الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
جامعة محمد خيضر بسكرة – الجزائر–
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الإقتصادية

مطبوعة بعنوان:

رياضيات المؤسسة

محاضرات مقدمة لطلبة السنة الثانية
العلوم الإقتصادية

من إعداد:
الدكتور ميّاح عادل

2023/2022

مقدمة:

إن عملية اتخاذ القرارات هي عملية ملازمة للإنسان منذ أول نشأته، حيث كان عليه أن يقرر كيف يعيش وأين يعيش، وكيف يحمي نفسه. كما أنه كان بحاجة إلى اتخاذ قرار بشأن أية مشكلة تواجهه في حياته. لقد كان الأفراد يتخذون قراراتهم معتمدين على قدراتهم و خبراتهم و ظروفهم الشخصية، و البيئة التي يعيشون فيها والتي تشكل بحد ذاتها تعقيدا ً لهذه العملية إضافة إلى الصعوبة المتمثلة بعدم توافر أسس علمية ثابتة و متعارف عليها لهذه العملية. إلا أنه و نتيجة لازدياد حجم المشاكل التي تواجه الإنسان وتداخلها وتقسيم العمل وتعدد الإدارات والأقسام، وكذلك تنوع المنتجات والسلع الذي أدى إلى تعقيد الأعمال وظهور كثير من المشكلات الإدارية والإنتاجية، كان لا بد من البحث عن أساليب أكثر فعالية لمواجهة هذه المشكلات.

من هنا جاءت رياضيات المؤسسة كتطبيق علمي للطرق الرياضية و الإحصائية في حل مختلف المشاكل الإدارية و الاقتصادية، التي تواجه متخذ القرار في أداء مهامه، و القابلة للتكميم بالدرجة الأولى.

تُعرف رياضيات المؤسسة بأنها إحدى الوسائل التحليلية التي تُوظَّف في حل المشاكل واتخاذ القرارات، وتعتبر رياضيات المؤسسة ذات فائدة كبيرة لإدارة المنظمات، فمن خلالها، تُقسم المشكلة إلى مشاكل فرعية، ثم تحل بإتباع خطوات محددة من خلال التحليل الرياضي. هناك العديد من التخصصات التي تماثل رياضيات المؤسسة أو تتداخل معها، ومنها: التحليل الإحصائي، ونظرية التحسين، وعلوم الإدارة، ومجالات الذكاء الاصطناعي، وتحليل الشبكات، وتشترك جميع هذه التقنيات بأنها تهدف إلى حل المشكلات المعقدة، وتحسين القرارات.

و في إطار هذه الأهمية، نسعى من خلال هذه المحاضرات إلى تقديم أبرز مكونات مقياس رياضيات المؤسسة، بدءًا بالبرمجة الخطية وجدول السمبلكس مرورا بالبرمجة الثنائية و تحليل الحساسية، وصولا لمسائل النقل، متوخين في ذلك البساطة و التعمق في تقديم الأمثلة التطبيقية.ولتناول هذا المحاضرات بشيء من التفصيل؛ ارتأينا تقسيم هذا الموضوع إلى خمس فصول رئيسية:

- ✓ <u>الفصل الأول:</u> **البرمجة الخطية** ***Linear programming (LP)***
- ✓ <u>الفصل الثاني:</u> **جدول السمبلكس** ***Simplex Table***
- ✓ <u>الفصل الثالث:</u> **المسائل الثنائية في البرمجة الخطية** ***Binary problems in linear programming***
- ✓ <u>الفصل الرابع:</u> **تحليل الحساسية** ***Sensitivity analysis***
- ✓ <u>الفصل الخامس:</u> **مسائل النقل** ***Transportation problems***

الفصل الأول: البرمجة الخطية
Linear programming (LP)

1. مفهوم البرمجة الخطية.
2. إستخدامات البرمجة الخطية.
3. شروط إستخدام البرمجة الخطية.
4. صياغة نموذج البرمجة الخطية.
5. حل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية.
   - حالة تعظيم الأرباح باستخدام الرسوم البيانية.
   - حالة تقليل التكاليف باستخدام الرسوم البيانية.

الفصل الأول: البرمجة الخطية
Linear programming (LP)

تقدمت وسائل التحليل الرياضي للمشاكل الإدارية والاقتصادية تقدما كبيرا وتعتبر البرمجة الخطية إحدى هذه الوسائل وقد استخدمت كلمة *Programming* كأداة تهدف إلى استغلال الموارد المتاحة للمؤسسة من قوة عاملة ومواد أولية... الخ لتحقيق اكبر عائد ممكن.

وتهدف البرمجة الخطية إلى الإجابة بأسلوب التحليل الرياضي على بعض الأسئلة وحل المشاكل بما يحقق اكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة في ظل القيود والمحددات القائمة.

وعموما فان أداء أي عمل بأفضل الوسائل يعني في حد ذاته البحث عن الحدود الدنيا أو القصوى. فعندما تتعلق المشكلة بالتكاليف فإن الهدف عادة يكون الوصول إلى الحد الأدنى وإذا تعلق الأمر بالأرباح فان الهدف يكون هو الوصول إلى الحد الأقصى.

