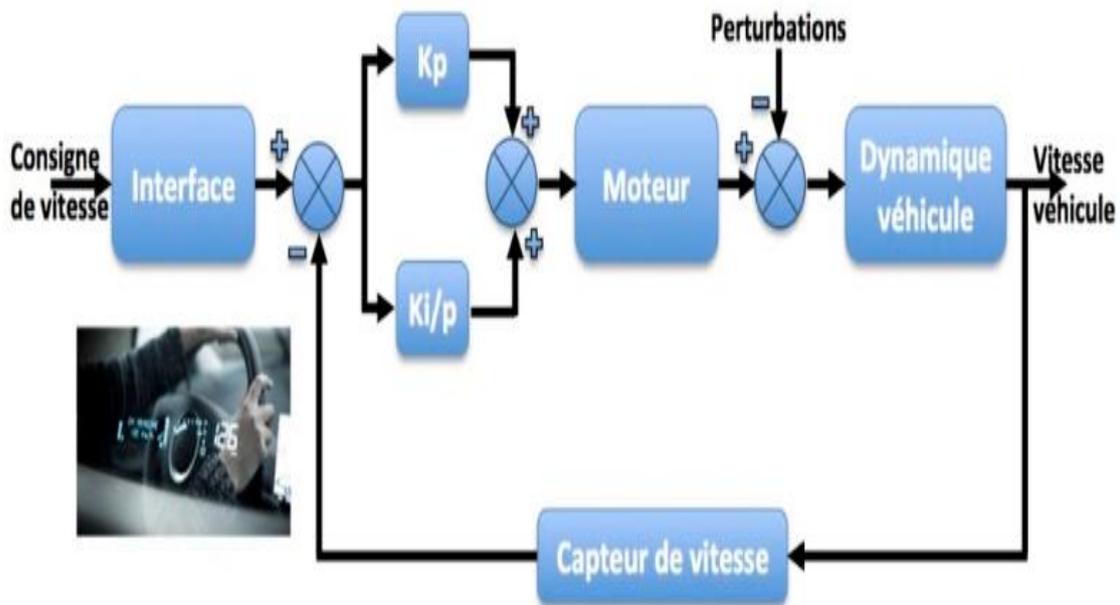




**Université Mohamed Khider, Biskra**  
**Faculté des Sciences et de la**  
**Technologies**  
**3<sup>ème</sup> Année Electrotechnique**  
**(Génie Electrique)**



**Support du cours**



**Module : Systèmes Asservis**

**Préparé par : Dr Naima RAHOUA**  
**Email : [naima.rahoua@univ-biskra.dz](mailto:naima.rahoua@univ-biskra.dz)**

**Année Universitaire : 2023/2024**

## **Sommaire :**

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes asservis

Chapitre 2 : Modélisation des systèmes

Chapitre 3 : Réponses temporelles des systèmes linéaires

Chapitre 4 Réponses fréquentielles des systèmes linéaires

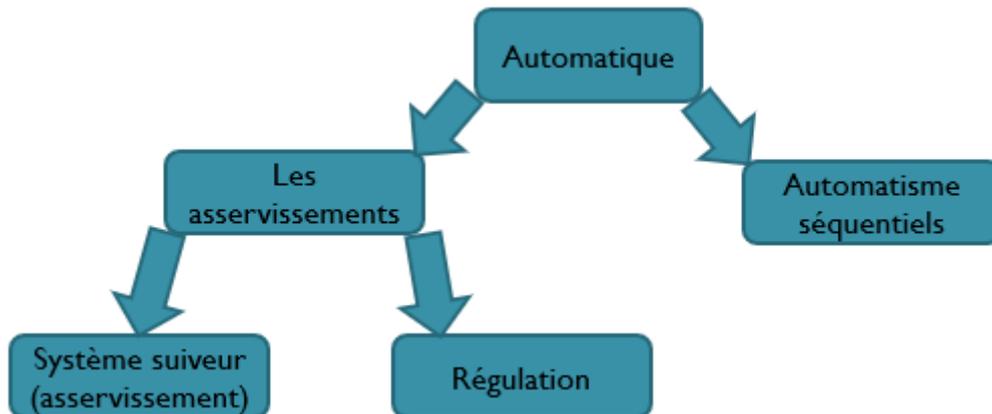
Chapitre 5 : Analyse des performances

*Chapitre 1 : Introduction aux système asservis*

## Chapitre 1 : Introduction aux système asservis

### 1/Définition

L'automatique est la discipline scientifique qui étudie la commande des systèmes sans intervention humaine. Elle se décompose en deux branches (Dans notre cours on s'intéresse à l'asservissement):



- **Asservissement:** poursuite de la sortie pour une **consigne variable**

Exemple1: missile qui poursuit une cible



- **Régulation:** compensation/rejet de perturbation pour une **consigne constante**

Exemple2: le réglage de la température dans une salle



**Remarque :** consigne(Entrée) c'est la valeur désirée de la sortie (imposé par l'opérateur humain)

2/Notion de système(procédé)

Un système est un mécanisme qui est composé de plusieurs composantes qui sont interconnectés entre eux pour réaliser une ou plusieurs tâches. C'est un procédé physique de nature quelconque(électrique , mécanique , hydraulique...etc ) il communique avec l'extérieur par l'intermédiaire des signaux(entrée et de sortie), le système peut être monovariable (S.I.S.O) ou multivariable(M.I.M.O),on les schématisme comme suit:

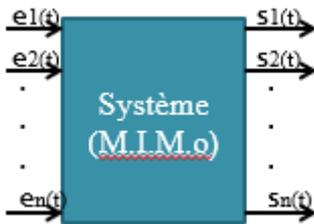


Fig1: Système multivariable

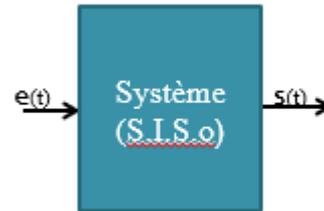
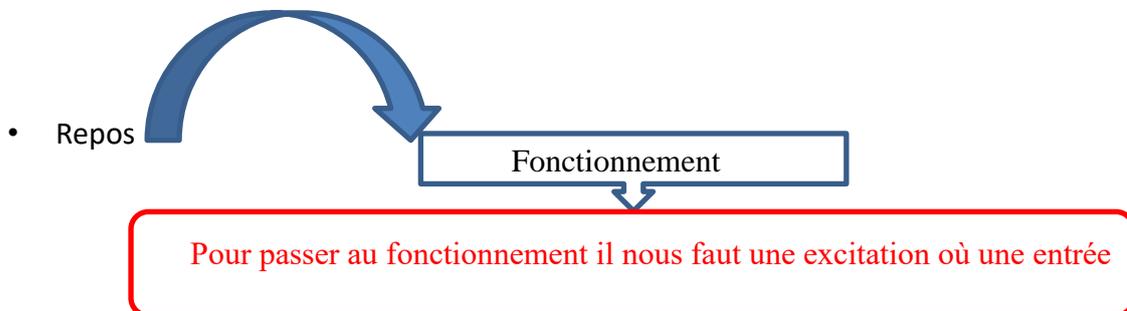


Fig2: Système monovariable

Exemple3:



**Remarque**

Entrée: signaux d'excitation , perturbation  
 Sortie: réponse du système

### 3/ classification des systèmes

Il existe plusieurs types de systèmes qui se caractérisent par la forme de leur équation telque:

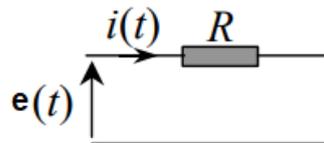


**Fig3:** Classification des systèmes

#### a/ système statique

La réponse du système à une excitation est instantanée ,tel que la sortie  $y(t)$  à l'instant  $t$  ne dépend que de l'entrée  $e(t)$  au même instant. Il est sans mémoire puisque le passé n'influe pas .

**Exemple:**



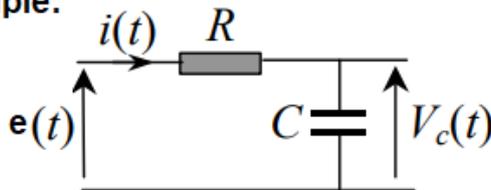
Equation

$$y(t) = i(t) = \frac{1}{R} e(t)$$

#### b/ système dynamique

La réponse est fonction de l'excitation et des réponses passées

**Exemple:**



Equation

$$RC \dot{y}(t) + y(t) = e(t)$$

avec  $y(t) = V_c(t)$

On peut classifié les systèmes dynamiques tels que (continu , discret , linéaire, non linéaire , invariant.... etc).

Alors dans ce cours, on s'intéresse aux système linéaire continu ,invariants dans le temps (SLCI).

✓ Système linéaire: Un système est dit linéaire si la fonction qui le décrit est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de proportionnalité et de superposition:

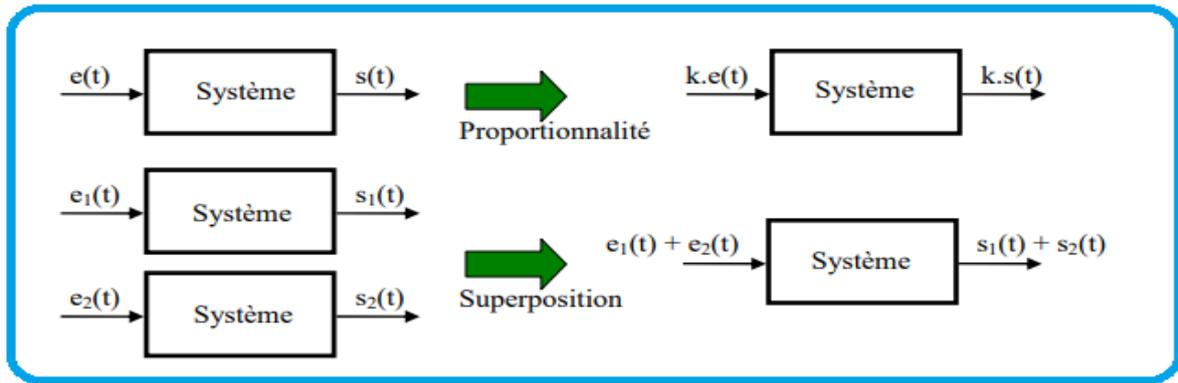


Fig4:Principe de superposition et de proportionnalité

Exemple :

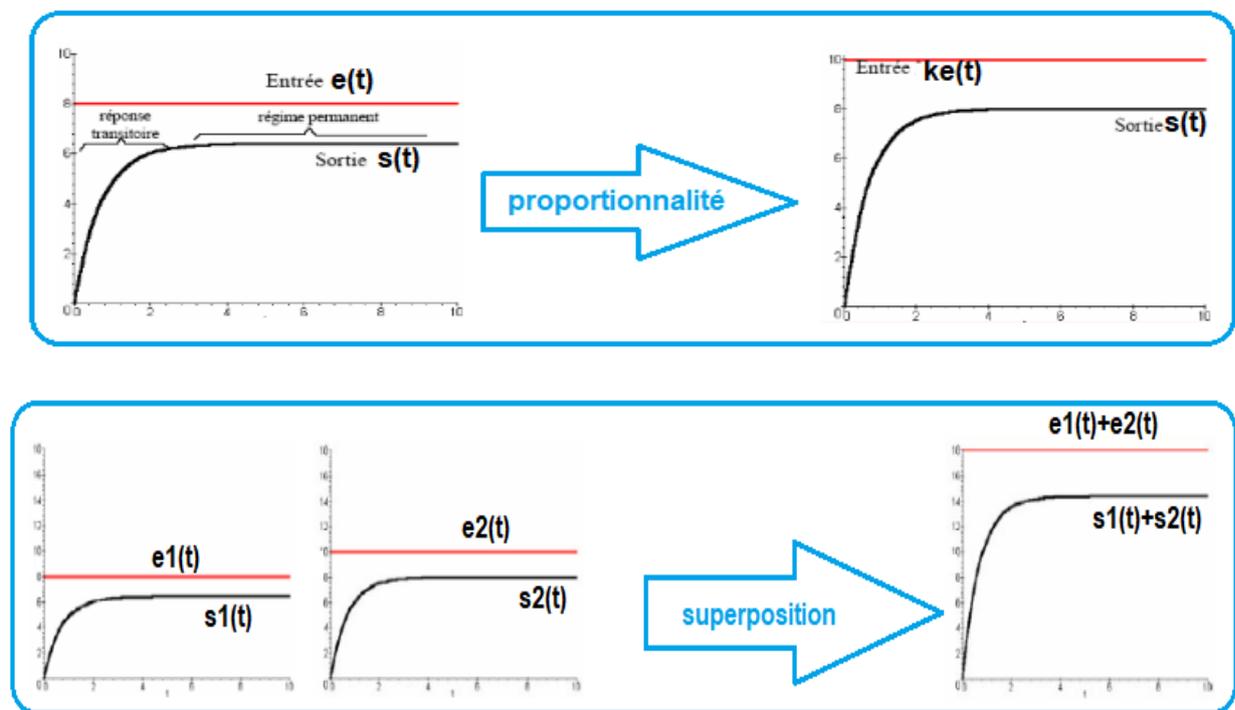
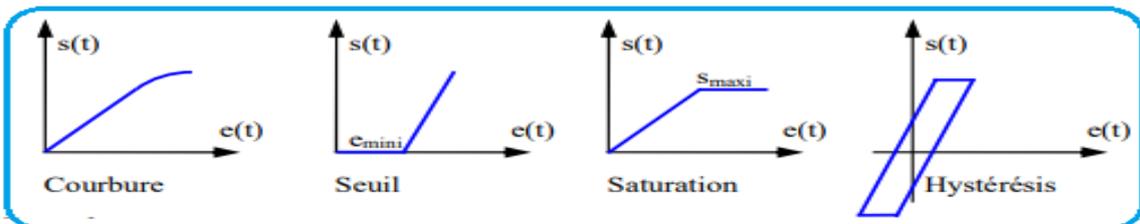


Fig5:Principe de superposition et de proportionnalité (sous matlab)

Remarque: en réalité aucun système n'est parfaitement linéaire



- ✓ Système continu: l'information circule à tout instant de façons continue

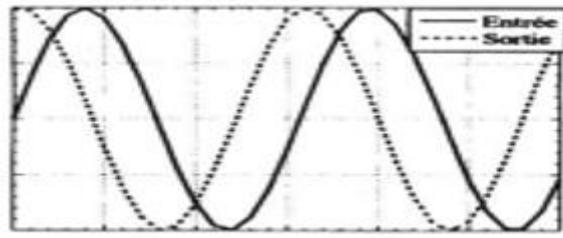


Fig6: Système continu

- ✓ Système invariant dans le temps : Un système est dit invariant si on suppose que les caractéristiques du système (masse, dimensions, résistance, impédance, ...) ne varient pas au cours du temps ("le système ne vieillit pas")

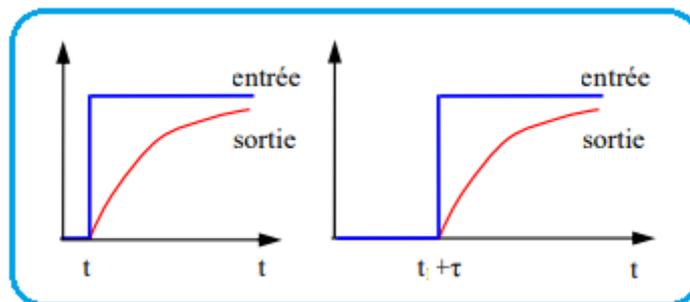
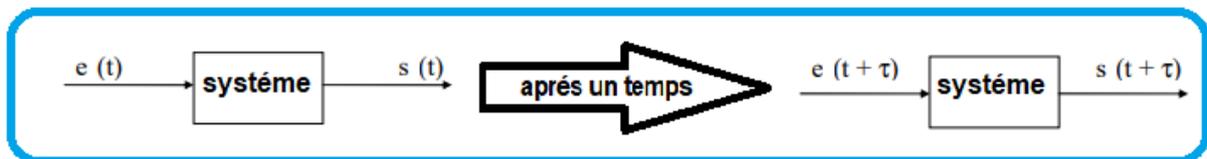


Fig7: Système invariant dans le temps

Système causal: Un système d'entrée et de sortie est dit causal si  $\forall t < 0, e(t) = 0 \Rightarrow s(t) = 0$ . La réponse du système ne précède jamais son excitation.

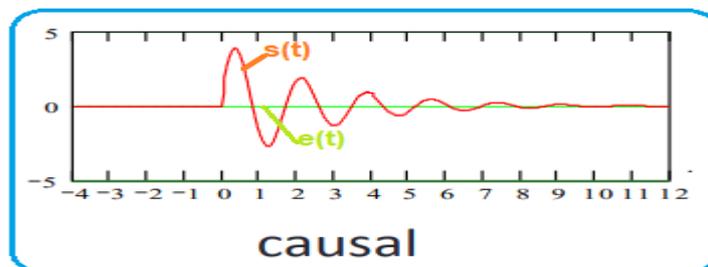


Fig8: Système invariant dans le temps

**Remarque:**

Un système est dit linéaire si l'équation liant la sortie à l'entrée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. La forme générale de cette équation différentielle est :

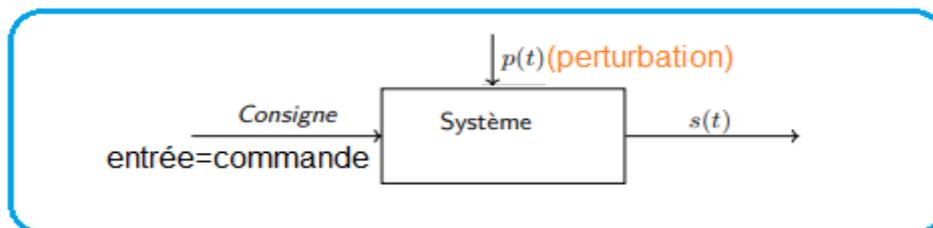
$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

**4/ Structure d'un système de commande**

Il existe deux solutions pour commander un système

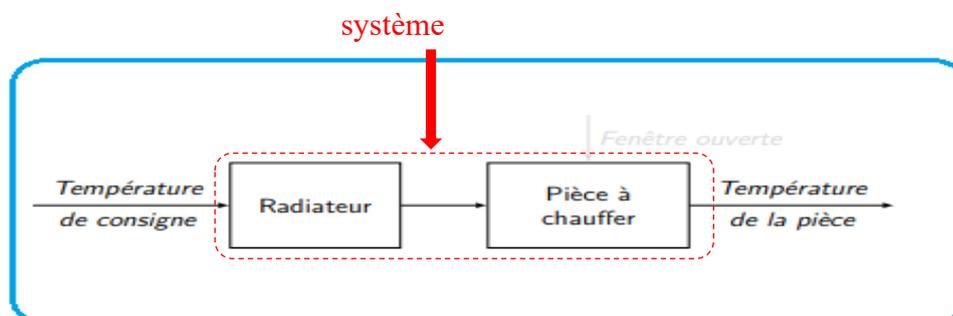
**a/commande en boucle ouverte(B.O)**

Un système de commande en boucle ouverte est un système où le signal de commande (entrée) est indépendant du signal de sortie. Ce système ne peut pas corriger pour des perturbation

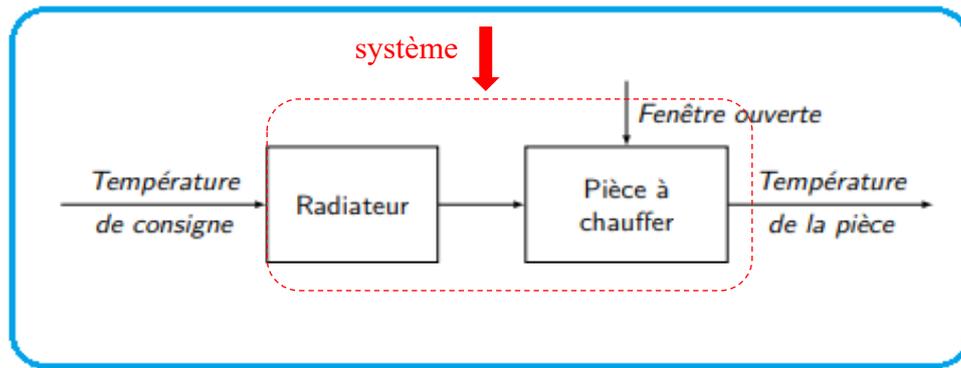


**Fig9:**Commande en Boucle Ouvert

Exemple: chauffage d'une pièce à 20°C



**Fig10 :** commande de la température d'une pièce en boucle ouvert (B.O)(sans perturbation)



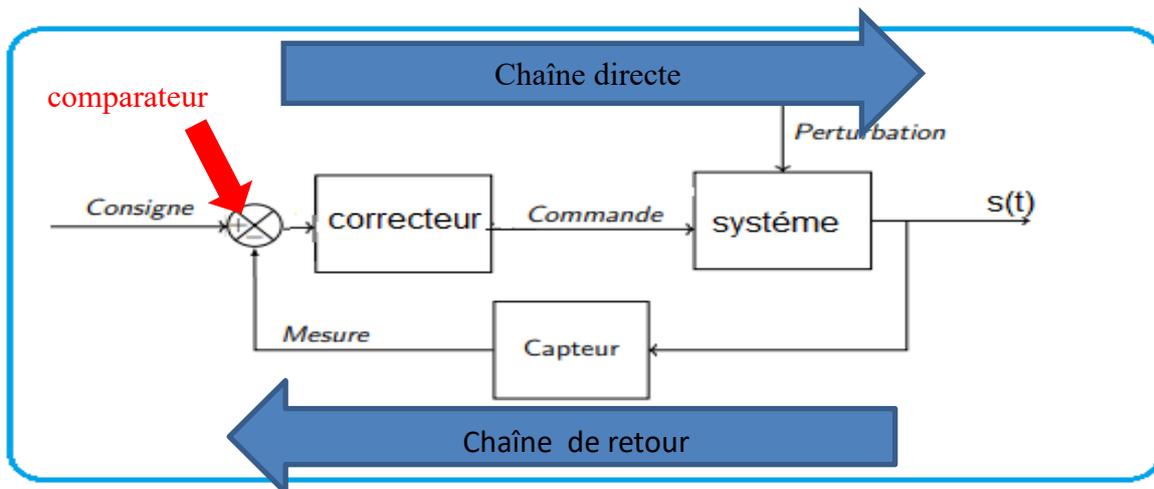
**Fig11** : commande de la température d’une pièce en boucle ouvert (B.O)(avec perturbation)

**b/commande en boucle fermée(B.F)**

Un système de commande en boucle fermée est un système où le signal de commande dépend d'une façon ou d'une autre du signal de sortie. Ce système est appelé aussi système bouclé où on dit qu'il y a une contre réaction entre la sortie et l'entrée.

