الفصل الأول

Sets theories نظريات المجموعات

Exercise series N° 1 سلسلة التمارين رقم

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

اكتب بالتفصيل (أي بإعطاء كل عناصر المجموعات التالية:

Write in detail (i.e., by providing all elements) the following sets:

1) $A = \{integers\ between\ \ 2\pi$ و $\sqrt{2}$ أعداد صحيحة بين $\}$.

2) $B = \left\{x \in \mathbb{Q};\ \exists (n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ x = \frac{p}{n}\ \ and\ \ 1 \leq p \leq 2n \leq 7\right\}$.

Solution : الحــل

لدينا

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

لكتابة B **، نلاحظ أن**

$$1/2 \leq n \leq 7/2 \Rightarrow n = 1, 2 \text{ أو } 3.$$

لكل قيمة محتملة لـ n **، نكتب القيم المحتملة لـ** p **، ونحصل على:**

$$B = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}.$$

نلاحظ أنه لم نكتب عدة مرات 1 **، والتي تم الحصول عليها أيضا بـ** $2/2$ **و** $3/3$ **، ولا عدة مرات** 2**، والتي حصلنا عليها بـ** $2/1$ **و** $4/2$ **و** $6/3$.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

إذا كان لدينا $C \subset A \cup B$ **فهل : لأن** $C \subset A$ **أو** $C \subset B$ **؟**

If we have $C \subset A \cup B$ *does that mean* $C \subset A$ *or* $C \subset B$ *?*

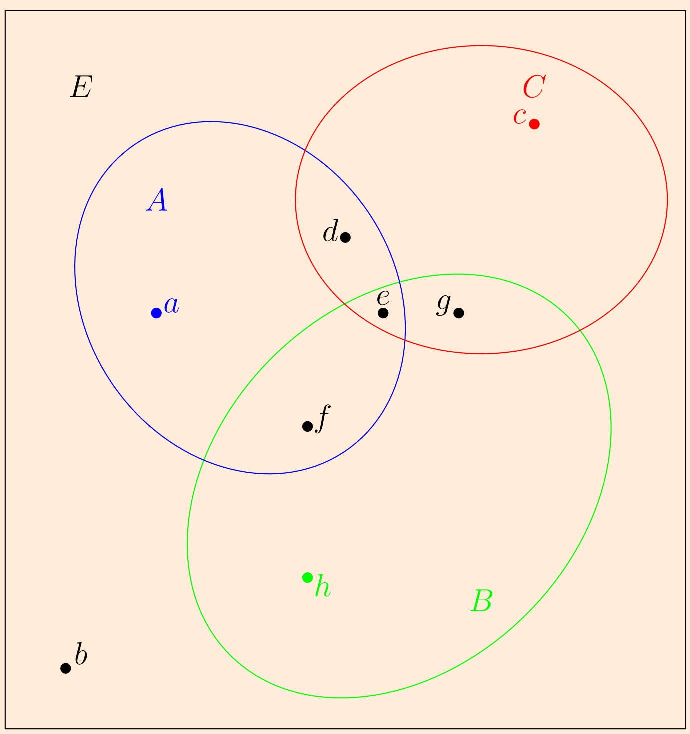
Solution : الحــل

لا! نأخذ مثلا $A = \{1, 2\}$، $B = \{3, 4\}$ **و** $C = \{2, 3\}$.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

نأخذ في الاعتبار مخطط فين التالي ، الذي يحتوي على ثلاثة مجموعات جزئية A, B, C من المجموعة E و العناصر a, b, c, d, e, f, g, h من E.

We consider the following Venn diagram, which contains three partial sets A, B, *and* C *of the set* E, *and the elements* a, b, c, d, e, f, g, h *from* E.



حدد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة أم خاطئة:

Determine whether the following statements are true or false:

1) $g \in A \cap \bar{B}$ **2)** $g \in \bar{A} \cap \bar{B}$. **3)** $g \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
4) $f \in \bar{A}$. **5)** $e \in \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$. **6)** $\{h, b\} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
7) $\{a, f\} \subset A \cup C$.

Solution : الحـــل

1) **خطأ لأن** $g \in B$ **وبالتالي** $g \notin \overline{B}$.

2) **خطأ لنفس السبب.**

3) **صحيح لأن** $g \in \overline{A}$.

4) **خطأ لأن** $f \in A$.

5) **خطأ لأن** $e \in A$.

6) **يرجع هذا إلى إثبات أن** $h \notin \overline{A} \cap \overline{B}$ **و** $b \in \overline{A} \cap \overline{B}$ **: و هذا خطأ.**

7) **يرجع هذا إلى إثبات أن** $a \in A \cup C$ **و** $f \in A \cup C$**: و هذا صحيح.**

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

لتكن B, A و C ثلاث مجموعات حيث $A \cup B = B \cap C$.

