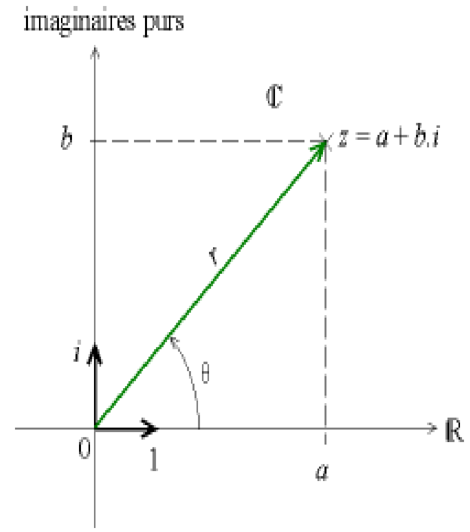
CHAPITRE 1

Année universitaire
2024/2025



Les Nombres Complexes

(Rappels)

Electrotechnique Fondamentale 1

2eme année License tronc commun ST

Filières Génie électrique

Contenu du chapitre 1

Ce chapitre couvre les points suivants :

- **Opérations arithmétiques dans ℂ**
- **Forme cartésienne d'un NC**
- **Forme trigonométrique**
- **Représentation par une exponentielle d'un NC**
- **Formule de Moivre**
- **Application trigonométrique des formules d'EULER**

Prof. Megherbi Ahmed chaouki

Chargé de Cours

Département de Génie électrique

Université Mohammed Khider Biskra

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider - Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologie

Tronc commun des Sciences et Technologie

L'essentiel du cours

Electrotechnique fondamentale 1

Niveau:

2ème année Tronc commun ST (3eme Semestre)

Tous les Filières de Génie Electrique

Préparé par:

Professeur ***Megherbi Ahmed Chaouki***

Département de Génie électrique

Année Universitaire 2024/2025

CHAPITRE 1

I. Rappels Mathématiques sur les nombres complexes

I. Rappels Mathématiques sur les nombres complexes

Les nombres complexes constituent un outil mathématique puissant dans la résolution de plusieurs problématiques dans plusieurs disciplines de l'ingénierie principalement dans le domaine de génie électrique. Dans le contenu de ce chapitre on va essayer de donner des rappels sur les opérations arithmétiques des nombres complexes et sur leurs représentations sous forme algébrique (cartésienne), polaire (trigonométrique) et exponentielle, certaines propriétés vont être également abordées ; tels que le conjugué d'un nombre complexe, module et argument. Des formules de Moivre et d'Euler vont être rappelées.

I.1. Nombres complexes

I.1.1 Définition

Un nombre *complexe* Z s'écrit selon la forme suivante :

$$\boldsymbol{Z = A + i\,B}$$

A et B étant des nombres réels (A et B $\in \mathbb{R}$) et ***i*** un nombre dit imaginaire tel que :

$$\boldsymbol{i^2 = -1} \qquad \textbf{et} \qquad \boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$$

A *est appelé* ***la partie réelle*** *de Z et* ***B*** ***la partie imaginaire*** *de Z :*

On note : *A = Re(z)* *et* *B = Im(z).*

$A + i\,B$ est la forme algébrique (cartésienne) du nombre complexe Z

- Un nombre complexe Z est dit **imaginaire pure** si partie réelle de Z est nulle (**A = 0**) .
- Un nombre complexe Z est dit **un nombre réel** si partie imaginaire de Z est nulle (**B = 0**) .

Exemples :

- ✓ $Z = 6 - 3\,i$ (un nombre complexe)
- ✓ $Z = 4\,i$ (un nombre complexe **imaginaire pure)**
- ✓ $Z = 4$ (un nombre complexe **réel)**

I.2. Opérations arithmétiques dans ℂ

Les opérations arithmétiques dans l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

I.2. 1.Egalité de deux nombres complexes

On dit que deux nombres complexes $Z_1 = a_1 + i\,b_1$ et $Z_2 = a_2 + i\,b_2$ sont égaux si et seulement si:

$$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}}$$

Par conséquent, un nombre complexe Z est nulle (est égale à zéro) alors on a:

$$\boldsymbol{Z = a + i\,b = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}}$$