Ce système est caractérisé par la présence de deux chaînes:

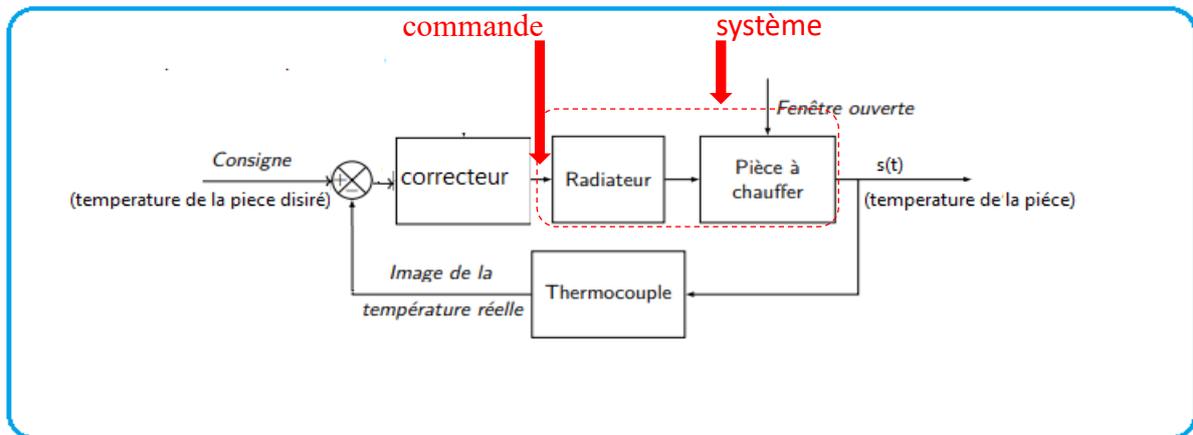
- Chaîne directe
- Chaîne de retour(contre réaction)



**Fig5** : commande en boucle fermée(B.F)

Exemple :

Chauffage d'une pièce à 20°C



**Fig6** : commande de la température d'une pièce en boucle fermée(B.F)

### 5/ Signaux de commande

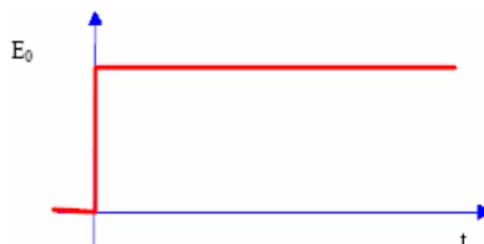
Pour analyser le comportement d'un système, on utilise un ensemble de signaux d'entrée (signaux type).

#### a/ Signal en Échelon

$$e(t) = E_0 \cdot u(t)$$

Avec  $u(t)$  fonction de Heaviside

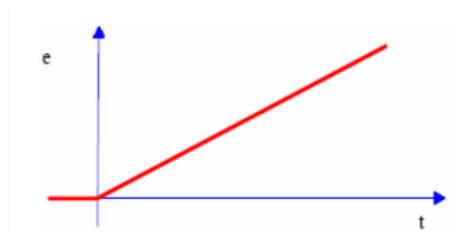
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$



Remarque: Cette fonction permet de soumettre un système à une entrée constante

**b/ Signal en Rampe**

$$e(t) = a.t.u(t)$$



**Remarque:** Ce signal permet d'analyser la réponse d'un système en poursuite

**c/ Impulsion de Dirac**

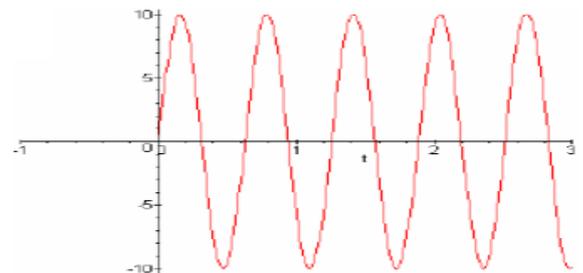
$$\forall t \neq 0, \delta(t) = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).dt = 1$$



**Remarque :** Ce signal permet de simuler l'effet d'une action s'exerçant durant un temps très bref (impulsion, choc)

**d/ Signal sinusoïdal**

$$e(t) = K.\sin(\omega.t).u(t)$$

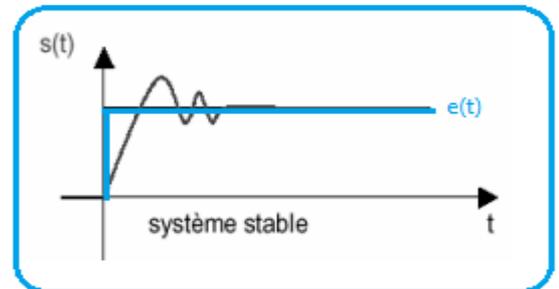
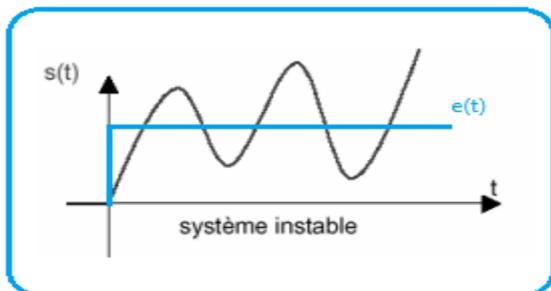


**Remarque:** Ce signal permet d'analyser la réponse fréquentielle d'un système

**6/performance des systèmes asservis**

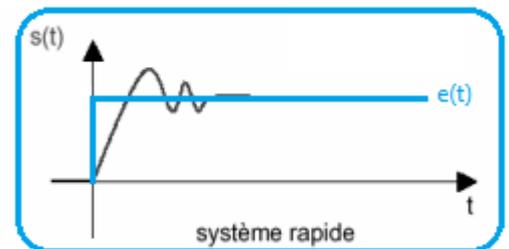
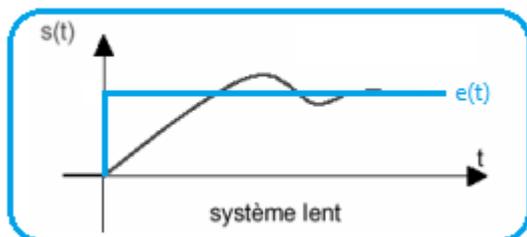
Il est caractérisé par certain nombre de performances tels que:

**a/ La stabilité:** un système est stable, lorsque celui-ci tend à revenir à sont état d'équilibre lorsqu'on lui applique une perturbation de courte durée.



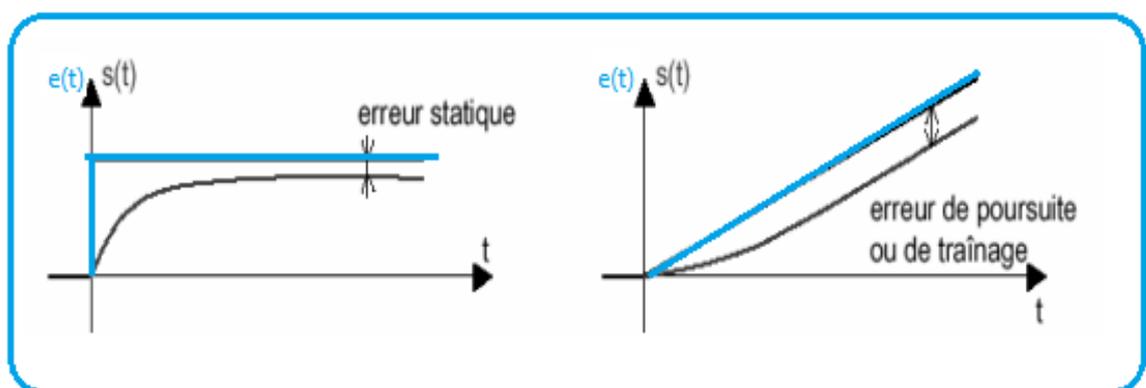
**b/ La rapidité**

La rapidité quantifie le temps de réponse du système.



**c/ La précision**

La précision quantifie l'erreur lorsque l'équilibre est atteint, avec  $e(t)$  et  $s(t)$  de même nature. Autrement, l'erreur est mesurée à la sortie du comparateur.



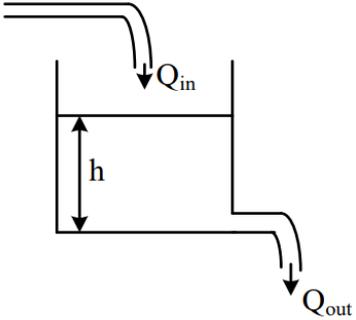
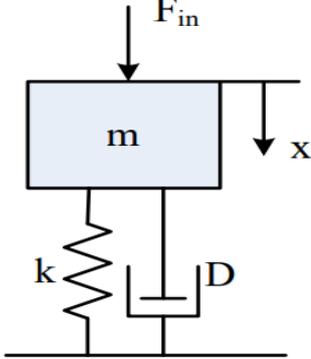
## **Chapitre 2. Modélisation des systèmes**

**Chapitre 2 : Modélisation des systèmes**

**1.Introduction**

Pour pouvoir analyser le comportement d'un système linéaire continu invariant dans le temps (SLCI), il est intéressant de disposer d'un modèle mathématique permettant de décrire son comportement dynamique. Pour modéliser ce dernier, il est nécessaire de déterminer une équation reliant l'entrée  $e(t)$  (ou les entrées) et la sortie  $s(t)$ . En effet, le but de la modélisation est de déterminer des équations de fonctionnement ou de comportement de notre système. Dans la majorité des cas, nous modélisons un système par des équations différentielles. La manipulation et la résolution d'équations différentielles étant complexe. Pour cela, nous allons introduire un outil mathématique puissant, qui est la transformation de Laplace.

**Exemple de modélisation :**

Niveau liquide	Equation
	$Q_{out} = k \cdot h \quad (k \text{ est une constante})$ $Q_{in} - Q_{out} = A \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow Q_{in} = A \cdot \frac{dh}{dt} + k \cdot h$
<p>Système masse / ressort / amortisseur</p> 	<p>Inertie : <math>F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}</math></p> <p>Ressort : <math>F = Dv = D \frac{dx}{dt}</math></p> <p>Amortisseur : <math>F = kx</math></p> <p>En combine ces équations on obtient :</p> $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{in} - kx - D \frac{dx}{dt}$

## 2. La transformation de la place

### 2.1 Définition

La transformée de Laplace (TL) est un outil essentiel dans la représentation des systèmes continus, elle trouve son application dans la représentation des fonctions des systèmes sous le nom de fonction de transfert, elle est définie par la relation :

Soit une fonction  $f(t)$ , fonction réelle de la variable  $t$ ,  $t \geq 0$

Sa transformée de Laplace est définie, sous réserve que l'intégrale soit convergente, par :

$$L\{f(t)\} = F(P) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^T f(t) \cdot e^{-Pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-Pt} dt$$

Tel que :  $P = \sigma + jw$ ,  $P \in \mathbb{C}$

$$L\{f(t)\} = F(P) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-Pt} dt$$

$P$  : la variable de laplace définie dans le plan complexe

**Exemple** : trouver la TL de la fonction  $f(t) = e^{-at}$

**Solution** :

$$\begin{aligned} F(P) &= \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-Pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-Pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(P+a)t} dt \\ &= \frac{-1}{P+a} e^{-(P+a)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{P+a} \end{aligned}$$

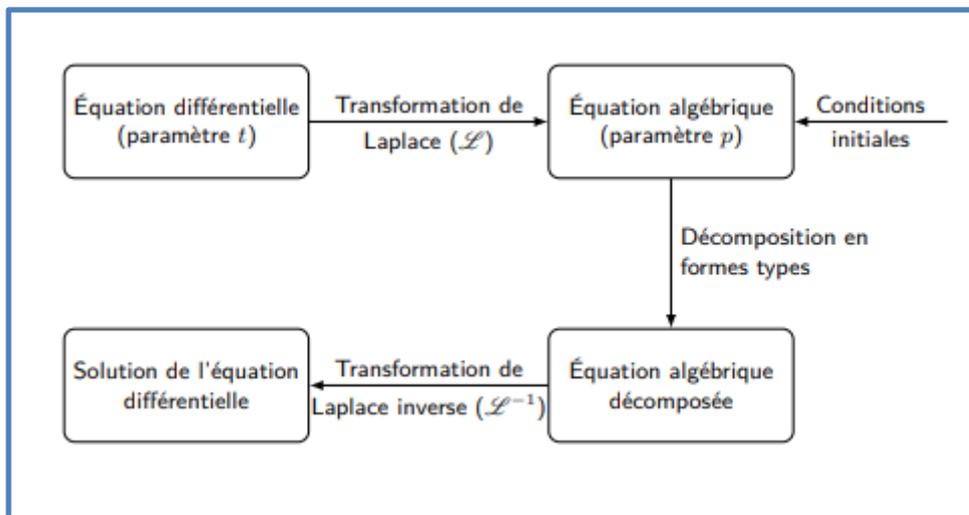
$$L\{e^{-at}\} = F(P) = \frac{1}{P+a}$$

### 2.2 La transformée inverse de Laplace

La transformée de Laplace (TL) fait passer le problème dans le domaine temporel au domaine complexe pour le résoudre, mais après la résolution du problème dans le domaine complexe, on cherche à avoir la solution dans le domaine temporel (le diagramme de la figure suivante illustre ce concept), d'où la nécessité de la transformée de Laplace inverse :

Soit  $F(P) = L\{f(t)\}$

$$f(t) = L^{-1}[F(P)] = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(P) \cdot e^{Pt} dP$$



**Fig1** : Concept de la transformée de Laplace

### 2.3 La TL des fonctions (signaux) usuels

#### a- La TL de l'échelon

$e(t) = 1$  pour  $t > 0$

$$E(P) = \int_0^{\infty} e(t)e^{-Pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-Pt} dt = \frac{-1}{P} e^{-Pt} = \frac{1}{P}$$

$$TL[e(t)] = E(P) = \frac{1}{P}$$

#### b- La TL d'une rampe

$r(t) = t$  pour  $t > 0$

$$R(P) = \int_0^{\infty} r(t)e^{-Pt} dt = \int_0^{\infty} te^{-Pt} dt = \frac{1}{P^2}$$

$$TL[r(t)] = R(P) = \frac{1}{P^2}$$

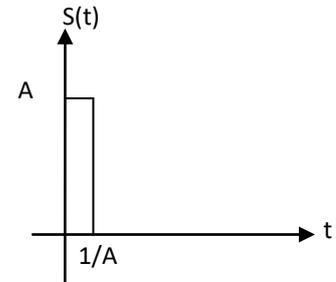
**c- La TL de l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$**

$$\delta(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} S(t)$$

$$\text{On a : } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$L\{\delta(t)\} = \delta(P) = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-Pt} dt = e^0 = 1$$

$$TL\{\delta(t)\} = \delta(P) = 1$$



**d- La TL de l'exponentielle décroissante**

$$f(t) = e^{-\frac{1}{T}t}$$

$$\begin{aligned} F(P) &= \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-Pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{T}t} \cdot e^{-Pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{T}+P)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1+TP}{T}\right)t} dt \\ &= \frac{-T}{1+TP} e^{-t\left(\frac{1+TP}{T}\right)} = \frac{T}{1+TP} \end{aligned}$$

$$TL\left\{f(t) = e^{-\frac{1}{T}t}\right\} = F(P) = \frac{T}{1+TP}$$

### Propriétés de la TL

Les principales propriétés de la transformée de Laplace sont présentées dans le Tableau 2.1.

**Tableau 2.1 :** Propriétés de la transformée de Laplace

Propriété	$f(t) , t \geq 0$	$F(P)$
Définition	$f(t)$	$F(P) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-Pt} dt$
Linéarité	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(P) + bF_2(P)$
Dérivation	$\frac{df(t)}{dt}$	$PF(P) - f(0)$
Dérivation d'ordre n	$\frac{df^n(t)}{dt^n}$	$P^n F(P) - P^{(n-1)} f(0) - P^{(n-2)} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
Intégration	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(P)}{P}$
Changement D'échelle	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{P}{a}\right)$
Multiplication par $t$	$tf(t)$	$-\frac{dF(P)}{dP}$
Multiplication par $t^n$	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(P)}{dP^n}$
Translation	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(P + a)$
Retard temporel	$f(t - a)$	$e^{-aP} F(P)$
convolution	$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(P)F_2(P)$

A ces propriétés, on doit joindre les théorèmes suivants :

**Valeur initiale :**  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} PF(P)$

**Valeur finale :**  $f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{P \rightarrow 0} PF(P)$

Une table résumée des Transformées de Laplace les plus usuelles est la suivante :

Tableau II.1 : Transformées de Laplace des fonctions les plus courantes

$f(t) , t \geq 0$	$F(P)$
$\delta(t)$	<b>1</b>
$\delta(t - a)$	$e^{-aP}$
<b>1 ou <math>e(t)</math></b>	$\frac{1}{P}$
$e(t - a)$	$\frac{1}{P} e^{-aP}$
<b><math>t</math> ou <math>r(t)</math></b>	$\frac{1}{P^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{P^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{P + a}$
$\frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{1}{P(P + a)}$
$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{P(1 + \tau P)}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(P + a)^2}$
$\frac{t}{\tau^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{(1 + \tau P)^2}$
<b>si n(<math>wt</math>)</b>	$\frac{w}{P^2 + w^2}$
<b>co s(<math>wt</math>)</b>	$\frac{P}{P^2 + w^2}$
$e^{-at} \text{si n}(wt)$	$\frac{w}{(P + a)^2 + w^2}$
$e^{-at} \text{co s}(wt)$	$\frac{P + a}{(P + a)^2 + w^2}$
<b><math>t \cdot \text{si n}(wt)</math></b>	$\frac{2wP}{(P^2 + w^2)^2}$
<b><math>t \cdot \text{co s}(wt)</math></b>	$\frac{P^2 - w^2}{(P^2 + w^2)^2}$

**Exemple 1:** calculer la TL de la fonction :

$$f(t) = e^{-4t} + \sin(t - 2) + te^{-2t}$$

Propriété de décalage :

$$L[\sin(t - 2)] = \frac{1}{p^2 + 1} e^{-2P}$$

$$L[e^{-4t}] = \frac{1}{p+4} \quad , \quad L[\sin t] = \frac{1}{p^2 + 1} \quad ,$$

$$L[te^{-2t}] = \frac{1}{(p+2)^2}$$

$$F_1(P) = \frac{1}{P + 4} + \frac{1}{P^2 + 1} e^{-2P} + \frac{1}{(P + 2)^2}$$

**Exemple 2 :** calculer la TL<sup>-1</sup> de la fonction

$$F_2(P) = \frac{P + 2}{P^2 + 4} e^{-P}$$

Par décomposition :

$$F_2(P) = \left( \frac{P}{P^2 + 4} + \frac{2}{P^2 + 4} \right) e^{-P} = \frac{Pe^{-P}}{P^2 + 4} + \frac{2e^{-P}}{P^2 + 4}$$

$$L^{-1} \left[ \frac{Pe^{-P}}{P^2 + 4} \right] = \cos 2(t - 1)$$

$$L^{-1} \left[ \frac{2e^{-P}}{P^2 + 4} \right] = \sin 2(t - 1)$$

Alors :

$$f_2(t) = \cos 2(t - 1) + \sin 2(t - 1) \quad , \quad \text{pour } t > 1$$

**Exemple 3 :** trouvez la TL de l'équation différentielle suivante puis Y(P) :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 \quad ; \text{ sachant que : } y(0) = -1 \quad \frac{dy}{dt} = y_0^{(1)} = 2$$

**Sol :**

$$L \left[ \frac{d^2y}{dt^2} \right] = P^2 Y(P) - Py(0) - y'(0)$$

$$L \left[ 3 \frac{du}{dt} \right] = 3(PY(P) - y(0)) = 3PY(P) - 3y(0)$$

$$L[2y(t)] = 2Y(P) \quad , \quad L[1] = \frac{1}{P}$$

On aura :

$$P^2 Y(P) - Py(0) - y'(0) + 3PY(P) - 3y(0) + 2Y(P) = \frac{1}{P}$$

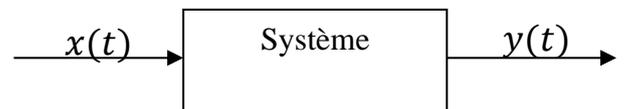
$$\begin{aligned}
 Y(P)[P^2 + 3P + 2] &= P y(0) + y'(0) + 3y(0) + \frac{1}{P} \\
 &= -P + 2 - 3 + \frac{1}{P} = -P + \frac{1}{P} - 1 = \frac{-P^2 - P + 1}{P} \\
 Y(P) &= \frac{-1}{P} \cdot \frac{P^2 + P - 1}{P^2 + 3P + 2}, \quad L^{-1}(Y(P)) = y(t)
 \end{aligned}$$

**Exemple 6 :** Soit le système suivant défini par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

La réponse du système pour une entrée  $x(t) = 10 e(t)$ , avec les conditions initiales :

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -10$$



La TL de l'équation du système

$$P^2Y(P) - P y(0) - y'(0) + 3PY(P) - 3y(0) + 2Y(P) = 10E(P)$$

$$P^2Y(P) - 2P + 10 + 3PY(P) - 6 + 2Y(P) = \frac{10}{P}$$

$$(P^2 + 3P + 2)Y(P) - 2P + 4 = \frac{10}{P}$$

$$(P^2 + 3P + 2)y(P) = \frac{10}{P} + 2P + 4 \rightarrow Y(P) = \frac{\frac{10}{P} + 2P + 4}{P^2 + 3P + 2}$$

### 3. Fonction de transfert

Soit un système (SLCI), donné par le schéma bloc suivant:



Si on suppose que le système n'a aucune énergie emmagasinée c'est-à-dire, conditions initiales nulles, alors on définit la fonction de transfert du système par la relation :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{de^i(t)}{dt^i}$$

La TL de l'équation :

$$\sum_{i=0}^n P^i a_i S(P) = \sum_{i=0}^m b_i P^i E(P)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i P^i}{\sum_{i=0}^n a_i P^i} = \frac{b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \dots + b_0}{a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad \text{avec } n > m$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes H(p) est appelé **fonction de transfert**

**Remarque : la relation entrée-sortie du système se met sous la forme:**

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

La fonction de transfert peut être exprimée sous sa forme canonique:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \cdot (1 + b_1 P + \dots + b_m P^m)}{P^\alpha (1 + a_1 P + \dots + a_n P^{n-\alpha})}$$

**Avec :**

**$\alpha$**  : classe du système

**n** : ordre du système

**K** : gain du système

**Exemple :**

$$H(p) = \frac{2 + 3p + 5p^2}{3p^2 + 4p^3 + 7p^5} \xrightarrow{\text{forme canonique}} H(p) = \frac{2}{3p^2} \frac{1 + \frac{3}{2}p + \frac{5}{2}p^2}{1 + \frac{4}{3}p^3 + \frac{7}{3}p^5} \Rightarrow \begin{cases} \text{ordre} = 5 \\ \text{classe} = 2 \\ \text{gain statique} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

En explicitant les racines (complexes éventuellement) de ces polynômes, H(p) peut s'écrire:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots \dots \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots \dots \dots (p - p_n)}$$

Ou :

- « **zéros** » **z<sub>i</sub>** : les racines de polynôme lorsque le numérateur égale à zéros(N(p)=0).
- « **pôles** » **p<sub>i</sub>** : les racines de polynôme lorsque le dénominateur égale à zéros(D(p)=0).