Let B, A and C be three sets where $A \cup B = B \cap C$.

أثبت أن $A \subset B \subset C$.

Prove that $A \subset B \subset C$.

Solution : الحـــل

ليكن $x \in A$. **ومنه** $x \in A \cup B$ **، وبالتالي** $x \in B \cap C$**، أي أن،** $x \in B$ **، وبالتالي** $A \subset B$.
الآن نأخذ $x \in B$. **ومنه** $x \in A \cup B$ **، وبالتالي** $x \in B \cap C$**، أي أن ،** $x \in C$ **، وبالتالي** $B \subset C$.

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

لتكن B, A و C ثلاثة مجموعات جزئية من المجموعة E. من أجل $X \subset E$ ، نرمز بالرمز X^c إلى متممة X في E.

Let B, A and C be three subsets of the set E. For $X \subset E$, we denote by X^c the complement of X in E.

Prove the following Morgan's laws:

أثبت قوانين مورغان التالية:

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **2.** $(A^c)^c = A$

3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ **4.** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Solution : الحـــل

في كل مرة سنبرهن بالإحتواء المزدوج.

1) **ليكن** $x \in (A \cap B) \cup C$، **ومنه** $x \in A$ **و** $x \in B$ **أو** $x \in C$. **إذا كان** $x \in A$ **و** $x \in B$ ، **فإن** $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$ ، **ويتم إثبات الإحتواء. بخلاف ذلك ، يكون** $x \in C$ **فقط ، وفي هذه الحالة لدينا أيضا** $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$.

بالمقابل ، إذا كان $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$ ، **فإننا نميز بين حالتين: إذا كان** $x \in C$ ، **ومنه** $x \in (A \cap B)$ **أو** $x \in C$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B) \cup C$. **خلاف ذلك ،** $x \notin C$. **ولكن ، بما أن** $x \in A \cup C$، **يصبح لدينا** $x \in A$. **وبالمثل، بما أن** $x \in B \cup C$، **فإن** $x \in B$. **هذا يثبت أن** $x \in A \cap B$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B) \cup C$.

2) **ليكن** $x \in (A^c)^c$. **ومنه** $x \notin A^c$ ، **وبالتالي** $x \in A$. **بالمقابل ، إذا كان** $x \in A$ ، **فإن** $x \notin A^c$ **وبالتالي** $x \in (A^c)^c$.

3) **ليكن** $x \in (A \cap B)^c$. **ثم** $x \notin A \cap B$. **إذن لدينا** $x \notin A$ **أو** $x \notin B$ ، **أي أن** $x \in A^c$ **أو** $x \in B^c$. **نستنتج أن** $x \in A^c \cup B^c$. **بالمقابل ، ليكن** $x \in A^c \cup B^c$. **إذن** $x \in A^c$ **أو** $x \in B^c$ ، **أي أن ،** $x \notin A$ **أو** $x \notin B$. **على وجه الخصوص ،** $x \notin A \cap B$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B)^c$.

4) **يمكننا أيضاً تقديم المنطق السابق في نموذج التكافؤ**

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff x \notin A \text{ و } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ و } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

لتكن E مجموعة، A ، B و C ثلاثة عناصر من $\mathscr{P}(E)$. أثبت أن:

Let E be a set, A , B and C three elements of $\mathscr{P}(E)$. Prove that:

1) إذا كان $A\cap B=A\cup B$ ، فإن $A=B$.

If $A\cap B=A\cup B$, *then* $A=B$.

2) إذا كان $A\cap B=A\cap C$ و $A\cup B=A\cup C$ ، فإن $B=C$. هل يكفي أحد الشرطين؟

If $A\cap B=A\cap C$ *and* $A\cup B=A\cup C$, *then* $B=C$. *Is one of the two conditions sufficient?*

Solution : الحــل

1) من خلال تناظر القضية في A و B، يكفي إثبات أن $A\subset B$.

ليكن $x\in A$ ونفرض أن $x\notin B$. ومنه فإن $x\in A\cup B$ ولكن $x\notin A\cap B$ وبالتالي فإن المجموعتين $A\cap B$ و $A\cup B$ مختلفتان ، وهذا تناقض. لذلك فإن $x\in B$.

2) من خلال تناظر القضية في B و C ، يكفي إثبات أن $B\subset C$.

ليكن $x\in B$. نميز هنا حالتين:

A) إما $x\in A$، في هذه الحالة ، $x\in A\cap B=A\cap C$ ، وبالتالي $x\in C$.

B) أو $x\notin A$، في هذه الحالة ، $x\in A\cup B=A\cup C$ وبالتالي $x\in A$ أو $x\in C$. نظراً لأننا في الحالة $x\notin A$ ، فإننا نستنتج أن $x\in C$.

