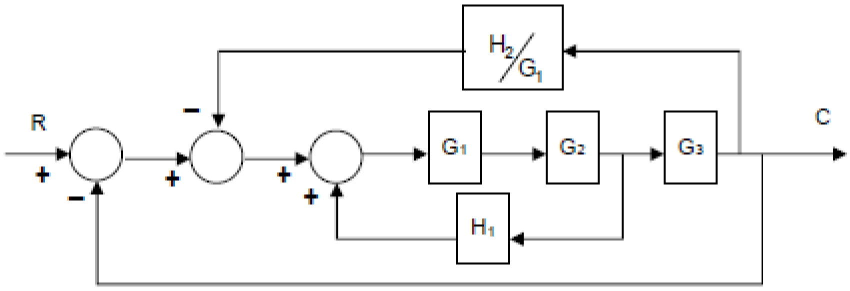
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		
14.		

Exemple 2.6: Réduction successive d'un schéma fonctionnel

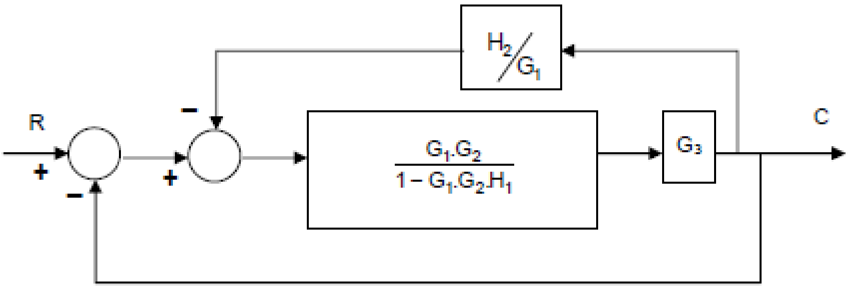
Soit à réduire le schéma fonctionnel suivant :



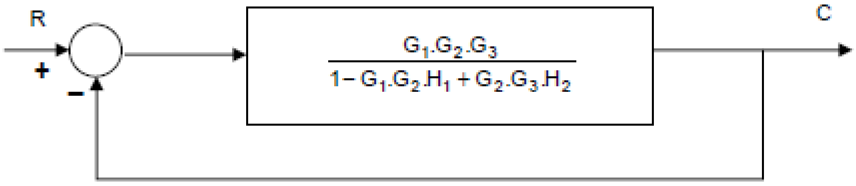
En appliquant la **règle n° 6**, puis la **règle n° 1**, on obtient :



En appliquant la **règle n° 14**, puis la **règle n° 3**, on obtient :



En appliquant la **règle n° 13**, puis la **règle n° 3**, on obtient :



Règle n°13