**Remarque: On représente par le symbole « × » les pôles d'un système, et par « o » ces zéros.**

**Exemple :**

$$H(p) = \frac{p + 3}{p^2 + 5p} = \frac{p + 3}{p(p + 5)}$$

$$\begin{cases} z_1 = -3 \\ p_1 = 0; p_2 = -5 \end{cases}$$

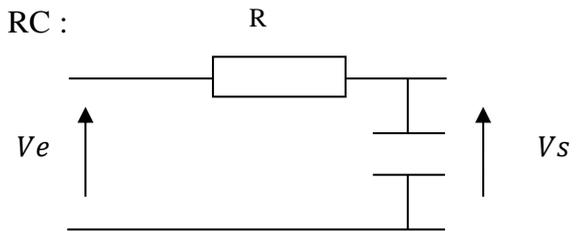
**Exemple 7 :** Soit le système suivant représenté par le circuit RC :

$$V_e(t) = R \cdot i(t) + V_s(t)$$

$$V_e(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{c} \int i(t) dt$$

$$V_s(t) = \frac{1}{c} \int i(t) dt \rightarrow i(t) = c \frac{dV_s(t)}{dt}$$

$$V_e(t) = RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) \rightarrow \frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{1}{RC} V_s(t) = \frac{1}{RC} V_e(t)$$



La TL :

$$PV_s(P) + \frac{1}{RC} V_s(P) = \frac{1}{RC} V_e(P)$$

$$\left(P + \frac{1}{RC}\right) V_s(P) = \frac{1}{RC} V_e(P) \rightarrow H(P) = \frac{V_s(P)}{V_e(P)} = \frac{1/RC}{P + 1/RC} = \frac{1}{1 + RCP}$$

**La réponse impulsionnelle du système :**  $h(t) = L^{-1}[H(P)] \rightarrow h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$

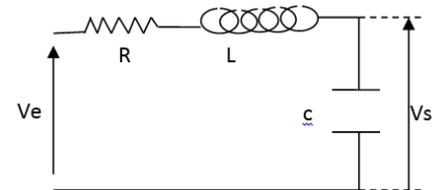
**Exemple 8 :** soit le circuit RLC suivant,

$$V_e(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_s(t)$$

$$V_s(t) = \frac{1}{c} \int i(t) dt \rightarrow i(t) = c \frac{dV_s(t)}{dt} \rightarrow \frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2V_s(t)}{dt^2}$$

$$V_e(t) = RC \frac{dV_s(t)}{dt} + LC \frac{d^2V_s(t)}{dt^2} + V_s(t)$$

$$V_e(t) = RC \frac{dV_s(t)}{dt} + LC \frac{d^2V_s(t)}{dt^2} + V_s(t) \rightarrow \frac{d^2V_s(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_s(t) = \frac{1}{LC} V_e(t)$$



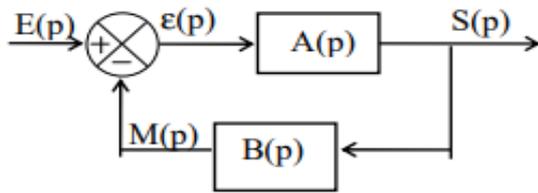
La TL :

$$P^2 \cdot V_s(P) + \frac{R}{L} P \cdot V_s(P) + \frac{1}{LC} V_s(P) = \frac{1}{LC} V_e(P)$$

$$\left(P^2 + \frac{R}{L} P + \frac{1}{LC}\right) V_s(P) = \frac{1}{LC} V_e(P) \rightarrow$$

$$H(P) = \frac{V_s(P)}{V_e(P)} = \frac{1/LC}{P^2 + \frac{R}{L} P + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{LCP^2 + RCP + 1}$$

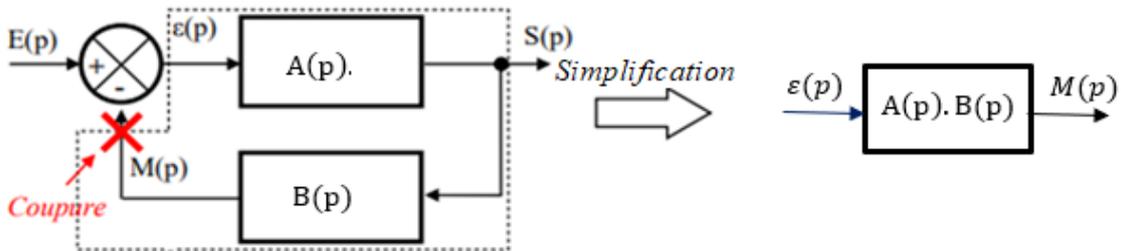
**3.1 Fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi FTBF :**



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)}$$

**3.2 Fonction de transfert en boucle ouverte FTBO:**

La *FTBO* est la fonction de transfert du système lorsqu'il est en boucle ouverte, c'est-à-dire lorsque l'on coupe fictivement la boucle au niveau du comparateur :



La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

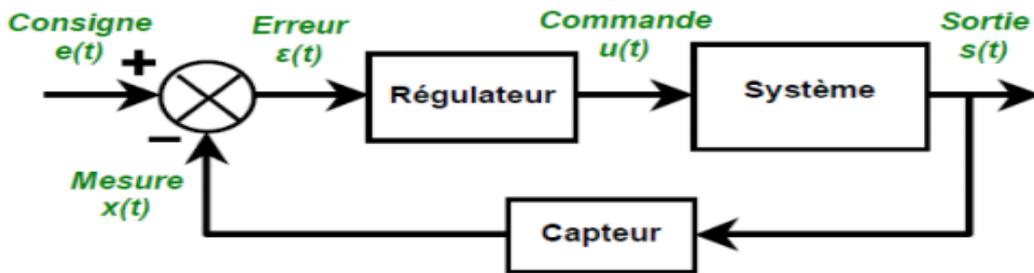
$$FTBO = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = A(p) \cdot B(p)$$

La fonction de transfert en boucle fermée pour un retour unitaire B(p)=1 s'écrit :

$$\frac{FTBO}{1 + FTBO}$$

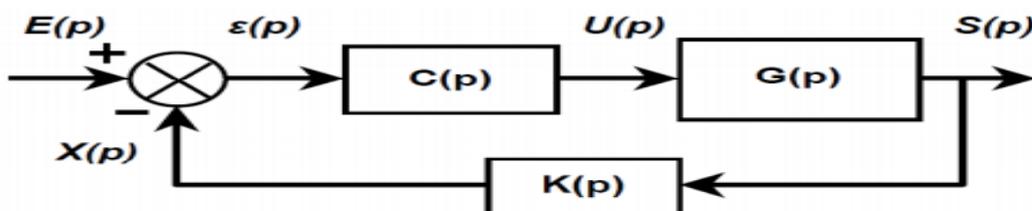
**4/ Simplification des schémas fonctionnels**

Le schéma bloc fonctionnel temporel d'un système asservi est de la forme générale suivante :



On peut donc voir qu'un système asservi comme un système complexe il est constitué de sous-systèmes plus simples chacun caractérisé par une fonction de transfert donnée.

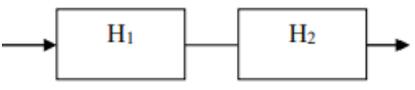
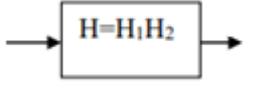
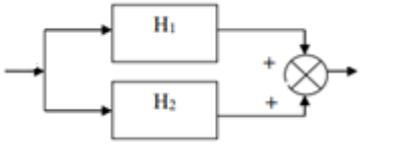
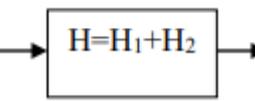
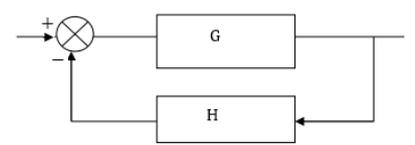
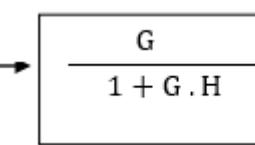
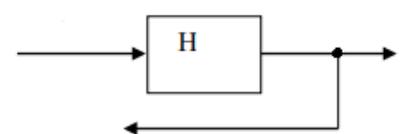
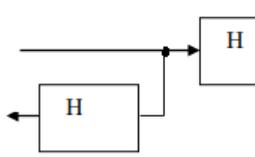
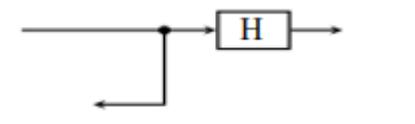
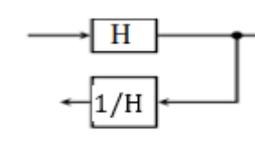
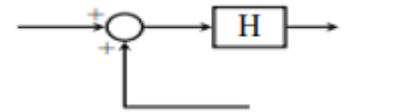
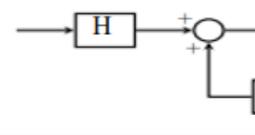
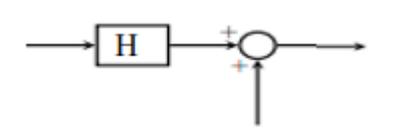
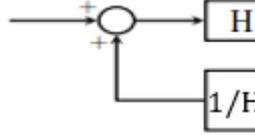
On peut donc tracer un nouveau schéma bloc associé aux Système asservis dans le domaine de La place :



#### Objectif de la simplification:

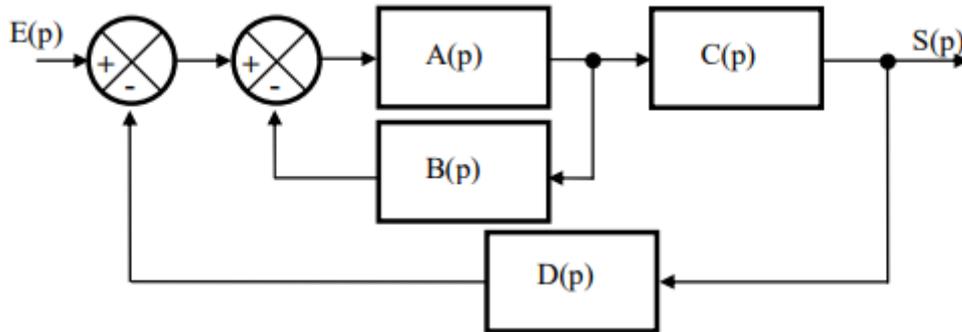
- ❖ définir une fonction de transfert global du système asservi définie par le rapport  $S(p)$  sur  $E(p)$ .
- ❖ Il faut pour cela être capable de simplifier le schémas bloc précédent.

Donc on peut simplifier ce schémas bloc en employant des transformations faciles à établir. A ce sujet, quelques règles courantes sont recensées dans le tableau suivant:

Transformation	original	Nouveau
Blocs en cascade (en série)		
Blocs en parallèle		
Élimination d'une boucle de retour. <b>Formule de Black</b>		
Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément		
Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément		
Déplacement d'un comparateur en amont d'un élément		
Déplacement d'un comparateur en aval d'un élément		

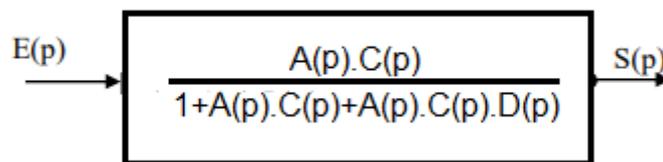
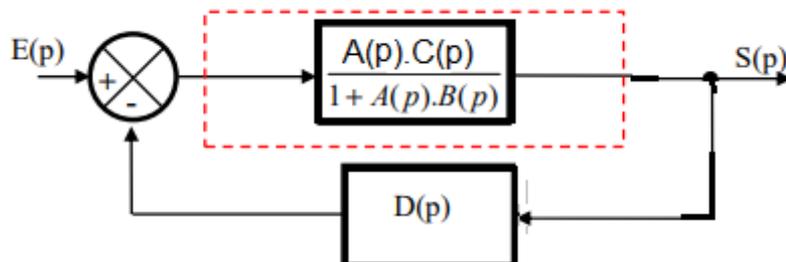
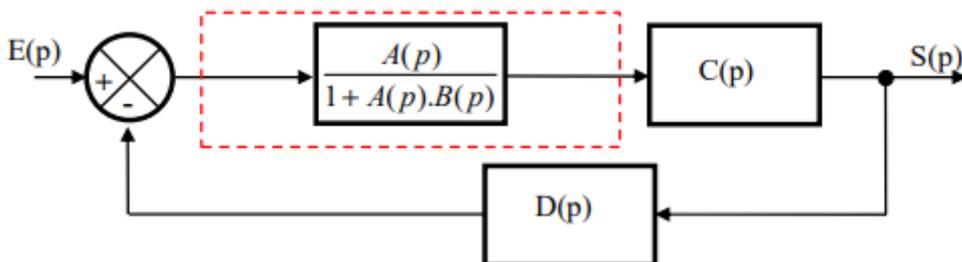
**Exemple 9 :**

Soit le schéma bloc suivant :



Calculer sa fonction de transfert S/E ?

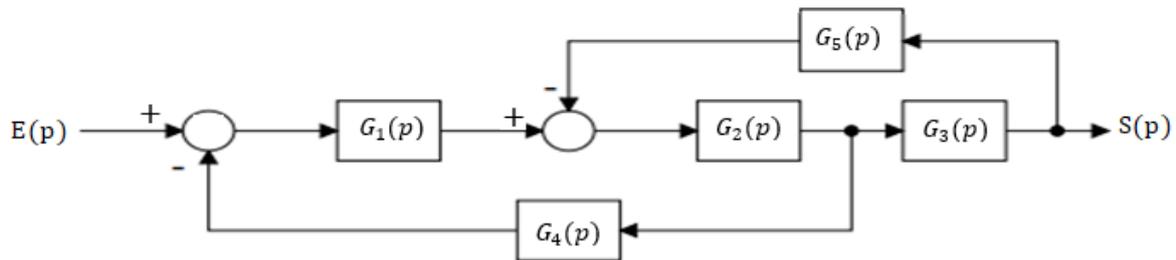
Solution :



$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p).C(p)}{1 + A(p).C(p) + A(p).C(p).D(p)}$$

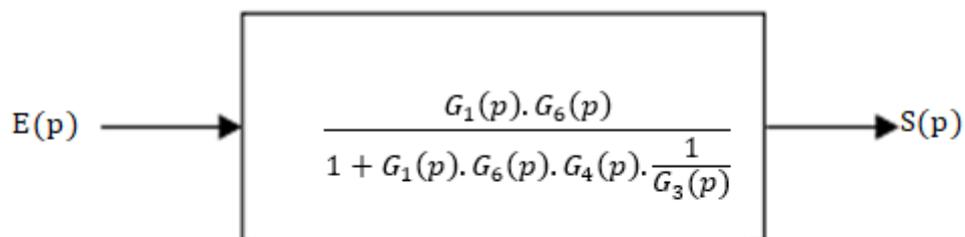
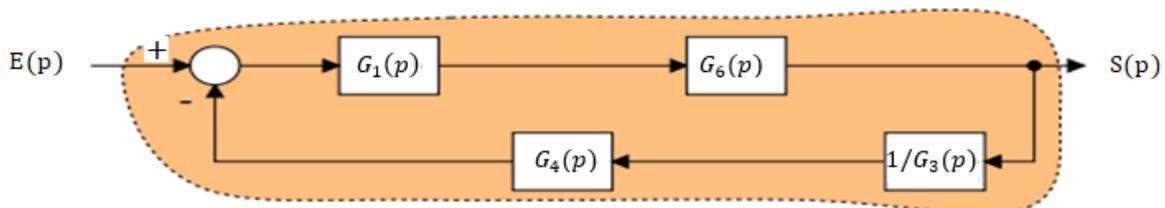
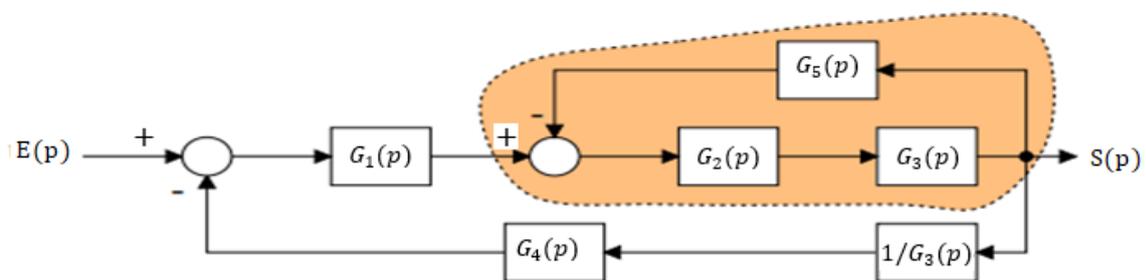
Exemple 10 :

Soit le schéma bloc suivant :



Calculer sa fonction de transfert S/E ?

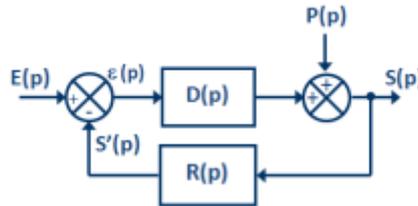
Solution :



$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_1(p) \cdot G_6(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_6(p) \cdot G_4(p) \cdot \frac{1}{G_3(p)}}$$

✚ Principe de superposition

Il arrive que la modélisation de certains systèmes fasse intervenir plusieurs entrées. C'est majoritairement le cas de la prise en compte de perturbations (frottements, bruits parasites, couple résistive...)



$$H_1(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \text{ avec } P(p) = 0$$

$$H_2(p) = \frac{S(p)}{P(p)} \text{ avec } E(p) = 0$$

$$S(p) = H_1(p) \times E(p) + H_2(p) \times P(p)$$

La réponse d'un système à plusieurs entrées est la somme de la réponse du système à chacune des entrées en supposant toutes les autres nulles.

Remarque : attention au signe du comparateur

## **Chapitre 3. Réponses temporelles des systèmes linéaires**

## Chapitre 3 : Réponses temporelles des systèmes linéaires

### 1.Introduction

On veut caractériser le système d'une part par leur fonctions de transfert et , d'autre part, par leur comportement. Ce dernier peut être mis en évidence par sa réponse qui correspond à la forme du signal de sortie  $s(t)$  lorsque le système est excité par un signal d'entrée connu  $e(t)$ . On distingue plusieurs types de réponse selon le signal d'entrée.

Nous utiliserons à cet effet les signaux test en entrée:

- L'impulsion : réponse impulsionnelle
- L'échelon : réponse indicielle
- La rampe : la réponse à une entrée rampe
- La sinusoïde : réponse fréquentielle

Dans ce cours nous allons étudier les systèmes du premier et du second ordre.

### 2/ Les différentes entrées classiques

#### ❖ L'échelon:

Cette fonction est définie par:  $f(t) = E_0, \forall t > 0$  et  $f(t) = 0 \forall t \leq 0$

Sa transformation de la place est  $F(p) = \frac{E_0}{p}$ , on appelle échelon unitaire la fonction

dont la TL est:  $\frac{1}{p}$  ( $E_0=1$ )

#### ❖ La rampe:

La rampe de pente  $a$  est la primitive de l'échelon de hauteur  $a$ . Elle est définie par :

$\forall t > 0, f(t) = a.t$  et  $\forall t \leq 0, f(t) = 0$

Sa transformée de la place est définie par :  $F(p) = \frac{a}{p^2}$

On peut définir également la rampe unitaire: la rampe de pente 1

#### ❖ L'impulsion :

L'impulsion unité est, dans l'espace des distributions, la dérivée de l'échelon unitaire.