I.2. 2.Principales opérations sur les nombres complexes

- **<u>Addition :</u>**

La somme de deux nombres complexes $Z_1 = a_1 + i\,b_1$ et $Z_2 = a_2 + i\,b_2$ se calcule comme suit:

$$\begin{array}{rl} & \boldsymbol{Z_1 = a_1 + i\,b_1} \\ + & \boldsymbol{Z_2 = a_2 + i\,b_2} \\ \hline & \boldsymbol{Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_1) + i\,(b_1 + b_2)} \end{array}$$

- **<u>La soustraction</u> :**

De même pour la différence de deux nombres complexes $Z_1 = a_1 + i\,b_1$ et $Z_2 = a_2 + i\,b_2$ est un nombre complexe qui se calcul comme suit :

$$\begin{array}{rl} & \boldsymbol{Z_1 = a_1 + i\,b_1} \\ - & \boldsymbol{Z_2 = a_2 + i\,b_2} \\ \hline & \boldsymbol{Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_1) + i\,(b_1 - b_2)} \end{array}$$

- **Multiplication**

Pour deux nombres complexes Z_1 *et* Z_2:
$z_1= a_1+i\, b_1$ et $z_2= a_2+i\, b_2$
Leurs produit est un nombre complexe qui se calcule comme suit :

$$Z_1 * Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(b_1 a_2 - a_1\, b_2)$$

Un cas particulier : Le carrée d'un nombre complexe z est donc :

$$Z^2 = (a + i\,b)^2 = a^2 - b^2 + i\,2\,ab$$

- **Le Conjugué d'un nombre complexe**

Le **conjugué** d'un nombre complexe Z : z = a + ib est un nombre complexe noté $\overline{Z}$ dont la partie imaginaire est de signe contraire de Z qui s'écrit sous forme algébrique :

$$\overline{Z} = a - i\,b$$

On peut déduire des propriétés suivantes :

$$Z + \overline{Z} = 2\,\Re(Z) = 2a$$

Et

$$Z - \overline{Z} = 2\,IM(Z) = i\,2b$$

- **Inverse d'un nombre complexe non nul**

Pour tout nombre complexe Z non nul, admet un nombre complexe inverse qui s'écrit sous forme algébrique:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{\overline{Z}}{Z\,\overline{Z}} = \frac{a}{(a^2+b^2)} - i\,\frac{b}{(a^2+b^2)}$$

Exemple :

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)\,(3-4i)} = \frac{3}{25} - i\frac{4}{25}$$

Opérations sur les complexes conjugués

Pour tout nombre complexe z (z et $\bar{z}$ sont conjugués l'un de l'autre) on a les propriétés suivantes:

- $\overline{(\bar{z})} = z$
- Z est un nombre réel si et seulement si $\bar{z} = z$.
- Z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.
- Si z = a + i b , alors :

$$\boldsymbol{Z \,.\, \overline{Z} = a^2 + b^2}$$

- On peut démontrer que :

* Pour tous z_1 et z_2 de ℂ, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 \,.\, z_2} = \overline{z_1} \,.\, \overline{z_2}$.
* Pour tout z non nul, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Conséquences: Pour tout nombre complexe z , z_1 et z_2 :

- $\boldsymbol{\overline{(-Z)} = -\overline{Z}}$
- $\boldsymbol{\overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}}$
- $\boldsymbol{Si\ Z_2 \neq 0,\ alors\ \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}}$
- ***Pur tout α ϵ IR, On a:*** $\boldsymbol{\overline{\alpha Z} = \alpha \overline{Z}}$
- ***Pur tout n ϵ IR, On a:*** $\boldsymbol{\overline{Z^n} = (\overline{Z})^n}$

I.3 - Représentation géométrique des nombres complexes

I.3.1 – Image d'un nombre complexe

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (fig. I.1), on peut associer un point M de coordonnées (a, b) à tout nombre complexe z = a + ib