1. مفهوم البرمجة الخطية:

هي أداة رياضية تساهم في مساعدة المديرين عل اتخاذ قرارات إدارية تتعلق باستخدام الموارد المتاحة بهدف تحقيق أقصى عائد ممكن أو أقل تكلفة ممكنة. و لكن لا يعتبر هذا الاستخدام الوحيد لها فلا يكاد يخلو مجال من مجالات استخدام رياضيات المؤسسة إلا ونجد البرمجة الخطية تمثلجزء ءًمباشر ا أو غير مباشر من أسلوب الحل. **(عرب، 2008)**

البرمجة الخطية هي تكتيك رياضي يهتم بحل مشاكل الصناعة على وجه العموم فيما يتعلق بتصغير وتعظيم الدوال الخطية بوجود قيود قيود أطرافها متساوية وأقل من وأكبر من، ويرجع حل هذه المعادلات للعالم (George B. Dantzig 1947) ويستخدم تكتيك البرمجة الخطية لحل المشاكل العسكرية والمدنية والصناعية بالإضافة إلى تخطيط المدن ومجالات أخرى. **(الشيخ، 2009، صفحة 25)**

2. إستخدامات البرمجة الخطية:

إن إستخدامات البرمجة الخطية قد اتسعت لتشمل معظم نواحي الحياة سواء أكان ذلك في القطاع العام أو الخاص، في مؤسسة إنتاجية أو خدمية، وهادفة للربح أم غير هادفة، والأمثلة الآتية تعطي فكرة سريعة عن أوجه استخدام البرمجة الخطية:

– أحد مدراء المصانع يرغب في وضع جدول إنتاج وتحديد سياسة المخزون بالشكل الذي يعمل على إشباع الطلب في المستقبل وكذلك تقليل أو تخفيض مجموع تكلفة الإنتاج والتخزين إلى حدها الأدنى، علما أن هذا المدير قد فرضت عليه قيود متعلقة بالطلب وكذلك الطاقة الإنتاجية المتاحة؛

– محلل مالي يريد أن يحدد مكونات المحفظة المالية وبالشكل الذي يؤدي إلى زيادة العائد على الإستثمار. ويمكن تصور المبلغ الكلي المخصص للإستثمار والمبلغ المخصص للإستثمار في كل من الأسهم والسندات، كقيود على المحلل؛

– يرغب مدير التسويق في المؤسسات في تحديد كيفية توزيع ميزانية الإعلان المحددة بين البدائل المتعلقة بوسائل الإعلان المختلفة مثل: الراديو، والتلفزيون، الجرائد، والمجلات...الخ بحيث أن هذا التوزيع يؤدي إلى إختيار وسائل الإعلان التي تؤدي إلى تعظيم تأثير الإعلان (زيادة الطلب). حيث تمثل الميزانية وتوفر وسائل الإعلان المختلفة قيودا على مدير التسويق؛

– إحدى المؤسسات لها مخازن في مناطق متعددة وترغب في سد احتياجات مناطق مختلفة من محتويات هذه المخازن. وهنا نواجه مشكلة إشباع طلبات المناطق من المخازن المختلفة وبأقل تكلفة ممكنة. والقيود هنا هي احتياجات المناطق والكميات المعروضة أو المتوفرة في المخازن. **(الطراونة و عبيدات، 2009، صفحة 77)**

3. شروط إستخدام البرمجة الخطية:

يعتمد أسلوب البرمجة الخطية على مجموعة من الشروط أو الفرضيات الواجب توفرها من أجل التعبير عن المشكلة المواجهة رياضيا وأهمها:

– **العلاقة الخطية:** يجب أن تكون العلاقات بين العوامل والمتغيرات في المسألة خطية. ومن هذا الشرط تستمد البرمجة الخطية أسمها. ويعني ذلك أن تكون دالة الهدف والقيود المفروضة على المسالة على هيئة معادلات أو متراجحات من الدرجة الأولى؛

– **الشكل الكمي للمتغيرات:** يجب أن يكون من الممكن التعبير عن العوامل في المسألة في شكل كمي؛

– **عنصر التأكد:** يجب أن يتوفر عنصر التأكد من مختلف المعطيات التي تشكل المسألة، أي أن يكون المستقبل معروف بشكل تام ومن ثم تكون العلاقات معلومة ومؤكدة أيضا، كما يعني هذا أن نموذج البرمجة الخطية هو نموذج محدد؛

– **علاقة التأثير بين المجاهيل:** ويعني ذلك أن يكون هناك تأثير متبادل بين المجاهيل التي تشكل النموذج الرياضي والتي نسعى إلى تحديد قيمتها، حيث أن أي تغير في إحداها سيؤدي حتما إلى إحداث تغير في المجاهيل الأخرى بالزيادة و/أو النقصان؛