On l'appelle aussi impulsion de Dirac.

On la note généralement  $\delta(t)$ . Sa transformée de la place est :  $TL[\delta(t)]=1$

### 3/ Système du premier ordre

On appelle un système de premier ordre tout système régi par une équation différentielle linéaire à coefficient constants de la forme suivantes :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + k s(t) = k e(t)$$



Avec :  $\tau$  constant de temps ( $> 0$ ) en seconde, et  $k$  gain statique du système.

La fonction de transfert de ce système est :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p}$$

#### a/Réponse Impulsionnelle:

On étudie la réponse du système à une entrée  $e(t) = \delta(t)$ . On a donc la T.L de l'entrée :  $E(p)=1$

L'expression de la sortie du système est :

$$S(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$$

La sortie temporelle  $s(t)$  correspondante s'écrit :

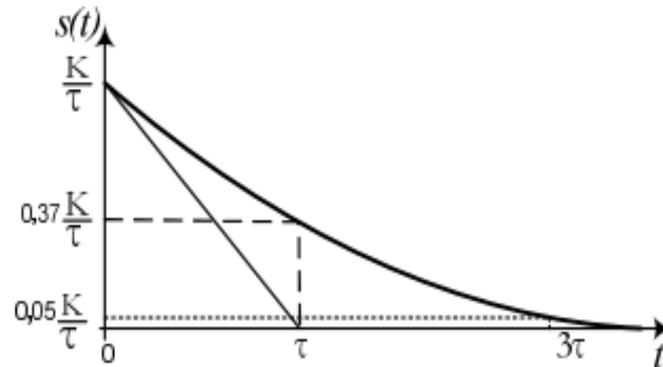
$$s(t) = TL^{-1} \left\{ \frac{k}{1 + \tau p} \right\} = TL^{-1} \left\{ \frac{k}{\tau} \times \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right\}$$

$$s(t) = \frac{k}{\tau} TL^{-1} \left\{ \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right\}$$



$$s(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ pour } t \geq 0$$

La représentation graphique de la réponse impulsionnelle d'un système de premier ordre est donnée par la figure ci-dessous :



**Fig5 :** Réponse impulsionnelle d'un système de premier ordre

➤ Point de départ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pS(p) = \frac{k}{\tau} \quad [\text{théorème de la valeur initial}]$$

➤ Point d'arriver :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = 0 \quad [\text{théorème de la valeur final}]$$

### b/Réponse Indicielle:

La réponse indicielle d'un système est sa réponse quand un échelon d'amplitude  $E_0$  est appliqué à son entrée. Dans ce cas on a la T.L de l'entrée :  $E(p) = \frac{E_0}{p}$

L'expression de la sortie du système est :

$$S(p) = \frac{E_0}{p} \times \frac{k}{1 + \tau p} = \frac{\frac{E_0 k}{\tau}}{p \left( p + \frac{1}{\tau} \right)}$$

Nous avons deux pôles ( $p = 0$  et  $p = -\frac{1}{\tau}$ ), alors  $S(p)$  s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{\tau}} = \frac{kE_0}{p} - \frac{kE_0}{p + \frac{1}{\tau}}$$

La sortie temporelle correspondante  $s(t)$  s'écrit :

$$s(t) = TL^{-1} \left\{ \frac{kE_0}{p} - \frac{kE_0}{p + \frac{1}{\tau}} \right\}$$



$$s(t) = kE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ pour } t \geq 0$$

La courbe correspondante est donnée par la figure ci-dessous

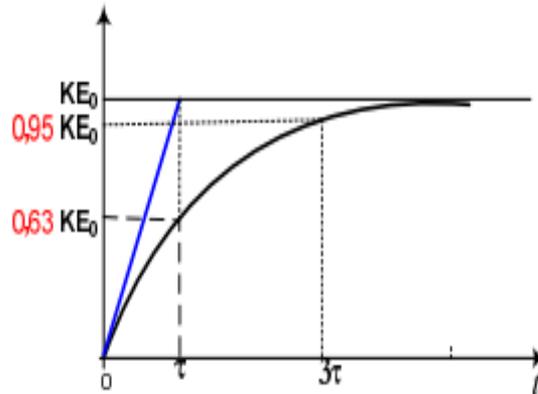


Fig6: Réponse indicielle d'un système de premier ordre

Sur le tracé ci-dessous, on peut noter :

- Point de départ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pS(p) = 0 \quad [\text{théorème de la valeur initial}]$$

- Point d'arriver :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = kE_0 \quad [\text{théorème de la valeur final}]$$

- $y(\tau) = 0.632 kE_0$

- temps de montée  $\approx 2\tau$

- temps de montée à 5%  $\approx 3\tau$

- la tangente à l'origine à une pente de  $\frac{kE_0}{\tau}$

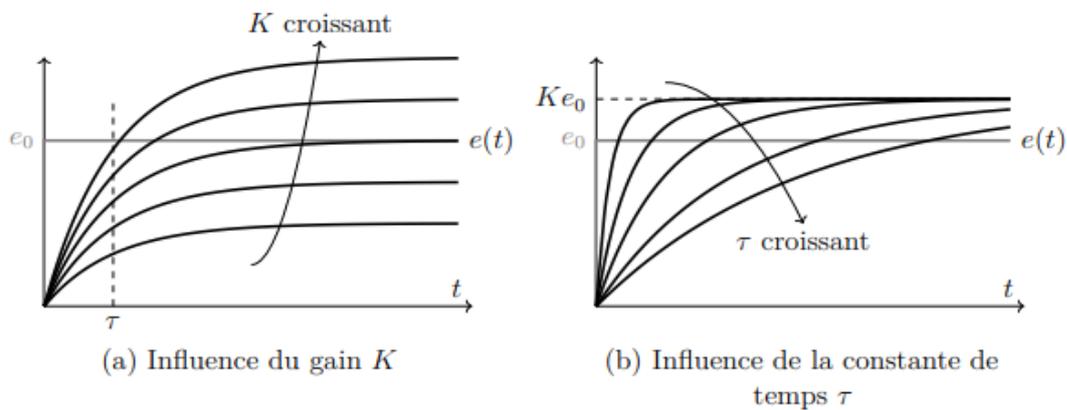
Remarque :

le gain statique  $k$  s'obtient par le rapport de la variation du signal de sortie par la variation du signal d'entrée (quand  $t$  tend vers l'infini) :

$$k = \frac{\Delta s(t)}{\Delta e(t)}$$

- ✚ Il est important de remarquer que plus  $\tau$  est faible, plus le système est rapide

- ✚ Ainsi que plus  $k$  est croissante la valeur finale augmente.



**Fig7:** Influence du gain  $k$  et de la constante de temps  $\tau$  d'un système premier ordre sur sa réponse indicielle

**c/ Réponse à une rampe:**

Si un système du premier ordre, de gain  $k$  et de constante de temps  $\tau$ , est excité par un signal d'entrée de type rampe de la forme  $e(t) = E_0 t u(t)$ . On a donc la T.L de l'entrée :  $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

L'expression de la sortie du système est :

$$S(p) = \frac{E_0}{p^2} \times \frac{k}{1 + \tau p} = \frac{\frac{E_0 k}{\tau}}{p^2 \left( p + \frac{1}{\tau} \right)}$$

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{\left( p + \frac{1}{\tau} \right)} = \frac{-\tau E_0 k}{p} + \frac{E_0 k}{p^2} + \frac{\tau E_0 k}{\left( p + \frac{1}{\tau} \right)}$$

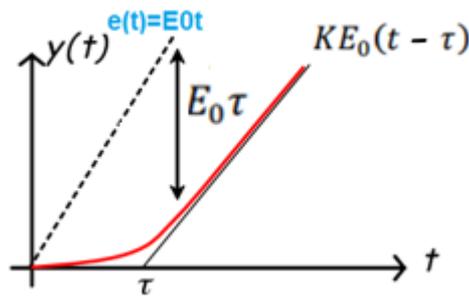
Le signal temporel correspondant s'écrit :

$$s(t) = TL^{-1} \left\{ \frac{-\tau E_0 k}{p} + \frac{E_0 k}{p^2} + \frac{\tau E_0 k}{\left( p + \frac{1}{\tau} \right)} \right\}$$



$$s(t) = kE_0 \left( t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ pour } t \geq 0$$

La courbe correspondante est donnée par la figure ci-dessous :



**Fig8:**Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- En régime permanent ( $t \gg \tau$ ) on a  $y(t) = kE_0(t - \tau)$  : la sortie tend vers une rampe de pente :  $kE_0$ .
- Pour  $k = 1$ ,  $y(t)$  suit la rampe d'entrée avec un retard  $\tau$ , la différence entre l'entrée et la sortie est appelée erreur de trainage, et vaut  $\varepsilon_t = E_0\tau$
- Pour  $k \neq 1$ , les pentes étant différentes,  $\varepsilon_t$  tend vers l'infini (divergence)

#### 4. Système de second ordre

Un système est dit du second ordre s'il est régi par une équation différentielle de second ordre de la forme :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{ds(t)}{dt} + \omega_n^2 s(t) = k\omega_n^2 e(t)$$

Avec :

**k** : le gain statique,  $\xi$  le facteur ou coefficient d'amortissement et  $\omega_n$  la pulsation naturelle

Après la transformation de la place on a :

$$H(p) = \frac{k}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}} = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

#### Remarque

**Les pôles sont les racines du polynôme:  $p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2$  /  $\Delta' = \omega_n^2 (\xi^2 - 1)$**

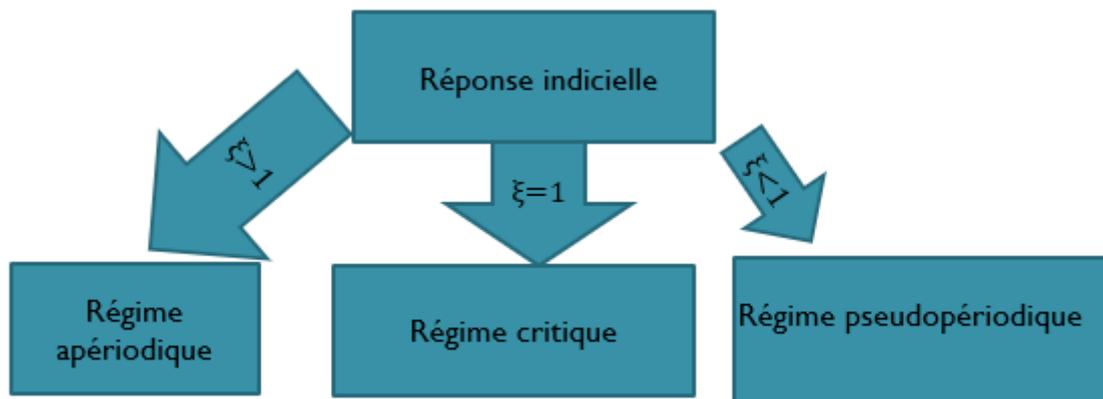
Si on cherche les pôles de la fonction de transfert, on distingue 3 cas possibles :

$$\xi > 1 \Rightarrow \Delta' > 0 : \text{ dans ce cas les pôles sont réelles } < 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \\ p_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \end{cases}$$

$$\xi = 1 \Rightarrow \Delta' = 0 : \text{ Les deux pôles sont égaux et réels } < 0 \Rightarrow \{ p_{1,2} = -\omega_n$$

$$\xi < 1 \Rightarrow \Delta' < 0 : \text{ Les deux pôles sont des complexes conjugués, à partie réelle négative } \Rightarrow \begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \\ p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \end{cases}$$

**b. Réponse indicielle**



**b.1 Régime apériodique (ξ > 1)**

L'entrée appliquée est un échelon d'amplitude  $E_0$  sa T.L  $E(p) = \frac{E_0}{p}$

On a :

$$H(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Si on pose :  $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$  et  $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$

$$\text{Avec : } \begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \\ p_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \end{cases}$$

Aussi on peut écrire H(p) comme:

$$H(p) = \frac{k}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Ainsi S(p) devient comme suit:

$$S(p) = \frac{kE_0}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

La sortie temporelle correspondante  $s(t)$  après  $TL^{-1}$  de  $S(p)$  s'écrit :

$$s(t) = TL^{-1} \left\{ \frac{kE_0}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \right\}$$



$$s(t) = kE_0 \left( 1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right) \quad t > 0$$

### b.2 régime critique ( $\xi=1$ )

$$S(p) = \frac{kE_0}{p(1 + \tau p)^2} \quad \text{avec : } \tau = \frac{1}{\omega_n}$$

La sortie temporelle  $s(t)$  correspondante s'écrit :

$$s(t) = TL^{-1} \left\{ \frac{kE_0}{p(1 + \tau p)^2} \right\}$$



$$s(t) = kE_0 (1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}) \quad t > 0$$

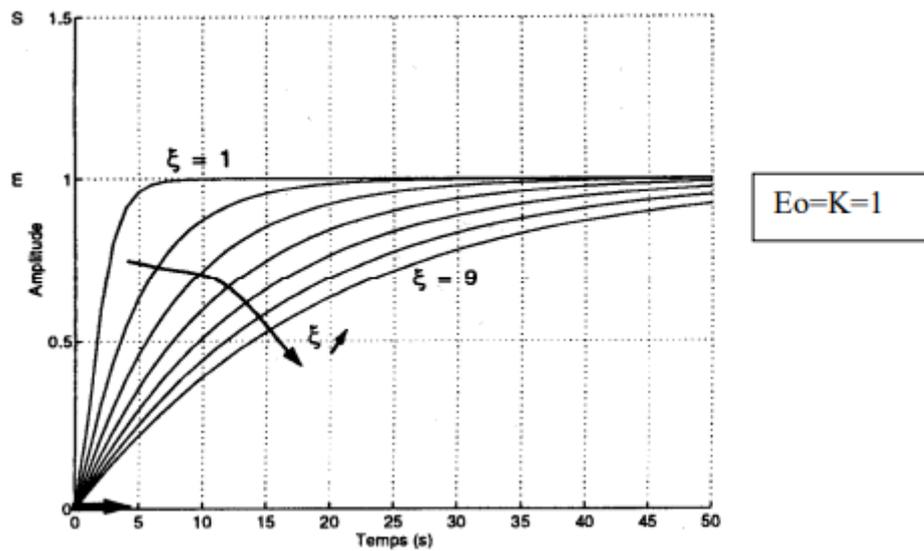


Fig9: Réponse indicielle d'un second ordre pour

**Remarque: C'est un cas particulier des systèmes apériodique il est plus rapide**

**b.3 Régime pseudopériodique(ξ < 1)**

$$H(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Avec :  $\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \\ p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \end{cases}$

La sortie temporelle s(t) correspondante après décomposition s'écrit :

$$s(t) = TL^{-1} \left\{ \frac{k\omega_n^2}{p(p - p_1)(p - p_2)} \right\}$$

↓

$$s(t) = kE_0 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \varphi) \right]$$

Où :  $\begin{cases} \cos(\varphi) = \xi \\ \sin(\varphi) = \sqrt{1 - \xi^2} \end{cases}$

La courbe correspondante est donnée par la figure ci-dessous :

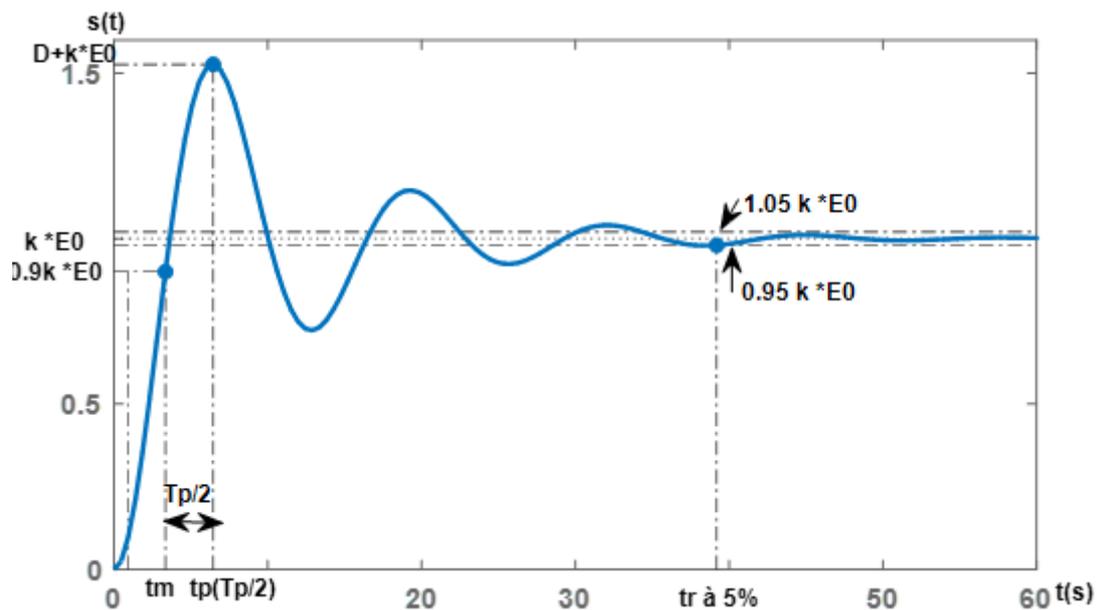


Fig10:: Réponse indicielle d'un second ordre à faible amortissement

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- À l'origine, la tangente est horizontale.
- Le régime permanent est caractérisé par :  $S_p(t) = KE_0$
- La pulsation propre amortie (pseudo-pulsation) :  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$
- La pseudo période des oscillations :  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$
- Le temps de montée :  $t_m = \frac{T_p}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right)$  Par approximation  $t_m \approx \frac{1.8}{\omega_n}$
- Le temps de pic (instant du premier dépassement):  $t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$
- Le premier dépassement à l'instant  $t_p$ :  $D_1\% = 100 \frac{s_{max} - s_{\infty}}{s_{\infty}} = 100 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$
- Le temps de réponse  $t_r$ : c'est le temps requis pour atteindre le régime définitif à 5%

Des approximations

$$\begin{cases} \text{pour } \xi \ll 1 \rightarrow t_r = \frac{3}{\omega_n \xi} \\ \text{pour } \xi \gg 1 \rightarrow t_r = 6\xi/\omega_n \end{cases}$$

**c/Réponse à une rampe**

L'entrée est une rampe de pente  $a$ ,  $E(p) = \frac{a}{p^2}$

On déduit la sortie:  $S(p) = \frac{ka}{p^2(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)}$

➤ Pour  $\xi > 1$ :  $s(t) = ka \left( 1 - \tau_1 - \tau_2 + \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$

➤ Pour  $\xi < 1$ :  $s(t) = ka \left( t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_p} \sin(\omega_p t + \varphi) \right)$

Avec:  $\varphi = 2 \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

Dans les deux cas, le régime stationnaire est une droite de pente  $(k.a)$ , dans le cas  $\xi < 1$  le régime est oscillant.

## **Chapitre 4. Réponses fréquentielles des systèmes linéaires**

## Chapitre 4 : Réponses fréquentielles des systèmes linéaires

### 1- Définition

L'analyse fréquentielle d'un système s'intéresse à sa réponse à une sollicitation périodique. Elle permet de prévoir son comportement en régime permanent lorsqu'il est soumis à des entrées sinusoïdales. Considérons un système linéaire d'ordre quelconque avec une entrée sinusoïdale ( $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$ ) et une sortie ( $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$ ).