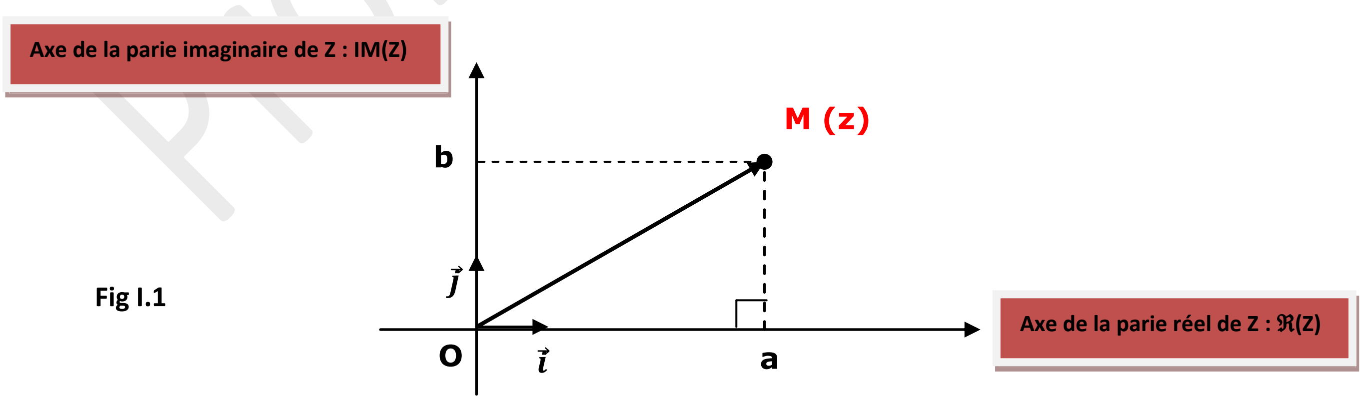


Fig I.1

On dit que :

- Le point M est **l'image** du nombre complexe z dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$
- Le nombre complexe Z est **l'affixe** du point M.

.**Propriétés**:

- Les images du complexe Z et de son opposé -Z sont symétriques par rapport à l'origine O.
- Les images du complexe Z et de son conjugué $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

I.3.2 - Module d'un nombre complexe

D'après la figure I.1, **le module d'un nombre complexe** Z, dont l'image est M, est la distance OM. On note $|Z| = OM$

Posons z = a + ib, alors $\vec{OM} = a\,\vec{e_1} + b\,\vec{e_2}$

$$|Z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Z\,\bar{Z}}$$

Un cas **particulier**, pour un nombre complexe réel : Z = **a** alors $|Z| = \sqrt{a^2} = a$

Inégalité triangulaire :

On démontre que pour tous nombres complexes z_1 et z_2 de $\mathbb{C}$, $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

$$|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$$

<u>Module d'un produit :</u>

Si on considère les nombres complexes quelconques suivants : z, z_1 et z_2 , on peut démontrer que :

|

$$|Z_1 * Z_2| = |Z_1| * |Z_2|$$

$$pour\ z \neq 0\ on\ a : \left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$$

$$pour\ Z_2 \neq 0\ on\ a : \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$pour\ n \in \mathbb{N}\ et\ Z_2 \neq 0\ on\ a : |Z^n| = |Z|^n$$

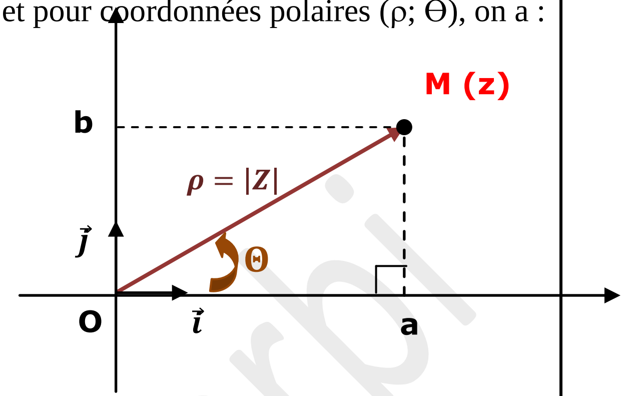
I.3.2 Argument d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme : z = | z |(cos θ + i sin θ).

En posant I z I = ρ,===➔ z = ρ(cos θ + i sin θ). ρ est le module de z et θ un argument de z.