في جميع الحالات ، أثبتنا $x\in C$ ، وبالتالي $B\subset C$. شرط واحد غير كافي.

إذا افترضنا فقط أن $A\cup B\subset A\cup C$ ، علينا فقط أن نأخذ المثال التالي لكي نبرهن ضرورة الشرطين معا.

ليكن $A=\{1,2\}$ ، $B=\{1\}$ و $C=\{2\}$.

لدينا $A\cup B\subset A\cup C$ ، لكن ليس لدينا $B\subset C$.

إذا افترضنا فقط أن $A\cap B\subset A\cap C$ ، علينا أن نأخذ فقط كمثال $A=C=\{1\}$ و $B=\{1,2\}$.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

اوجد مجموعة أجزاء المجموعة

Find the set of parts of the set

$$E=\{a,b,c,d\}.$$

Solution : الحــل

المجموعة $P(E)$ **لأجزاء مجموعة** $E = a, b, c, d$ **تحتوي على جميع المجوعات الجزئية الممكنة للمجموعة** E**، بما في ذلك المجموعة الخالية والمجموعة نفسها. إليك جميع المجموعات الجزئية:**

The set $P(E)$ of parts of the set $E = \{a, b, c, d\}$ includes all possible subsets of E, including the empty set and the set itself. Here are all the subsets:

$$\begin{aligned}
P(E) = \{&\phi, \\
&\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\
&\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \\
&\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \\
&E\}
\end{aligned}$$

Exercise N°– 8 – تمرين رقم

لتكن E و F مجموعتين و لتكن A و C مجموعتين جزئيتين من E و B، D مجموعتين جزئيتين من F .

Let E and F be two sets, and let A and C be two subsets of E and B , D be two subsets of F .

Prove that أثبت أن

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Solution : الحـــل

سنبرهن الإحتواء المزدوج.

لتكن $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. **ومنه** $(x, y) \in A \times B$ **وبالتالي** $x \in A$ ، $y \in B$.

لدينا أيضا $(x, y) \in (C \times D)$**، وبالتالي** $x \in C$ **و** $y \in D$. **لذا** ، $x \in A \cap C$ **و** $y \in B \cap D$.

هذا يثبت أن $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

بالمقابل ، لتكن $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ **يعني أن** $x \in A \cap C$ **وبالتالي** $x \in A$ **و** $x \in C$.

وبالمثل، $y \in B \cap D$ ، **لذا** $y \in B$ **و** $y \in D$. **إذن** ، $(x, y) \in A \times B$ **و** $(x, y) \in C \times D$.

نستنتج أن $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

Exercise N°– 9 – تمرين رقم

لتكن E مجموعة و A و B مجموعتين جزئيتين من E.

Let E be a set, and A and B be two subsets of E.

أثبت أن $A\Delta B = B$ (الفرق التناظري) إذا وفقط إذا كانت $A = \varnothing$.

Prove that $A\Delta B = B$ (symmetric difference) if and only if $A = \varnothing$.

Solution : الحـــل

تذكر أولا أن الفرق التناظري يمكن كتابته ايضا على الشكل

$$\boxed{A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)}$$

حيث $\bar{A}$ تمثل متمم المجموعة A في E.

هناك إحتواء سهل:

إذا كان $A = \phi$ ، فعند تعريف الفرق التناظري، لدينا $A \cap B = B$ و لأن $A = \phi$ و $\bar{A} \cap B = B$.

بالمقابل ، إذا كان $A \cap B = B$ ، يجب أن نثبت أن $A = \phi$.

سنقسم الإثبات إلى قسمين:

أولا: نثبت أن $A \cap B = \phi$.

ليكن $x \in B$، و على وجه الخصوص $x \in A \cap B$ ، و يعني حتما أن $x \in A \cap \bar{B}$ أو $x \in \bar{A} \cap B$.

الاحتمال الأول مستحيل (لأن $x \in B$) وبالتالي لدينا الإحتمال الثاني هو الصحيح $x \in \bar{A} \cap B$.

وبالتالي ، فإن كل عنصر من عناصر من المجموعة B موجود أيضا في $\bar{A}$ ، وبالتالي $A \cap B = \phi$.

سنثبت أيضا أن $A \cap \bar{B} = \phi$.

في الواقع ، لنفرض أنه يمكننا إيجاد عنصر في $A \cap \bar{B}$. سيكون هذا العنصر أيضا في $A \cap B = B$ ، وهو أمر مستحيل لأنه سيكون في الوقت نفسه في B و $\bar{B}$.

في الأخير، المواجهة بين الخاصيتين السابقتين يعني أن $A = \phi$.