L'analyse harmonique (fréquentielle) de ce système consiste à faire le lien entre la fonction de transfert et la réponse de ce système à une sinusoïde. Cette réponse sera caractérisée par deux paramètres :

- Gain =  $\frac{S_0}{E_0}$
- déphasage:  $\varphi$

Ces deux paramètres dépendent de la pulsation  $\omega$  de l'entrée :

$$\begin{cases} \text{Gain} = \frac{S_0}{E_0} = |G(j\omega)| \\ \varphi = \text{Arg}(G(j\omega)) \end{cases}$$

Où :  $G(j\omega)$  est l'expression de la fonction de transfert en BO dans laquelle on remplace la variable de Laplace "p" par "j $\omega$ "

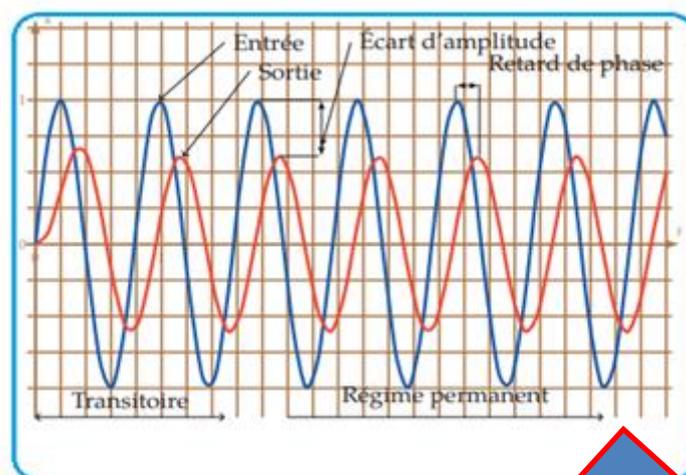


Fig1: Réponse Fréquentielle

Remarque: la réponse elle est en régime permanent

Il existe trois types de représentations graphiques du gain et du déphasage en fonction de la pulsation  $\omega$ :

a- **Bode**

Se présente sous la forme de deux courbes :

- $A_{dB}(\omega) = |G(j\omega)|_{dB}$  en fonction de  $\omega$  (abscisses logarithmiques)
- $\varphi = \text{Arg}(G(j\omega))$  en fonction de  $\omega$  (abscisses logarithmiques)

b- **Black et Nichols**

Représente  $|G(j\omega)|_{dB}$  en fonction de  $\varphi$ . La courbe est graduée en  $\omega$

c- **Nyquist**

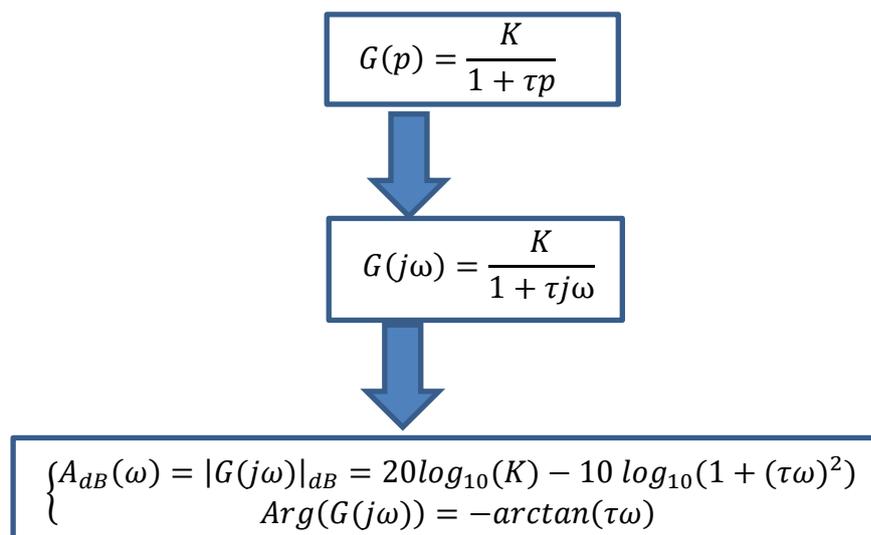
Représente  $|G(j\omega)|$  dans le plans complexe. La courbe est graduée en  $\omega$

2- **Diagramme de Bode :**

On trace le gain et la phase en fonction de  $\omega$  dans un plan semi logarithmique:

- Le gain est représenté en décibel:  $A_{dB}(\omega) = |G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(|G(j\omega)|)$
- La phase en degrés

2-1 **Système de premier ordre:**



Les asymptotes et leurs point d'intersections:

$\omega \rightarrow 0$	$A_{dB}(\omega) =  G(j\omega) _{dB} = 20\log_{10}(K)dB$ (Asymptote horizontale)	$Arg(G(j\omega))=0^0$
$\omega \rightarrow \infty$	$A_{dB}(\omega)=20\log_{10}(K)-20\log_{10}(\tau\omega)dB$ (Asymptote de pente <b>-20dB/décade</b> )  (décade= $[\omega \ 10\omega]$ )	$Arg(G(j\omega))=-90^0$
$\omega \rightarrow \omega_c$	$A_{dB}(\omega)=20\log_{10}(k)-10\log_{10}(2)=20\log_{10}(K) -3 dB$  Remarque: $\omega_c$ c'est la pulsation de cassure a-3 dB $\omega_c = \frac{1}{\tau}$	$Arg(G(j\omega))=-45^0$

Remarque : ces deux Asymptotes( horizontale et de pente-20dB/décade) se coupent en  $\omega_c$ .

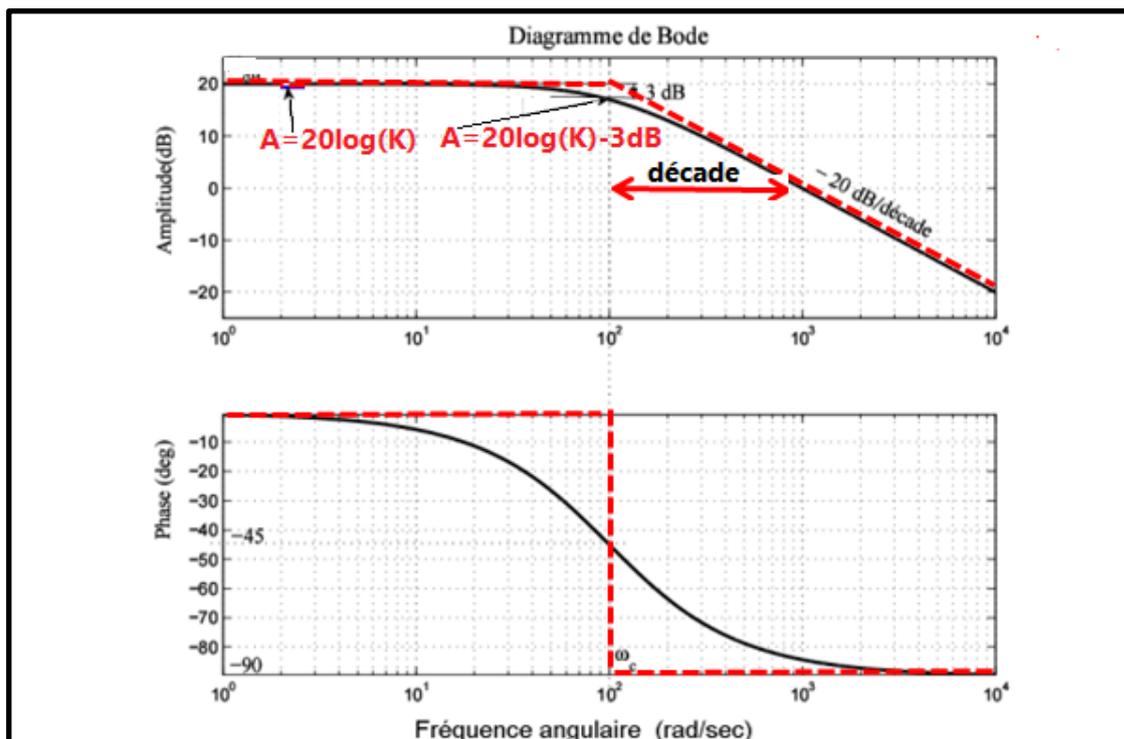


Fig2: diagramme de Bode pour un modèle du premier ordre pour  $K \neq 1$

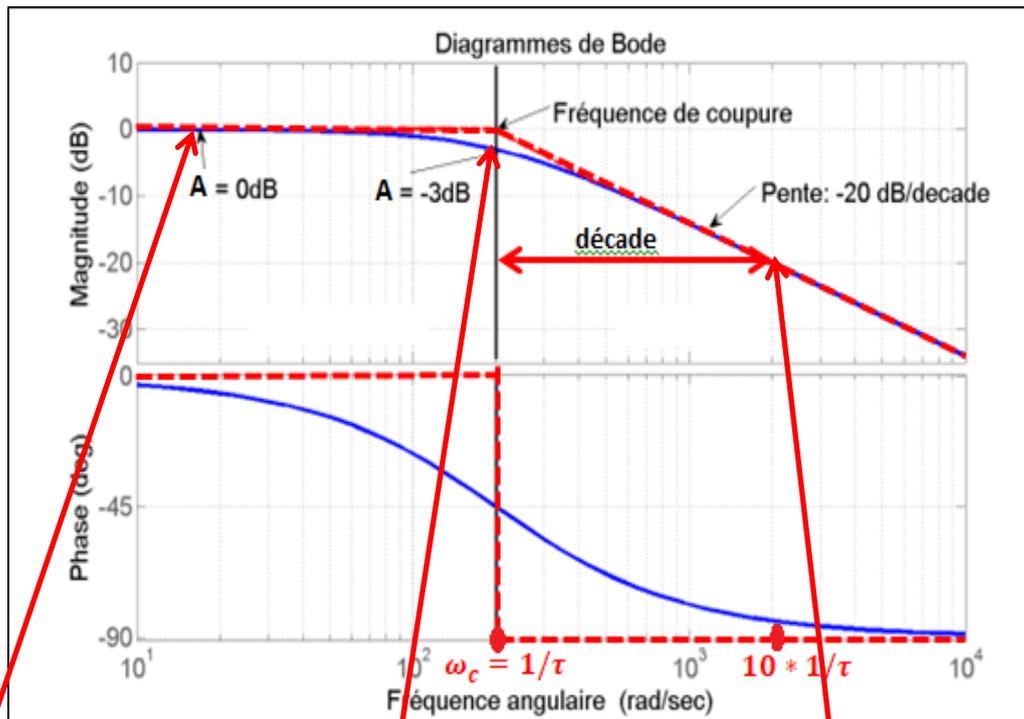
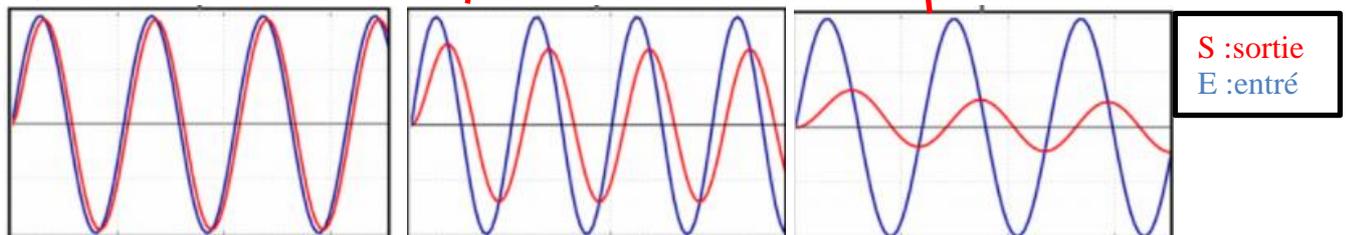


Fig3: diagramme de Bode pour un modèle du premier ordre pour  $K = 1$



Remarque :

- Lorsque le gain vaut 0,  $G(j\omega) = 1$ , la sortie n'est ni amplifiée, ni atténuée car  $S_0 = E_0$
- Si  $A_{db} > 0$ , le système amplifie l'entrée
- Si  $A_{db} < 0$ , le système atténue l'entrée

**Exemple1:** Tracer le diagramme de bode de système suivant:

$$G(p) = \frac{3}{1 + 0.5p}$$

On pose  $p = j\omega$  alors :

$$G(j\omega) = \frac{3}{1 + 0.5j\omega}$$

Le module et la phase de bode:

- $A_{dB}(\omega) = |G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(3) - 10\log_{10}(1 + (0.5\omega)^2)$
- $Arg(G(j\omega)) = -\arctan(0.5\omega)$

Avec :  $\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ rads}^{-1}$

Les asymptotes et leurs point d'intersections :

$\omega \rightarrow 0$	$A_{dB}(\omega) =  G(j\omega) _{dB} = 20\log_{10}(3) = 9.5\text{dB}$ (Asymptote horizontale)	$Arg(G(j\omega)) = 0^\circ$
$\omega \rightarrow \infty$	$A_{dB}(\omega) = 20\log_{10}(3) - 20\log_{10}(0.5\omega)\text{dB}$ (Asymptote de pente -20dB/décade)	$Arg(G(j\omega)) = -90^\circ$
$\omega \rightarrow \omega_c$	$A_{dB}(\omega) = 20\log_{10}(3) - 10\log_{10}(2) = 9.5 - 3 = 6.5\text{dB}$	$Arg(G(j\omega)) = -45^\circ$

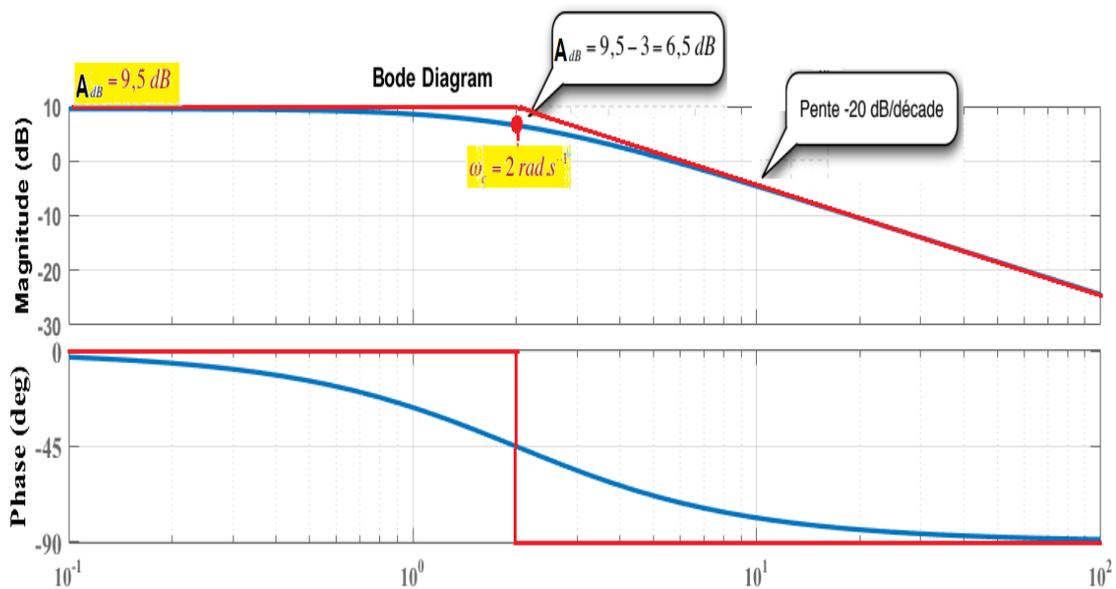
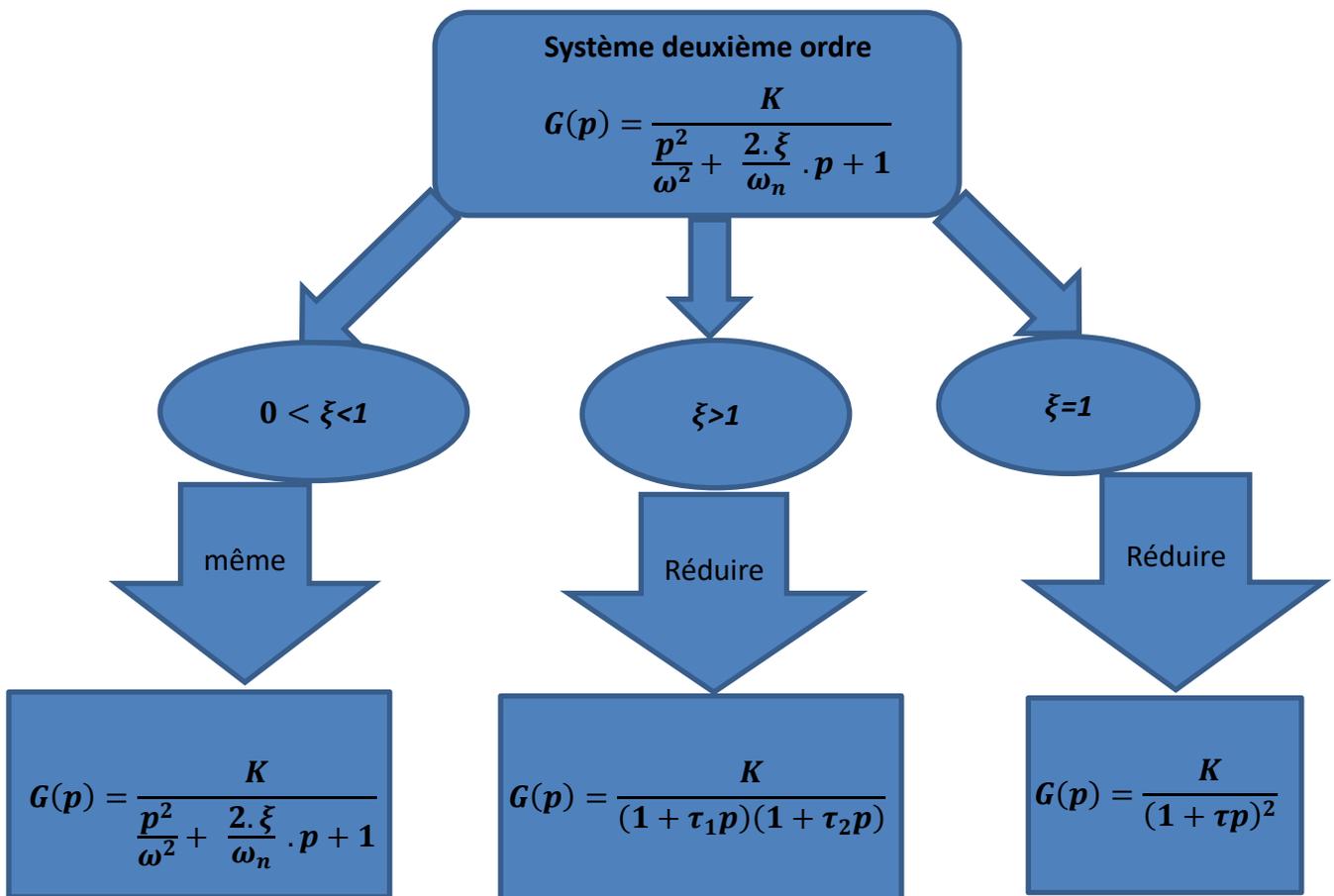
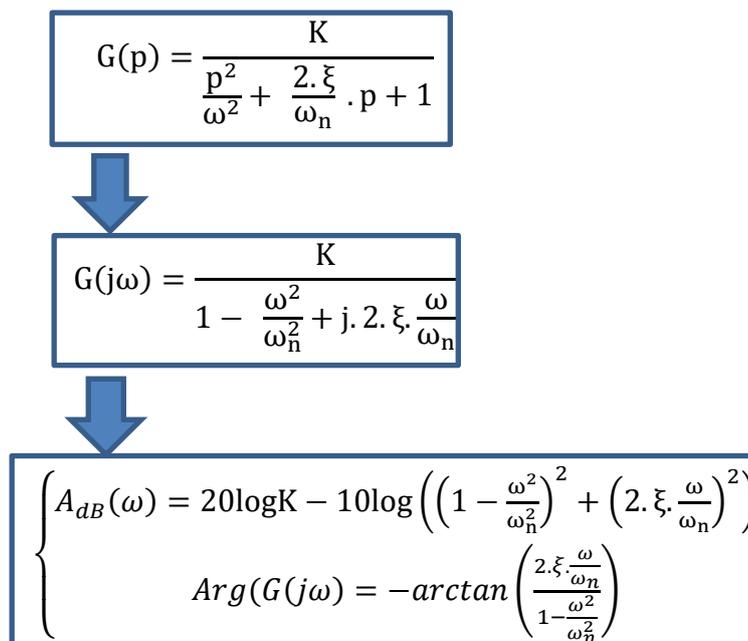


Fig4: diagramme de Bode pour un modèle du premier ordre pour  $K = 3$

2-2 Système deuxième ordre



a/  $0 < \xi < 1$



Les asymptotes et leurs point d'intersections :

$\omega \rightarrow 0$	$A_{dB}(\omega) =  G(j\omega) _{dB} = 20\log_{10}(K)dB$ (Asymptote horizontale)	$Arg(G(j\omega))=0^0$
$\omega \rightarrow \infty$	$A_{dB}(\omega)=20\log_{10}(K)-40\log_{10}(\frac{\omega}{\omega_n})dB$ (Asymptote de pente -40dB/décade)	$Arg(G(j\omega))=-180^0$
$\omega \rightarrow \omega_n$	$A_{dB}(\omega)=20\log_{10}(k)-10\log_{10}(2)=20\log_{10}(K) -20\log_{10}(2. \xi) dB$	$Arg(G(j\omega))= -90^0$