Si on considere un nombre complexe Z non nul son image dans un repère orthonormé $(\vec{\iota},\vec{\jmath})$ fig I.2 est le point M qui a pour coordonnées cartésiennes (a, b) et pour coordonnées polaires (ρ; Θ), on a :

$$\begin{cases} a = \rho \cos\Theta \\ \text{et} \\ b = \rho \sin\Theta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\Theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\Theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$



ρ étant le module du nombre complexe Z :

Forme algébrique : $Z = a + i\,b$

$Z = \rho\cos\Theta + i\,\rho\sin\Theta$

- Forme **trigonométrique** : $Z = \rho(\cos\Theta + i\ \sin\Theta)$

I.4.- Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

$$Z = |Z|(\cos\Theta + i\,\rho\sin\Theta)$$

et

$$Z' = |Z'|(\rho\cos\Theta' + i\,\rho\sin\Theta')$$

Ainsi pour :

- **Egalité de deux nombres complexes**

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument.

$$Z = Z' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |Z| = |Z'| \\ et \\ \Theta = \Theta' \end{cases}$$

- **Conjugués et opposés**

Deux complexes non nuls **sont conjugués** si et seulement si ils ont le même module et des arguments opposés.

$$|\bar{Z}| = |Z| \ \ et \ \ arg(\bar{Z}) = -\arg(Z)$$

Deux complexes non nuls **sont opposés** si et seulement si ils ont le même module et des arguments de différence π + kπ (k ∈ Z).

$$|-Z| = |Z| \ \ et \ \ arg(-Z) = \arg(Z) + k\pi$$

- **Argument d'un produit de deux nombres complexes**

Soit z et z' deux complexes non nuls dont leurs arguments sont respectivement sont : Θ et Θ'

- $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') = \Theta + \Theta'$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) = -\Theta$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') = \Theta - \Theta'$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) = n\Theta$, pour tout n ∊ Z.

I.5. Formule de Moivre

La forme dite **formule de Moivre** s'écrit:

$$(\cos\Theta + i\sin\Theta)^n = \cos(n\Theta) + i\sin(n\Theta) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

Il est à conseillé que pour les opérations arithmétiques dans C, on utilise

- La **forme algébrique** des nombres complexes **pour les additions et soustractions**.
- La **forme trigonométrique** des nombres complexes **pour les multiplications, divisions et puissances.**

I.6. Forme exponentielle des nombres complexes

La forme exponentielle d'un nombre complexe est basée sur la formule d'Euler :

$$e^{i\Theta} = \cos\Theta + i\sin\Theta$$

Ainsi **un nombre complexe Z sous forme exponentielle, s'écrit :**

$$Z = |Z|\, e^{i\Theta}$$

Propriétés

Soit z et z' deux complexes non nuls indiqués avec leurs formes exponentielles suivantes :

$z = |z|\, e^{i\theta}$ et $z' = |z'|\, e^{i\theta'}$.

On peut énoncer les propriétés suivantes :

- ✓ $z \cdot z' = |z| \cdot |z'| \; e^{i(\theta+\theta')}$
- ✓ $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|\, e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|}\, e^{-i\theta}$

- ✓ $\frac{z}{z'} = \frac{|z|\, e^{i\theta}}{|z'|\, e^{i\theta'}} = \frac{|z|}{|z'|}\, e^{i\theta - i\theta'}$
- ✓ $z^n = (\,|z|\,.\,e^{i\theta})^n = |z|^n\,.\,e^{in\theta}$, pour $n \in Z$.

Remarque

- Dans la notation exponentielle, la formule de Moivre s'écrit :

$$\left(e^{i\Theta}\right)^{n} = e^{in\Theta}$$

I.7. Théorème d'Euler

Pour tout réel θ, on a :

$$e^{i\Theta} = \cos\Theta + i\ \sin\Theta$$
$$e^{-i\Theta} = \cos\Theta - i\ \sin\Theta$$

Par addition et soustraction membre à membre des deux relations précédentes, on a :

$$\begin{cases} \cos\Theta = \dfrac{e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}}{2} \\ \\ \sin\Theta = \dfrac{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}{2i} \end{cases}$$

1-8. Application à l'électricité des nombres complexes (détail dans la séance de cours Amphi3):

Dans un régime sinusoïdal de la représentation des valeurs instantanées du courant i(t) et tension v(t) par des nombres complexes est très importantes dans l'analyse des circuits électriques.
Ainsi un courant dont la valeur instantanée dans la forme générale :

$$i(t) = I_{max}\ \sin(\omega t + \varphi_i) = I_{eff}\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \varphi_i)$$

peut être représenté dans le plan complexe par le courant complexe $\bar{I}$ qui s'écrit :

$$\bar{I} = I_{eff}\, e^{j\varphi_i} = I_{eff}\,[\cos(\varphi_i) + j\ \sin(\varphi_i)]$$