Remarque:  $\omega_c$  c'est la pulsation de cassure  
 $\omega_c = \omega_n$

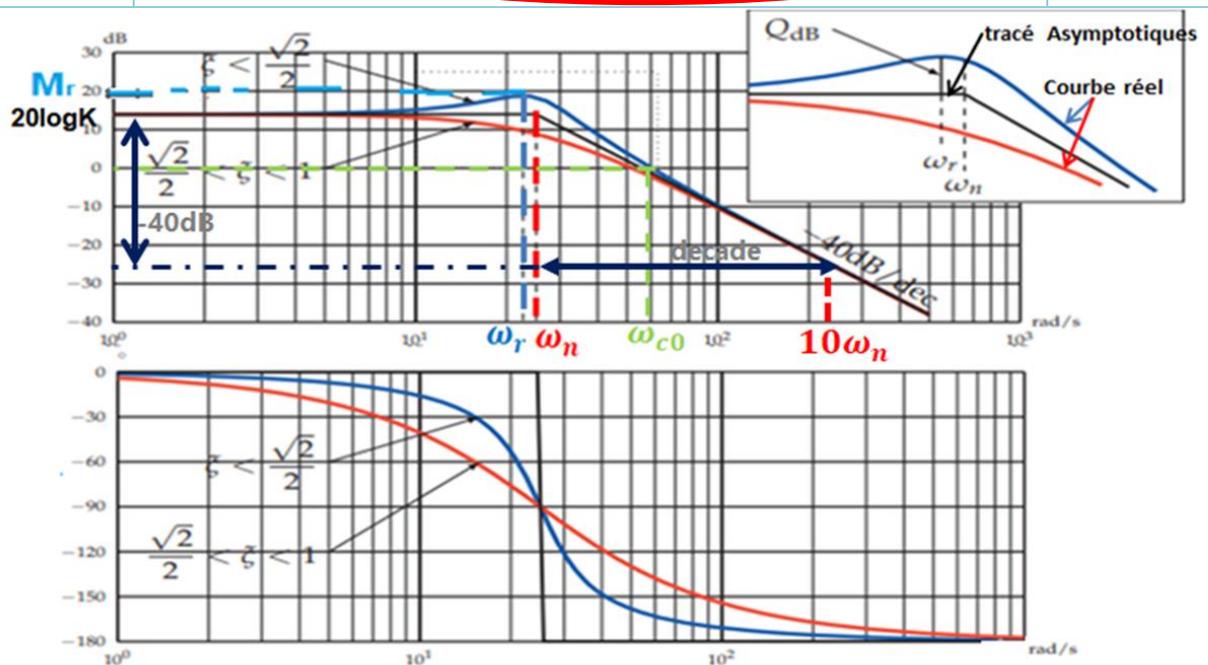
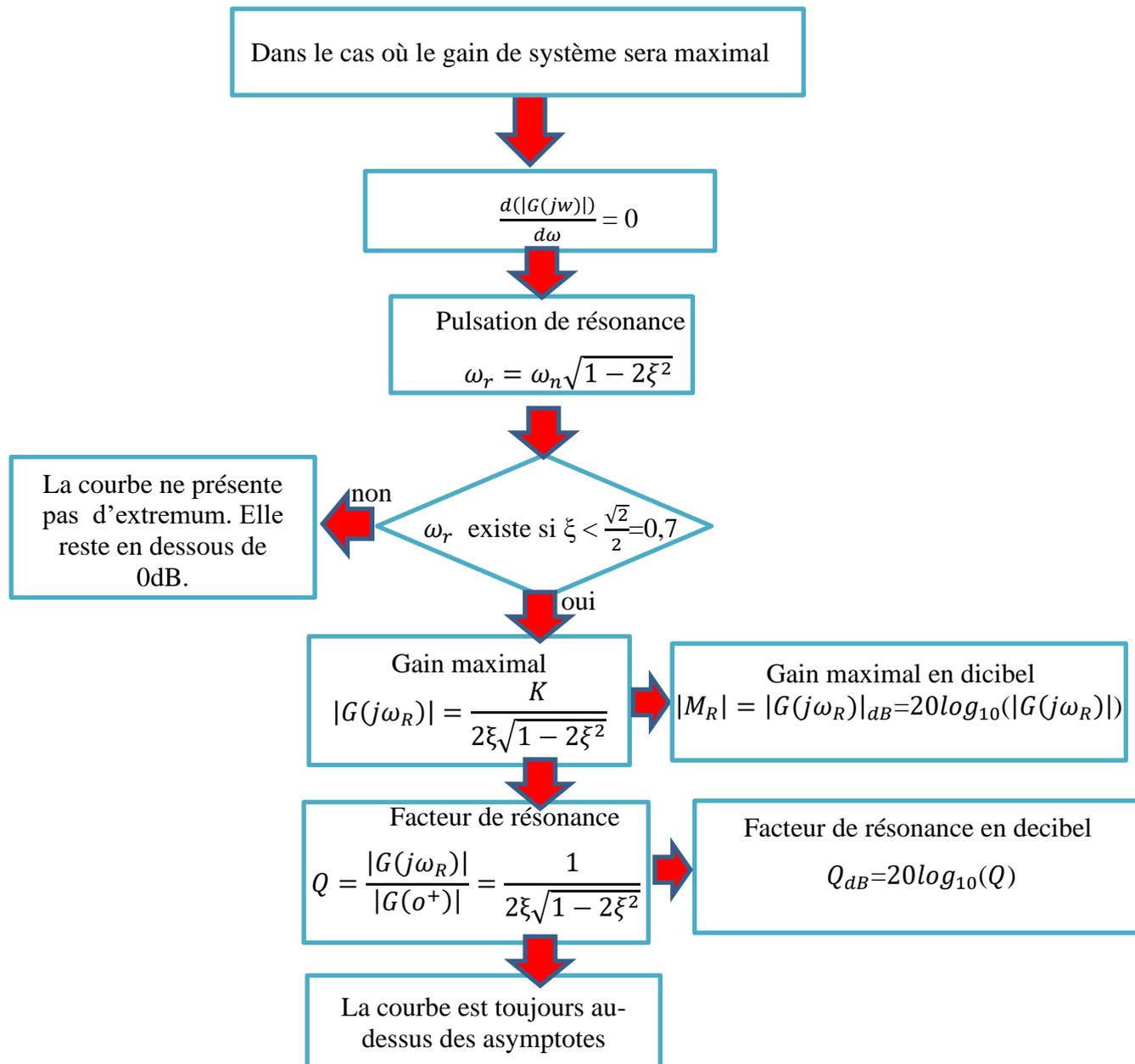


Fig5: diagramme de Bode pour un modèle du 2<sup>ème</sup> ordre

✚ Existence d'une résonance :



Remarque :

- Le facteur de résonance c'est le rapport entre le gain maximal est le gain statique
- On montre que la résonance se produit pour  $0 < \xi < 0.707$  .  
Si  $\xi \rightarrow 0$   $\rightarrow$   $\omega_R \rightarrow \omega_n$  et  $Q \rightarrow \infty$
- Les valeurs faibles de  $\xi$  aboutissent à une résonance élevée.
- La pulsation de résonance  $\omega_r$  est forcément inférieure à la pulsation propre  $\omega_n$ , le pic de résonance s'il existe se situe donc à gauche de la cassure des asymptotes du gain.

$b/\xi > 1$

$$G(p) = \frac{k}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

On considère que  $\tau_1 > \tau_2$ . Sur le diagramme de Bode, nous repérons deux pulsations de coupures :  $\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1}$  et  $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2}$

Le tracé asymptotique se construit alors en ajoutant les tracés du gain et deux systèmes du premier ordre construits séparément dans un premier temps.

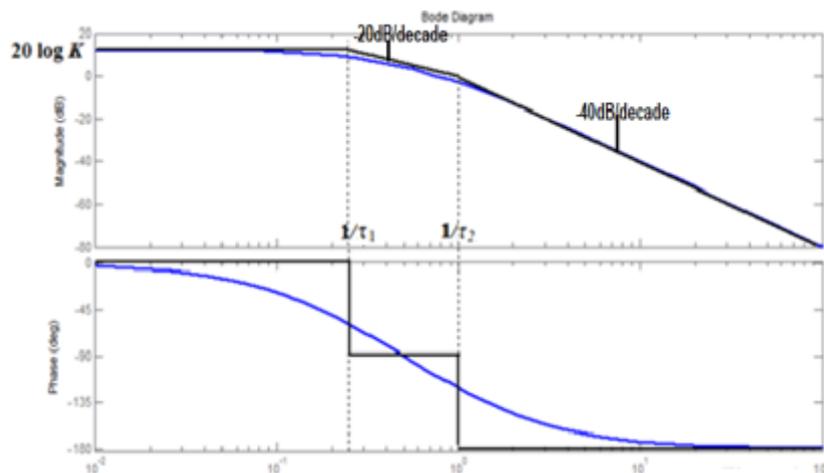


Fig6: diagramme de Bode pour un système 2<sup>nd</sup> ordre aperiodique

$c/\xi=1$

$$G(p) = \frac{k}{(1 + \tau p)^2}$$

Dans ce cas on a une seule pulsation de coupure  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

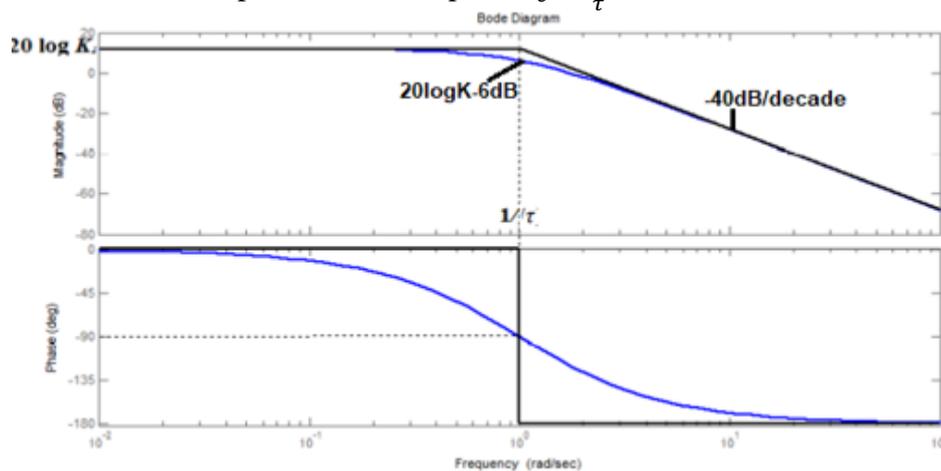


Fig7: diagramme de Bode pour un système 2<sup>nd</sup> ordre critique

### 2-3 Notions importantes et essentielles pour tracer le diagramme de Bode

Pour tracer le diagramme de Bode rapidement on utilise une méthode simple et efficace quel que soit l'ordre de la fonction de transfert pour cela on doit suivre les étapes suivantes :

1/ Mettre la fonction de transfert sous la forme canonique :

$$G(p) = \frac{K}{s^\alpha} \times \frac{\prod(1 \pm \tau_i s)}{\prod(1 \pm \tau'_i s)} \times \frac{\prod\left(1 + 2\xi \frac{s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)}{\prod\left(1 + 2\xi' \frac{s}{\omega'_{ni}} + \frac{s^2}{\omega'_{ni}^2}\right)}$$

2/ Le premier point de la courbe des asymptotes des  $A_{dB}(\omega)$  sur le papier semi-logarithmique :

$$20[\log(K) - m\alpha]$$

Avec :  $\begin{cases} K: \text{le gain statique de de la fonctio de transfert sous la forme canonique} \\ \alpha: c' \text{est la classe de la fonction de transfert} \\ m: c' \text{est la puissance de la premiere 10 sur le papier semi - logarithmique} \end{cases}$

3/ la pulsation de cassure : le point de changement de pente.

4/ Pour tracer les asymptotes des fonctions usuelles on prend la pente|phase comme il sont indiquées sur la table suivante :

Fonction usuelles	$\omega$	$0$	$\frac{1}{\tau}$ ou $\omega_n$	$\infty$
$p^\beta$				$+20*\beta \beta * 90^0$
$\frac{1}{p^\beta}$				$-20*\beta -\beta * 90^0$
$(1 + \tau p)^\beta$		$0 0^0$		$+20*\beta +\beta * 90^0$
$(1 - \tau p)^\beta$		$0 0^0$		$+20*\beta -\beta * 90^0$
$\frac{1}{(1 + \tau p)^\beta}$		$0 0^0$		$-20*\beta -\beta * 90^0$
$\frac{1}{(1 - \tau p)^\beta}$		$0 0^0$		$-20*\beta \beta * 90^0$
$(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)^\beta$		$0 0^0$		$+40*\beta \beta * 180^0$
$\frac{1}{(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)^\beta}$		$0 0^0$		$-40*\beta -\beta * 180^0$

Remarque : pour  $\omega_c = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \Rightarrow \text{phase} = \pm\beta * 45^0 \\ \text{ou} \\ \omega_n \Rightarrow \text{phase} = \pm\beta * 90^0 \end{cases}$

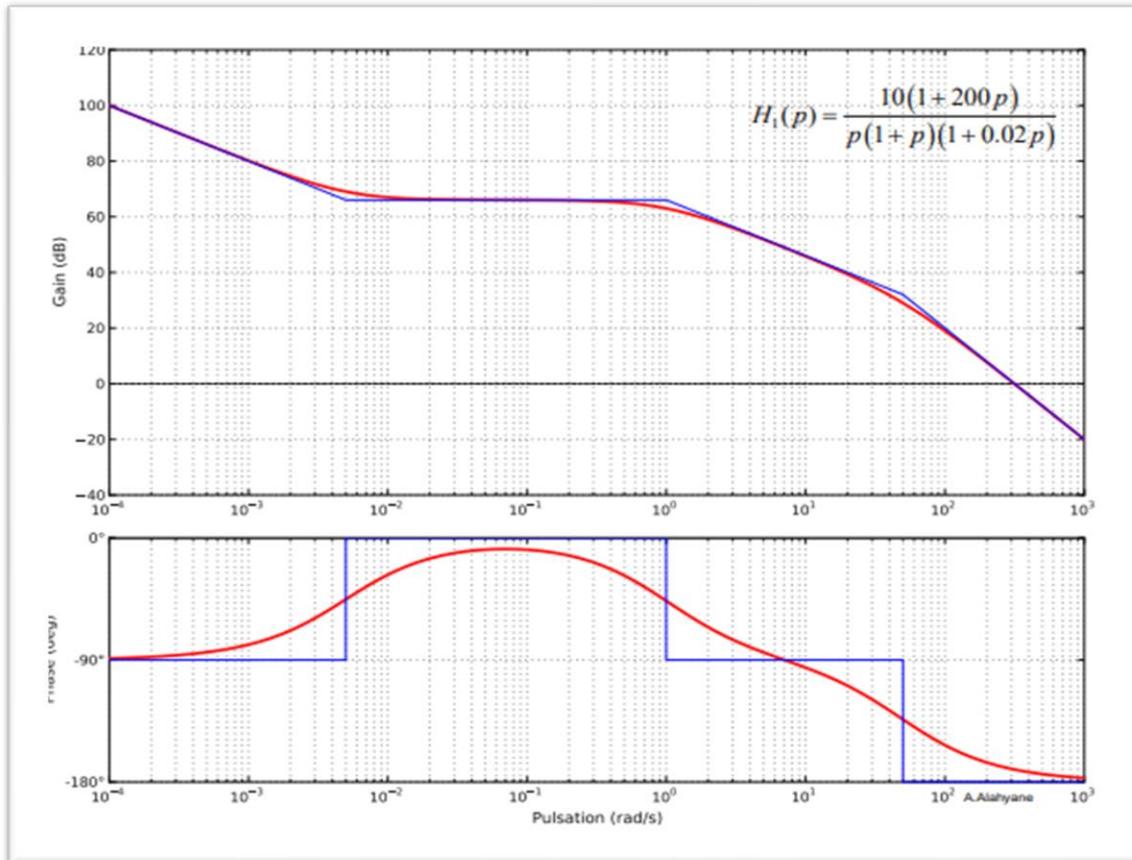
2/ principe de superposition des pentes

$$G(p) = G_1(p) \times G_2(p) \dots G_n(p) \Rightarrow A_{dB}(\omega) = A_{dB1}(\omega) + A_{dB2}(\omega) + \dots + A_{dBn}(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$$

Exemple :

Le premier point :  $20[\log(K) - m\alpha] = 20[\log(10) - (-4 \times 1)] = 100\text{dB}$



$\omega_c$	0	0.005	1	50	$\infty$
$(1 + 200p)$	$0 0^0$	★ $+20 +90^0$	$+20 +90^0$	$+20 +90^0$	$+20 +90^0$
$\frac{1}{(1 + p)}$	$0 0^0$	$0 0^0$	★ $-20 -90^0$	$-20 -90^0$	$-20 -90^0$
$\frac{1}{(1 + 0.02p)}$	$0 0^0$	$0 0^0$	$0 0^0$	★ $-20 -90^0$	$-20 -90^0$
$\frac{1}{p}$	$-20 -90^0$	$-20 -90^0$	$-20 -90^0$	$-20 -90^0$	$-20 -90^0$
$A_{dB}(\omega)$	$-20 -90^0$	$0 0^0$	$-20 -90^0$	$-40 -180^0$	$-40 -180^0$

- ✚ Pour la première fonction  $\omega_c=0.005rad/s \Rightarrow$  la courbe réelle est au-dessus des asymptotes d'une valeur de  $+3dB \Rightarrow$  car  $\omega_c$  se trouve au numérateur de  $H_1(p)$ .
- ✚ Pour la 2<sup>ème</sup> et la 3<sup>ème</sup> fonction  $\omega_c=1$  et  $50rad/s \Rightarrow$  la courbe réelle est au-dessous des asymptotes d'une valeur de  $-3dB \Rightarrow$  car  $\omega_c$  se trouve au dénominateur de  $H_1(p)$ .

**3- Diagramme de Nyquist:**

Le diagramme de Nyquist permet d'obtenir une représentation graphique de comportement fréquentiel d'un système sur un graphe unique dans un lieu en

coordonnées polaires, des points P de coordonnées  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ .

### Méthode de tracé

Pour construire le lieu de transfert de Nyquist

1. Il faut tout d'abord écrire le nombre complexe  $G(j\omega)$  sous la forme :

$$G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j\text{Im}[G(j\omega)]$$

Et la phase sous la forme :

$$\varphi[G(j\omega)] = \arctg\left(\frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]}\right)$$

2. Déterminer les points P suivants :

**P1** : point de départ ( $\omega = 0$ )

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}[G(j\omega)], \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}[G(j\omega)], \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi[G(j\omega)]$$

**P2** : point de départ ( $\omega = \infty$ )

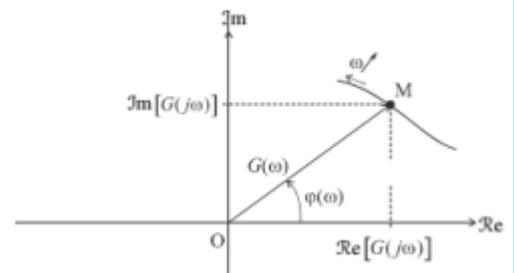
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Re}[G(j\omega)], \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im}[G(j\omega)], \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi[G(j\omega)]$$

**P3** : point d'intersection avec l'axe réel

$$\text{Im}[G(j\omega)] = 0 \Rightarrow \text{on obtient } \omega_1 \text{ on calcul } \text{Re}[G(j\omega_1)] \text{ et } \varphi(j\omega_1)$$

**P4** : point d'intersection avec l'axe imaginaire

$$\text{Re}[G(j\omega)] = 0 \Rightarrow \text{on obtient } \omega_2 \text{ on calcul } \text{Im}[G(j\omega_2)] \text{ et } \varphi(j\omega_2)$$



Lier les points de P1 à P4 pour construire le lieu

### Méthode de tracé rapide

Les allures de ces lieux de Nyquist dépendent tout d'abord de la classe de la fonction de transfert.

Basses pulsations	$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega)$ $\varphi(\omega) = \alpha \left( -\frac{\pi}{2} \right)$
Hautes pulsations	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega)$ $\varphi(\omega) = (n - m) \left( -\frac{\pi}{2} \right)$

### 3.1. Système du 1<sup>er</sup> ordre

on a :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = \frac{K(1 - j\tau\omega)}{(1 + j\tau\omega)(1 - j\tau\omega)} = \frac{K(1 - j\tau\omega)}{1 + \tau^2\omega^2}$$

Soit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} + j \frac{-K\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} = X + jY$$

et la phase:  $\varphi[G(j\omega)] = -\text{arctg}(\tau\omega)$

✚ **Point de départ** ( $\omega = 0$ ) :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} X = K$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Y = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi[G(j\omega)] = 0^0$$

Alors Le point de départ **P1** est :  $(K, 0)$  avec une phase égal à  $0^0$ .

✚ **Point d'arrivée** ( $\omega = \infty$ ) :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} X = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Y = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi[G(j\omega)] = -90^0$$

Alors Le point d'arrivée **P2** est :  $(0,0)$  avec une phase égal à  $-90^0$

✚ **Point d'intersection avec l'axe réel** :

$Y = 0 \Rightarrow$  on obtient la valeur de  $\omega_1 = 0$ , alors pour cette valeur on obtient  $X = K$  et  $\varphi[G(j\omega_1)] = 0$ . Alors le point d'intersection avec l'axe réel **P3** c'est le même point **P1**.

✚ **Point d'intersection avec l'axe imaginaire** :

$X = 0 \Rightarrow$  la valeur de  $\omega_2$  n'existe pas, alors les valeurs de  $Y$  et de  $\varphi[G(j\omega_2)]$  n'existe pas aussi. Alors le point d'intersection avec l'axe imaginaire  $P4$  n'existe pas.

✚ On prend un autre point :

A la pulsation de cassure  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$  on a  $X = \frac{K}{2}$ ,  $Y = -\frac{K}{2}$  et  $\varphi[G(j\omega_c)] = -45^\circ$ .

Alors on peut dresser le tableau suivant pour différentes valeurs de  $\omega$ :

$\omega$	0	$\omega_c = \frac{1}{\tau}$	$\infty$
X	K	$\frac{K}{2}$	0
Y	0	$-\frac{K}{2}$	0
$ G(j\omega)  = \sqrt{X^2 + Y^2}$	K	$\frac{K}{\sqrt{2}}$	0
$\varphi[G(j\omega)]$	$0^\circ$	$-45^\circ$	$-90^\circ$

Enfin, Le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre est un demi-cercle de centre  $(K/2, 0)$  et de rayon  $K/2$  comme le montre la Figure 8.

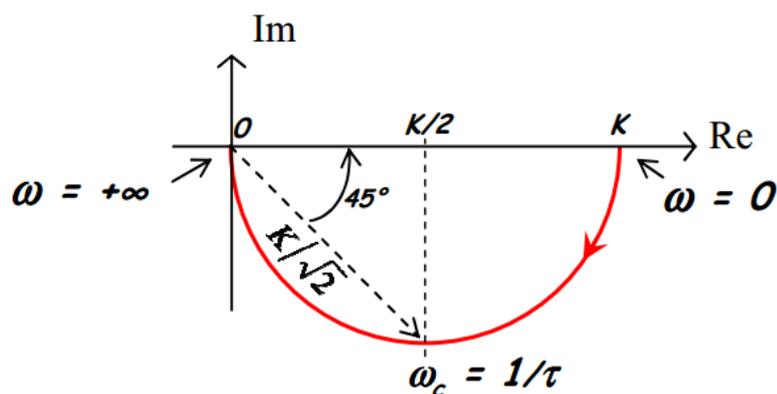


Fig8 : diagramme de Nyquist pour un système 1<sup>er</sup> ordre

### 3.2. Système du 2eme ordre

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} + j \frac{-2K\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = X + jY$$

$$\varphi[G(j\omega)] = -\arctg\left(\frac{2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

✚ **Point de départ** ( $\omega = 0$ )

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} X = K$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Y = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi[G(j\omega)] = 0^0$$

Alors Le point de départ **P1** est :  $(K, 0)$  avec une phase égal à  $0^0$

✚ **Point d'arrivée** ( $\omega = \infty$ )

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} X = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Y = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi[G(j\omega)] = -180^0$$

Alors Le point d'arrivée **P2** est :  $(0,0)$  avec une phase égale à  $-180^0$

✚ **Point d'intersection avec l'axe réel**

$Y = 0 \Rightarrow$  on obtient la valeur de  $\omega_1 = 0$ , alors pour cette valeur on obtient  $X = K$  et  $\varphi[G(j\omega_1)] = 0$ .

Alors le point d'intersection avec l'axe réel **P3** c'est le même point **P1**.

✚ **point d'intersection avec l'axe imaginaire**

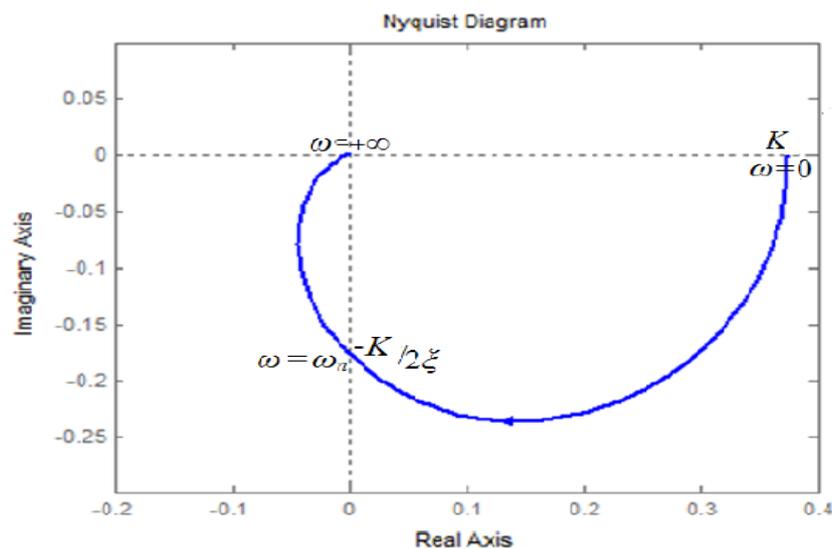
$X = 0 \Rightarrow \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_2 = \omega_n$  alors pour cette valeur on obtient  $Y = -\frac{K}{2\xi}$  et  $\varphi[G(j\omega_2)] = -90^\circ$ .

Alors le point d'intersection avec l'axe imaginaire P4 est :  $\left(0, -\frac{K}{2\xi}\right)$  avec une phase égale à  $-90^\circ$ .

Ainsi on peut dresser le tableau suivant pour différentes valeurs de  $\omega$ :

$\omega$	0	$\omega_c = \omega_n$	$\infty$
X	K	0	0
Y	0	$-\frac{K}{2\xi}$	0
$ G(j\omega)  = \sqrt{X^2 + Y^2}$	K	$\frac{K}{2\xi}$	0
$\varphi[G(j\omega)]$	$0^\circ$	$-90^\circ$	$-180^\circ$

Le diagramme de Nyquist d'un système de 2<sup>ème</sup> ordre est illustré par la figure ci-dessous :



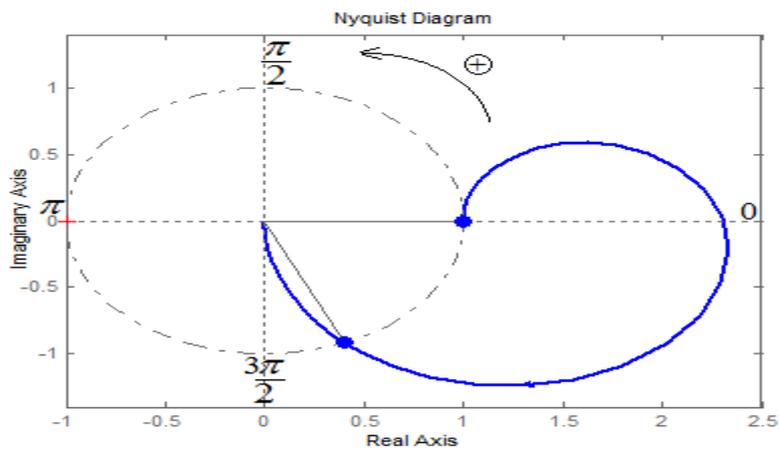
**Fig9** : diagramme de Nyquist pour un système 2<sup>ème</sup> ordre

**Exemple :**

On utilisant la méthode rapide tracer le lieu de Nyquist de système suivant :

$$G(p) = \frac{(1 + 0.33p)}{(1 + 0.01p)(1 + 0.003p)}$$

Basses pulsations	$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = 1$ $\varphi(\omega) = 0 * \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
Hautes pulsations	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) = 0$ $\varphi(\omega) = (2 - 1) \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$



## **Chapitre 5. Analyse des performances**

## Chapitre 5 : Analyse des performances

### 1. Définition

Les critères permettant de qualifier et quantifier les performances du système sont :

- ❖ La stabilité
- ❖ La précision
- ❖ La rapidité

L'asservissement idéal est un système ayant une bonne stabilité et bonne précision, le régime transitoire doit être rapide et bien amorti. Ces critères de performances ne sont pas toujours compatibles.

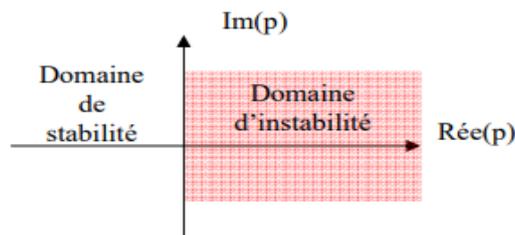
### 2. La Stabilité

#### a/Définition

- Un système est stable s'il retourne spontanément vers son état d'équilibre lorsqu'il en écarté.
- Un système est stable si pour un signal d'entrée borné, la sortie reste bornée
- Un système est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 en régime permanent
- Un système est stable si sa réponse indicielle tend vers une valeur finie en régime permanent.

#### b/Condition sur les pôles :

Un système linéaire est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.



#### Exemples :

1/

$$G(p) = \frac{p - 2}{(p + 1)(p + 2)}$$

Les pôles :  $p_1 = -1$  ;  $p_2 = -2$   $\Rightarrow$  le système est stable

2/

$$G(p) = \frac{p - 2}{(p - 1)(p + 2)}$$

Les pôles :  $p_1 = 1$  ;  $p_2 = -2$   $\Rightarrow$  le système est instable

3/

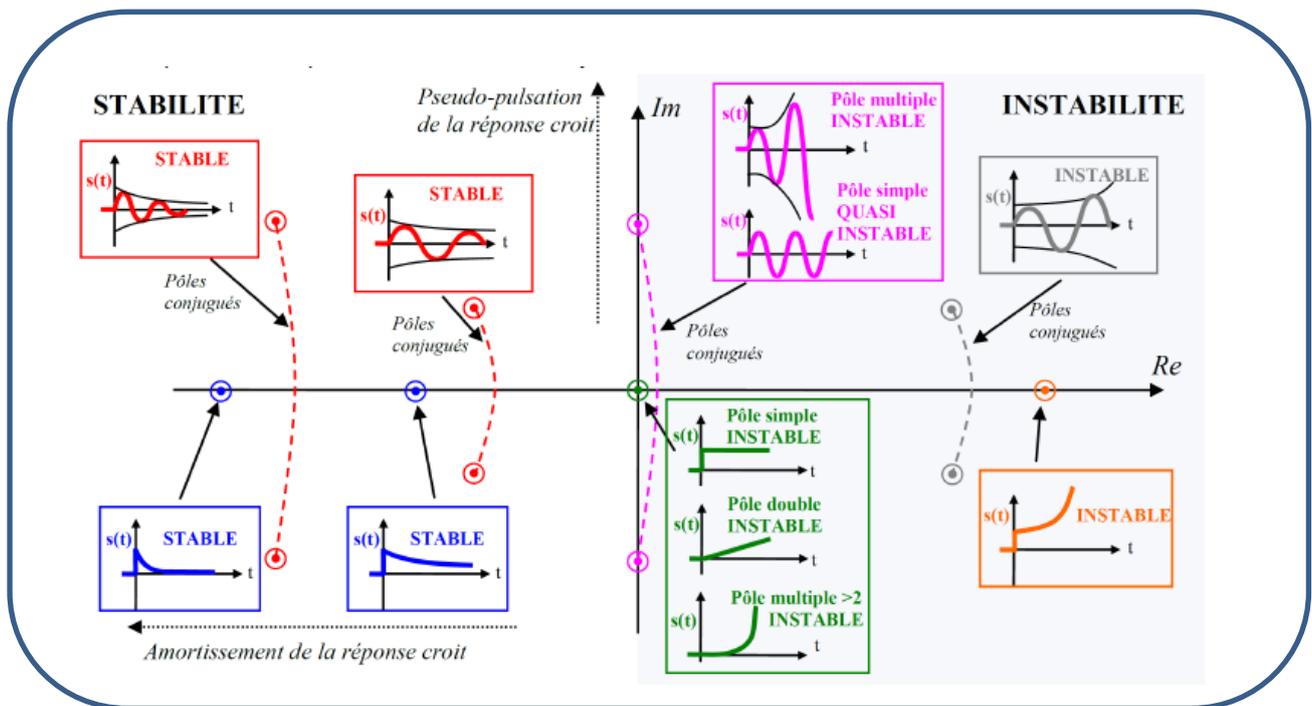
$$G(p) = \frac{p - 2}{(p + 1)(p^2 + 2)}$$

Les pôles :  $p_1 = -1$  ;  $p_2 = \mp j\sqrt{2}$   $\Rightarrow$  le système est juste oscillant (marginalelement stable)

**Remarque :**

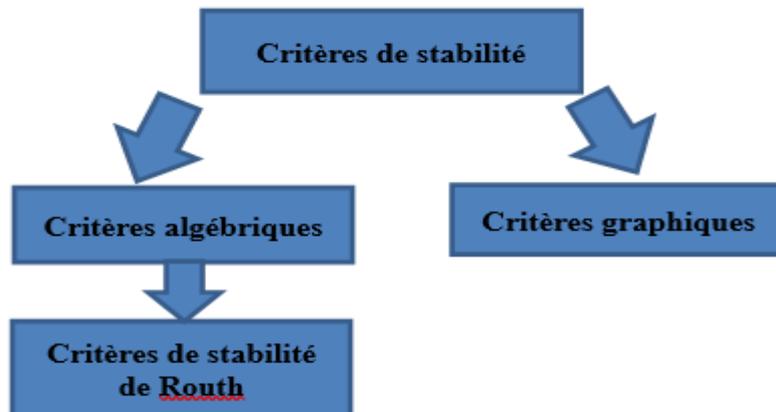
- $R_e < 0 \Rightarrow$  système stable
- $R_e = 0 \Rightarrow$  système est juste oscillant (marginalelement stable)
- $R_e > 0 \Rightarrow$  système instable

Suivant la nature des pôles de la fonction de transfert, la réponse impulsionnelle du système présentera les différentes allures suivantes :



On peut selon la position des pôles dans le plan complexe définir la zone de stabilité du système à une réponse impulsionnelle.

Pour savoir si les pôles d'une fonction de transfert sont à parties réelles négatives, on peut les calculer. Mais pour des polynômes de degré supérieur à 2, la résolution devient difficile. Pour cela on propose des critères, qui permettent de savoir si les racines sont toutes à partie réelle négative (donc si le système est stable) sans avoir à calculer ces pôles. Les critères ci-dessous nous permettent de déterminer le signe des racines sans avoir besoin de déterminer les racines.



### 5.2.1/ Critères algébriques

#### Critères de Stabilité de Routh :

- ✓ Soit  $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  la fonction de transfert d'un système
- ✓ Les pôles de H(p) sont les racines de l'équation caractéristique  $D(p) = 0$ .

On écrit le polynôme caractéristique D(p) sous la forme suivante :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

Le critère de stabilité de Routh se décompose en deux conditions :

1. Une condition nécessaire non suffisante : tous les  $a_i$  même signe, non nuls
2. Une condition nécessaire et suffisante : on forme le tableau de Routh pour analyser les coefficients de polynômes D(p).

$p^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...
$p^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...
$p^{n-2}$	$b_1 = \frac{a_{n-2}a_{n-1} - a_n a_{n-2}}$	$b_2 = \frac{a_{n-4}a_{n-1} - a_n a_{n-5}}$	$b_3 = \frac{a_{n-6}a_{n-1} - a_n a_{n-7}}$	...
$p^{n-3}$	$c_1 = \frac{a_{n-3}b_1 - a_{n-1}b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{a_{n-5}b_1 - a_{n-1}b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{a_{n-7}b_1 - a_{n-1}b_4}{b_1}$	...
...	.....	.....	.....	...
$p^1$	.....	.....	.....	...
$p^0$	.....	.....	.....	...

2ème Condition de stabilité: il faut que tous les termes de la 1ère colonne soient de même signe.

## Remarques :

- ✓ Le nombre de changement de signe est égal au nombre de racines à partie réelle positive
- ✓ Le critères de Routh est appliqué à l'équation caractéristique d'un système en boucle fermée

## Exemples :

$$1/D(p) = p^3 + 2p^2 + 4p + 4 = 0$$

$p^3$	1	4
$p^2$	2	4
$p^1$	2	0
$p^0$	4	

les coefficients de la première colonne sont tous de mêmes signes  
alors système est **stable**.

$$2/D(p) = p^4 + 5p^3 + 3p^2 + 16p + 1 = 0$$

$p^3$	1	4
$p^2$	2	4
$p^1$	2	0
$p^0$	4	

le nombre de changements de signes dans la première colonne  
égale a deux ce qui signifie que l'équation caractéristique  
possède deux racines a partie réelle positive alors le système  
est **instable**

3/cas particuliers:

✓ Si le premier coefficient d'une ligne est nul:  $D(p) = p^4 + 2p^3 + p^2 + 2p + 4 = 0$

$p^4$	1	1	4
$p^3$	2	2	0
$p^2$	0	4	

le coefficient nul est remplacé par  $\epsilon > 0$

Table devient

$p^4$	1	1	4
$p^3$	2	2	0
$p^2$	$\epsilon$	4	
$p^1$	$\frac{2\epsilon - 8}{\epsilon}$	0	
$p^0$	4		

$\frac{2\epsilon - 8}{\epsilon} = \frac{-8}{\epsilon} \rightarrow$  le terme est négatifs

le nombre de changements de signes dans la premier colonne égale a deux ce qui signifie que l'équation caractéristique possède deux racines a partie réelle positive alors le système est **instable**

✓ Si tous les coefficients d'une ligne sont nuls:

$D(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 4p + 8 = 0$

$p^5$	1	3	4
$p^4$	2	6	8
$p^3$	0	0	
$p^2$			
$p^1$			
$p^0$			

Equation auxiliaire: en utilisant les coefficients de la deuxième ligne

$A(p) = 2p^4 + 6p^2 + 8$

$\frac{dA(p)}{dp} = 8p^3 + 12p$

La table devient

$p^5$	1	3	4
$p^4$	2	6	8
$p^3$	8	12	
$p^2$	3	8	
$p^1$	$-\frac{28}{3}$		
$p^0$	8		

le nombre de changements de signes dans la premier colonne égale a deux ce qui signifie que l'équation caractéristique possède deux racine sa partie réelle positive alors le système est **instable**

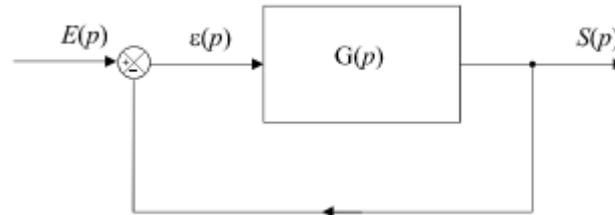
**Remarque :** les racines de l'équation auxiliaire

sont aussi les racines de l'équation caractéristique:

$$A(p) = 2p^4 + 6p^2 + 8 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm j \frac{\sqrt{7}}{2}$$

#### d/ Application du critère de Routh dans l'analyse des systèmes asservis

On considère le système en boucle fermée suivant :



Tel que :  $G(p) = \frac{k}{p(p^2+p+3)}$  déterminer les valeurs de k pour lesquelles le système est stable.

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\frac{k}{p(p^2+p+3)}}{1+\frac{k}{p(p^2+p+3)}} = \frac{k}{p(p^2+p+3)+k}$$

L'équation caractéristique est alors:

$$p^3 + p^2 + 3p + k = 0$$

Le tableau de Routh :

$p^3$	1	3
$p^2$	1	k
$p^1$	3-k	0
$p^0$	k	

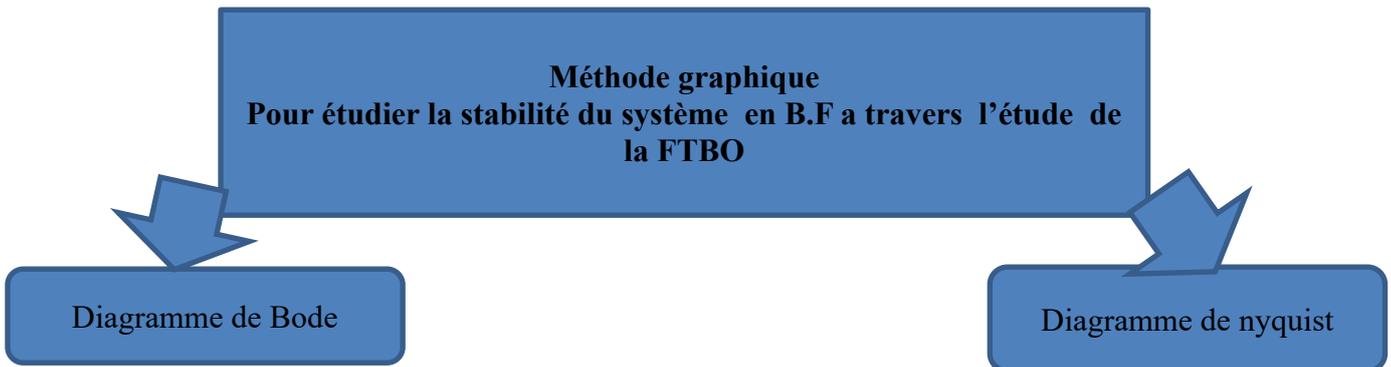
Pour que le système soit stable, il faut que k soit positif et que tous les coefficients de la première colonne soit positif. C'est-à-dire

$$\begin{cases} k > 0 \\ 3 - k > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 3$$

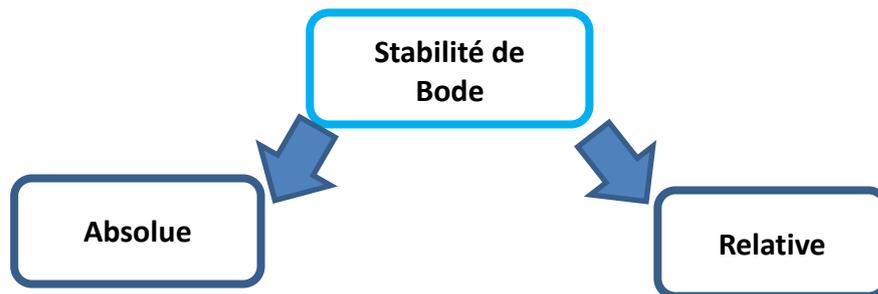
Le système est stable pour  $0 < k < 3$ . Pour  $k=3$  le système est oscillatoire

### 5.2.2/ Critères graphiques

Les critères graphiques permettent d'étudier la stabilité en boucle fermée d'un système à partir de la représentation graphique de la fonction de transfert en boucle ouverte. Cette étude peut être conduite par exemple à partir des diagrammes de Bode ou de Nyquist.

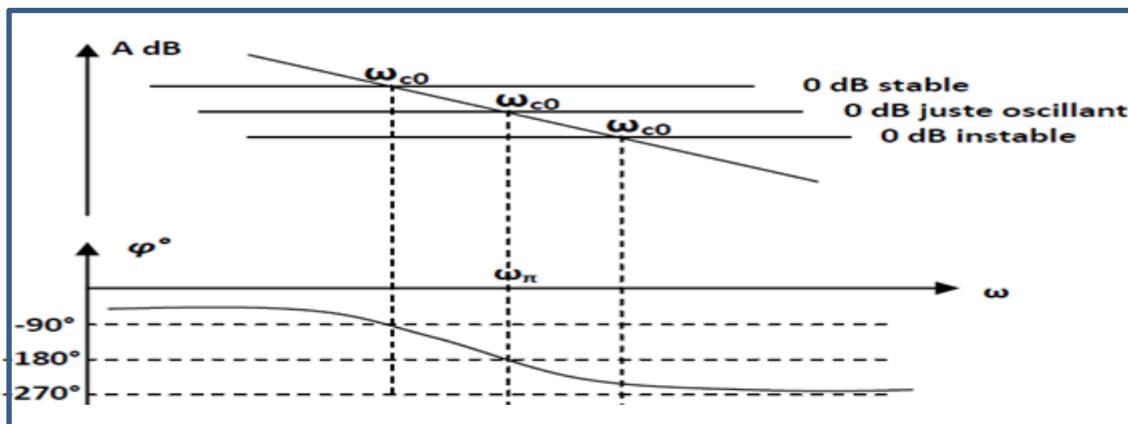


#### A/ Stabilité de bode



##### A-1 Stabilité Absolue

Un système asservi est stable en B.F si, pour la pulsation  $\omega_{c0}$  telle que  $A_{dB}(\omega_{c0}) = 0$  dB, le déphasage est supérieur à  $-180^\circ$



Remarque: La stabilité absolue, permettent de répondre à la question binaire : le système est-il stable ou instable ?

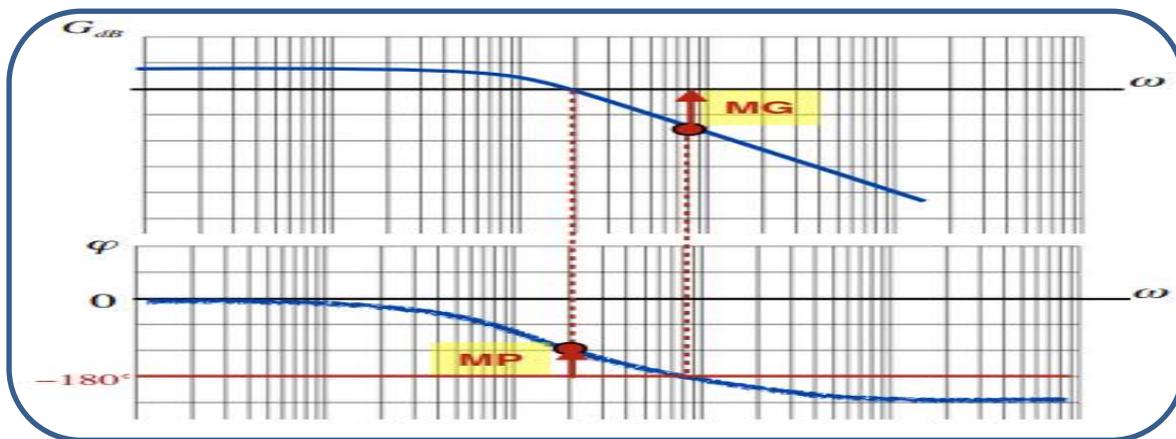
### A-2/stabilité Relative

Afin d'assurer une stabilité relative en boucle fermée, on cherchera à conserver à la fonction de transfert en boucle ouverte, une distance minimale par rapport au point critique. Cette distance est appréciée par les deux marges de stabilité (marges de sécurité) : la marge de gain MG et la marge de phase MP. Les valeurs usuelles de réglage des marges de gain et de phase sont:

- Marge de Gain : MG de 10 dB à 15 dB;
- Marge de Phase : MP de 40° à 50° ( parfois 45° à 65° ).

**Le degré de stabilité est évaluée par deux marges de stabilité( Marges de Phase et Marges de Gain):**

On appelle pulsation critique  $\omega_{c0}$  la pulsation à laquelle le gain est égal à 1, donc lorsque  $\text{AdB}(\omega_{c0}) = 0 \text{ dB}$



#### Marge de phase :

- Recherche de la pulsation critique  $\omega_{c0}$  telle que  $\text{AdB}(\omega_{c0}) = 0 \text{ dB}$
- Calcul de la phase correspondante  $\phi(\omega_{c0})$
- Calcul de la marge de phase:  $\text{MP} = 180^\circ + \phi(\omega_{c0})$

**Marge de gain :** ➤ Recherche de la pulsation  $\omega_\pi$  à laquelle  $\phi(\omega_\pi) = -180^\circ$

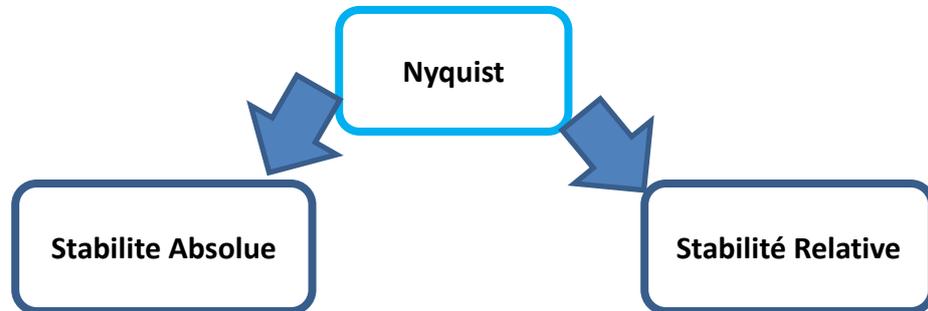
- Calcul du gain correspondant  $\text{AdB}(\omega_\pi)$
- Calcul de la marge de gain :  $\text{MG} = -\text{AdB}(\omega_\pi)$

#### Remarque:

- Un système qui a une marge de gain ou une marge de phase positive est un système stable.
- Un système qui a une marge de gain ou une marge de phase négative est un système instable.
- Un système qui a une marge de gain ou une marge de phase nulle est un système à la limite de stabilité.
- La marge de phase d'un système dont la boucle ouverte est du 1<sup>er</sup> ordre avec gain statique positif aura toujours une marge de phase  $\text{MP} > 90^\circ$  car son déphasage au maximum est de  $90^\circ$ .
- La marge de phase d'un système dont la boucle ouverte est du 2<sup>eme</sup> ordre avec gain statique positif peut avoir une marge de phase  $\text{MP} < 45^\circ$  car il déphase jusqu'à de  $180^\circ$

**B/ Stabilité de Nyquist:**

Le critère de Nyquist permet de déterminer la stabilité d'un système bouclé sur la base de sa réponse harmonique en boucle ouverte.

**B-1 Stabilité Absolue**

La condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un système asservi linéaire et que son lieu de transfert en boucle ouverte, parcouru de  $\omega = -\infty$  à  $\omega = +\infty$ , entoure le point critique  $(-1, 0)$  dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de la fonction de transfert en boucle ouverte. Étant donné un système asservi, défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte ( $G_{BO}(p)$ ). La relation :  $Z = P - N$  donne le nombre  $Z$  de zéros instables de l'équation

Caractéristique  $1 + G_{BO}(p) = 0$  et donc de pôles instables de la FTBF( $p$ ), avec :

$P$  : Nombre de pôles instables de  $G_{BO}(p)$ .

$N$  : Nombre de tours que fait le lieu complet de Nyquist ( $\omega$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ ) autour du point Critique  $(-1,0)$  dans le sens trigonométrique.

Le système est **stable** à condition que  $Z = 0 \rightarrow P = N$ .

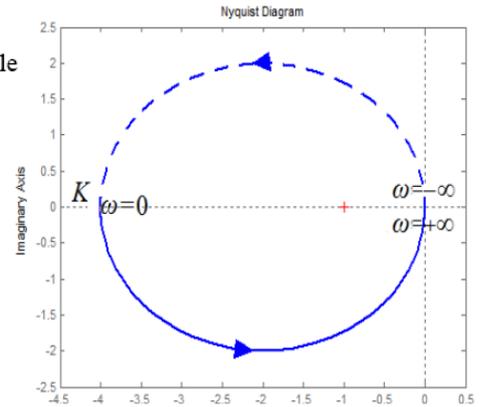
**Exemple** : soit un système à retour unitaire dont :

**Exemple** : soit un système à retour unitaire dont :

$$G(p) = \frac{K}{1-\tau p} \quad (\tau > 0). \text{ Discutons sa stabilité suivant les valeurs de } K$$

➤  $K < -1$

$P = 1, N = 1, Z = P - N = 0 \rightarrow$  Ce système est instable en boucle ouverte et stable en boucle fermée

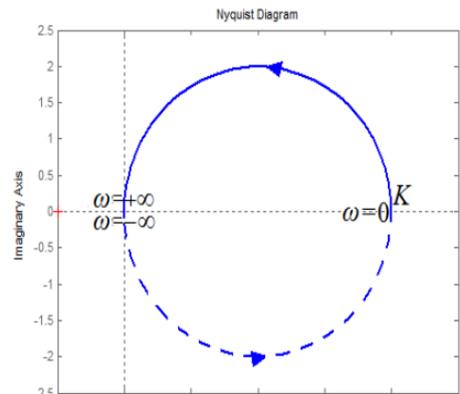


➤  $K > 0$

La  $G_{BO}(p)$  à un pôle instable  $p = \frac{1}{\tau} \Rightarrow P = 1$ .

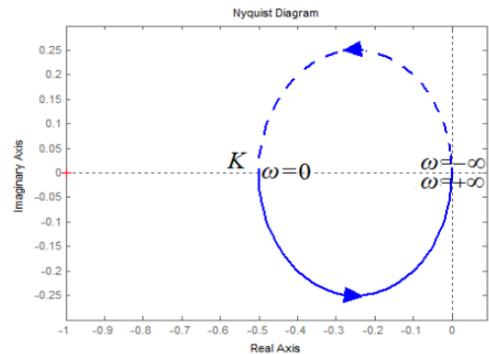
Le nombre de tours autour du point  $(-1, 0) : N = 0$ .

$Z = P - N = 1 \neq 0 \rightarrow$  Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée.



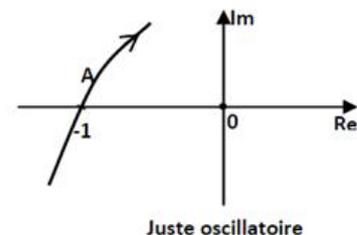
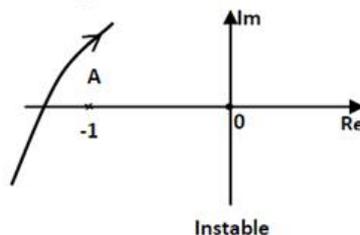
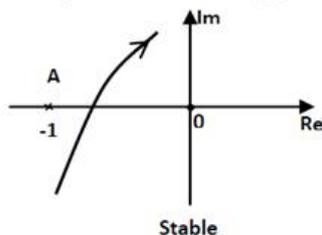
➤  $-1 < K < 0$

$P = 1, N = 0, Z = 1 \neq 0 \rightarrow$  Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée.



**Critère du revers dans le plan complexe : Un système asservi linéaire est stable si, en parcourant dans le sens des pulsations croissantes le lieu de transfert dans le plan complexe de la FTBO on laisse le point critique  $(-1, 0)$  sur la gauche.**

Le point A(-1) est appelé point critique.

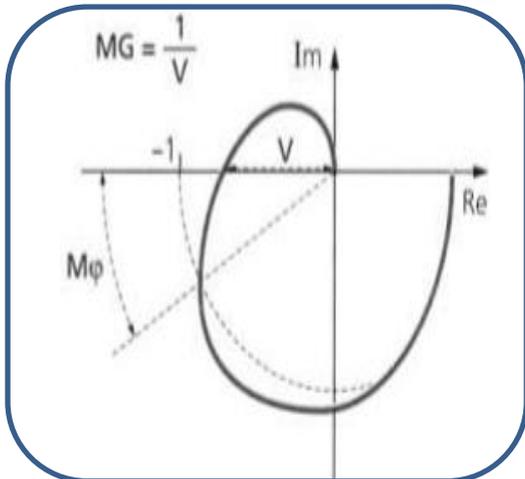


**B-2 Stabilité Relative**

La marge de phase MP :  $MP = 180^\circ + \phi(\omega_{c0})$

La marge de Gain MG :  $MG = \frac{1}{AdB(\omega_\pi)}$

Pour qu'un système soit stable , il faudrait que:  $MG > 0$  et  $MP > 0$ .



Explication de la marge de gain associée au module  $\frac{1}{V}$  :

$$M_G = -20 \log |H(j\omega_{-180^\circ})| = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega_{-180^\circ})|} = 20 \log \frac{1}{V}$$

Remarque : On remarque très clairement que si le gain augmente, les marges de stabilité diminuent.

Exemple :

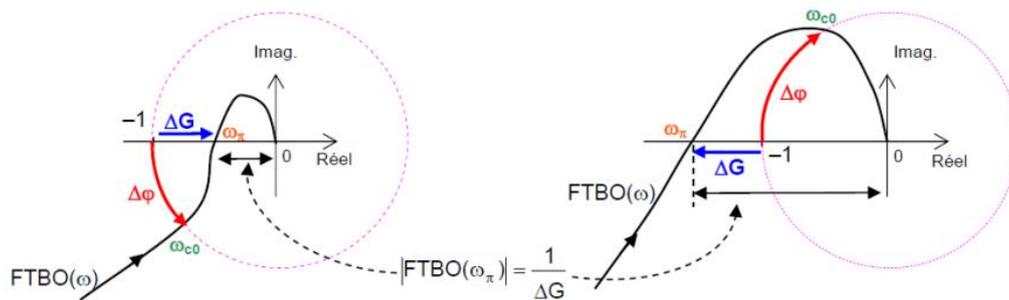


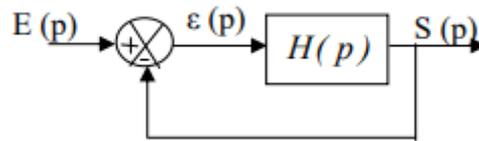
Illustration des marges de gain et de phase sur le lieu de Nyquist (cas d'un système stable)

Illustration des marges des gain et de phase sur le lieu de Nyquist (cas d'un système instable)

**5.3/ Critère de Précision:**

**a/définition**

La précision d'un système asservi linéaire est définie à partir de l'erreur  $\varepsilon$  entre la grandeur de consigne **E** et la grandeur de sortie **S**.



On distingue deux types de précisions :

- la précision statique : l'erreur statique en régime permanent  $\varepsilon_s$
- la précision dynamique : dépend des caractéristiques d'évolution en régime transitoire  $\varepsilon(t)$

**Erreur statique** : c'est l'écart entre la consigne et la sortie réelle en régime permanent

L'erreur en régime permanent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \varepsilon_s$$

Donc ;d'après le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$$

On a  $\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$  et  $S(p) = \varepsilon(p)H(p) \Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+H(p)}$

D'où :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1+H(p)}$$

L'erreur statique  $\varepsilon_s$  dépend du signal de consigne  $E(p)$  et de la FTBO ( $H(p)$ ).

Pour la consigne on a trois choix:

Consigne échelon :  $E(p) = \frac{1}{p}$  Erreur statique de position  $\varepsilon_p$

Consigne rampe :  $E(p) = \frac{1}{p^2}$  Erreur statique de vitesse (trainage)  $\varepsilon_v$

Consigne parabole :  $E(p) = \frac{1}{p^3}$  Erreur statique en accélération  $\varepsilon_a$

Dans le cas où l'on peut écrire la FTBO sous la forme :  $\frac{K.(1+b_1P+\dots+b_mP^m)}{P^\alpha(1+a_1P+\dots+a_nP^{n-\alpha})}$

Quelques cas de calcul de l'erreur:

1<sup>er</sup> cas: consigne échelon  $E(p) = \frac{1}{p}$  avec:  $\alpha=0$  (c'est à dire s'il n'y a pas d'intégration dans la boucle ouverte)

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{p}}{1 + K \cdot \frac{1 + b_1p + \dots}{1 + a_1p + \dots}} = \frac{1}{1 + K} \neq 0 \rightarrow \text{le système n'est pas précis}$$

2<sup>ème</sup> cas :  $E(p) = \frac{1}{p}$  avec :  $\alpha=1$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{K}{p} \frac{1 + b_1 p \dots}{1 + a_1 p + \dots}} = 0 \rightarrow \text{le système est précis}$$

1<sup>ère</sup> conclusion : l'erreur statique de position est nulle lorsque la classe( $\alpha$ ) de la FTBO  $\geq 1$

3<sup>ème</sup> cas : consigne rampe,  $E(p)=\frac{1}{p^2}$  avec :  $\alpha=0$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + K \cdot \frac{1 + b_1 p \dots}{1 + a_1 p + \dots}} = \infty \quad (\text{erreur} \rightarrow \text{vers la divergence})$$

4<sup>ème</sup> cas :  $E(p)=\frac{1}{p^2}$  avec :  $\alpha=1$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + \frac{K}{p} \frac{1 + b_1 p \dots}{1 + a_1 p + \dots}} = \frac{1}{K}$$

5<sup>ème</sup> cas :  $E(p)=\frac{1}{p^2}$  avec :  $\alpha=2$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + \frac{K}{p^2} \frac{1 + b_1 p \dots}{1 + a_1 p + \dots}} = 0$$

2<sup>ème</sup> conclusion : l'erreur statique de vitesse est nulle lorsque la classe de la FTBO est  $\geq 2$

Remarque : pour la 3<sup>ème</sup> consigne en suit les mêmes étapes

**Récapitulation** : L'erreur statique pour différents systèmes est résumée dans le tableau suivant:

	Classe 0 $\alpha = 0$	Classe 1 $\alpha = 1$	Classe 2 $\alpha = 2$
Ecart de position	$\frac{1}{1+k}$	0	0
Ecart de traînage	$\infty$	$\frac{1}{k}$	0
Ecart en accélération	$\infty$	$\infty$	$\frac{1}{k}$

Exemple : On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{10}{p(p+1)^2}$$

Calculer, en boucle fermée, l'erreur de position et l'erreur de vitesse de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{p}}{1+G(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{p}}{1+\frac{10}{p(p+1)^2}} = 0$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{p^2}}{1+G(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{p^2}}{1+\frac{10}{p(p+1)^2}} = \frac{1}{10} = 0,1$$

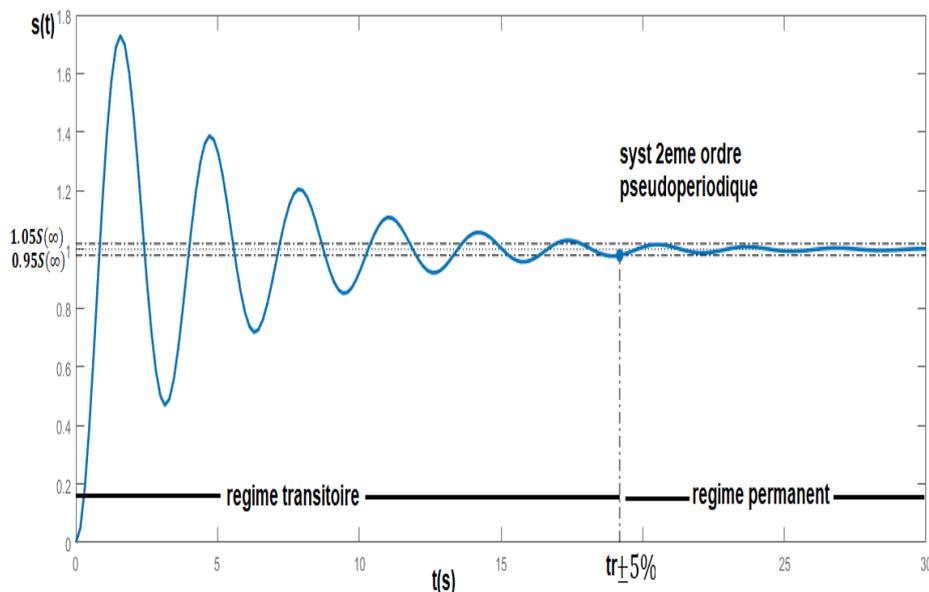
**5.4/ critère de rapidité:**

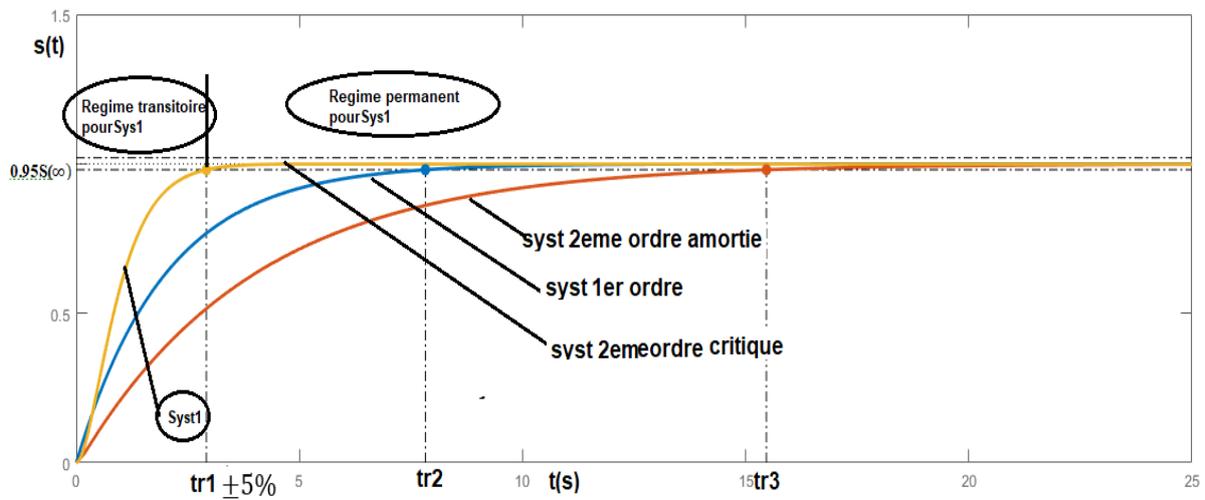
c'est le temps que met le système à réagir à une variation

brusque de la grandeur d'entrée aussi on peut dire que c'est la durée du régime transitoire. La rapidité est généralement caractérisée par

Le temps de réponse  $t_r$  à  $\pm 5\%$ (temps de stabilisation) qui est le temps mis pour que sa sortie atteigne et reste dans l'intervalle [ 95% ; 105% ] de la valeur finale stabilisée.

Calcul graphique du temps de réponse:





Pour les formules :on a des formules approximatives

1/ Système 1<sup>er</sup> ordre on a :  $t_{r(\pm 5\%)} \cong 3\tau$

2/Système 2eme ordre on a : pour :  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$   $\longrightarrow$   $t_{r(\pm 5\%)} = \frac{3}{\omega_n}$

$\xi \gg 1$   $\longrightarrow$   $t_{r(\pm 5\%)} = \frac{6\xi}{\omega_n}$

$\xi \ll 1$   $\longrightarrow$   $t_{r(\pm 5\%)} = \frac{3}{\xi\omega_n}$

## ***Références Bibliographiques***

1. E. K. Boukas, Systèmes asservis, Editions de l'école polytechnique de Montréal, 1995.
2. P. Clerc. Automatique continue, échantillonnée : IUT Génie Electrique-Informatique Industrielle, BTS Electronique- Mécanique-Informatique, Editions Masson (198p), 1997.
3. Ph. de Larminat, Automatique, Editions Hermes 2000.
4. P. Codron et S. Leballois, Automatique : systèmes linéaires continus, Editons Dunod 1998.
5. Y. Granjon, Automatique : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, Editions Dunod 2001.
6. K. Ogata, Modern control engineering, Fourth edition, Prentice Hall International Editions 2001.
7. B. Pradin, Cours d'Automatique. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité GII.
8. M. Rivoire et J.-L. Ferrier, Cours d'Automatique, tome 2 : asservissement, régulation, commande analogique, Editions Eyrolles 1996.
9. Y. Thomas, Signaux et systèmes linéaires : exercices corrigées, Editions Masson 1993. 10. Y. Thomas. Signaux et systèmes linéaires, Editions Masson 1994.