– **توفر البدائل:** يجب أن تكون هناك إستخدامات متعددة أو متنافسة للموارد المتاحة وهذا يعني وجود عدد من المجاهيل (متغيرين على الأقل) والتي تشكل الغاية من حل النموذج الرياضي للبرنامج الخطي. ويعني ذلك أنه بإمكان المؤسسة مثلا: إنتاج السلعة A أو السلعة B أو السلعة C أو كل هذه السلع مجتمعة أو بنسب معينة لأن وجود إستعمال وحيد للموارد المتاحة يلغي وجود البدائل ومن ثم المسألة ككل. **(كلية العلوم الإقتصادية، 2016)**

4. صياغة نموذج البرمجة الخطية :

إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية . و نعني بالنموذج هو التعبير عن علاقات واقعية بعلاقات رياضية مفترضة و مبنية على دراسة الواقع و تحليله وتبعا لصيغة المسألة يمكن تقييم النموذج إما بيانيا أو رياضيا. و بعد الانتهاء من تكوين النموذج الملائم يجب التأكد من مطابقته للمشكلة قيد الدراسة ثم الإنتقال إلى المرحلة التالية و المتمثلة في تقييمه و تحليله للتعرف على تأثيرات العوامل المختلفة في المشكلة و الوصول إلى الحل المناسب، ولكن ليس لكل مشكلة يمكن حلها بأسلوب البرمجة الخطية حيث يتطلب حل المشكلة بأسلوب البرمجة الخطية أن تتوافر الشروط التالية **(نصير، 2017)**:

– **تحديد دالة الهدف:** وهو الهدف المنشود والذي نرغب في تحقيقه وإمكانية التعبير عن هذا الهدف في صورة دالة خطية والحصول على قيمة رقمية له ومحاولة تعظيم هذه القيمة وإيجاد النهاية العظمى لها إذا كان الهدف المنشود ربحا أو تقليل القيمة وإيجاد النهاية الصغرى إذا كان الهدف تكلفة أي الوصول إلى أدنى تكلفة ممكنة ، وتتكون دالة الهدف من المتغيرات، أما المعامل الخاص بكل متغير هو عبارة عن ربح الوحدة الواحدة في حالة تعظيم دالة الهدف أو يكون المعامل عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة الهدف.

– **تحديد القيود(الموارد):** أي إمكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات القرارية والإمكانيات المتاحة في صورة قيود خطية وهي توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة في شكل متراجحات أو معادلات خطية أو خليط منها وتسمى بالقيود الهيكلية.

– **شرط عدم السلبية:** إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة. **(نصير، 2017)**

مثال 01:

يقوم صاحب مطعم بعمل شطائر اللحم يتكون من لحم بقر ولحم ماعز .يحتوي لحم البقر على 80 % لحم صافي و20 % دهون ويكلف 24 دج لكل كيلو الواحد في حين أن لحم الماعز على يحتوي 68 % لحم صافي و 32 % دهون ويكلف 18 دج لكل كيلو الواحد . **المطلوب:** ما هي كمية (وزن) اللحم من كل نوع الذي يجب أن يستخدمه صاحب المحل في كل كيلو من شطائر اللحم إذا علمت أنه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة علي نسبة الدهون بحيث لا تزيد عن25 % ؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: وزن لحم البقر المستخدم في الكيلو الواحد

x_2: وزن لحم البقر المستخدم في الكيلو الواحد

دالة الهدف:

$$Min\ Z = 24x_1 + 18x_2$$

القيود:

$$\begin{cases} 0{,}20\, x_1 + 0{,}32\, x_2 \le 0{,}25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 , x_2 \ge 0 \end{cases}$$

مثال 02:

تقوم شركة الأوراس للنجارة بصناعة منتوجين هما: الطاولات والكراسي، وتقوم ببيعها في الأسواق المحلية، حيث تحقق ربحا عن كل وحدة قدرها: 300 دج و 200 دج على التوالي.

وتسخر الشركة أقسامها الإنتاجية الثلاثة (نجارة ، تلحيم، طلاء) لإنتاج هذه المنتوجات، حيث يمر كل منتوج أثناء عملية الإنتاج على الأقسام الثلاثة حتى يصبح قابلا للبيع.

ويوضح الجدول التالي الوقت الذي يستغرقه كل منتوج في كل قسم بالإضافة إلى الطاقة المتاحة في كل قسم.

القسم	المنتوج		ساعات العمل المتاحة في كل قسم
	طاولة	كرسي	
النجارة	6 سا	6 سا	420 سا
التلحيم	3 سا	6 سا	300 سا
الطلاء	4 سا	2 سا	240 سا
الربح	300 دج	200 دج	

المطلوب: صياغة البرمجة الخطية والذي تعظم به الأرباح؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد الطاولات التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

x_2: عدد الكراسي التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

دالة الهدف : $\text{Max } Z = 300x_1 + 200x_2$

القيود:

قيد قسم النجارة: $6x_1 + 6x_2 \leq 480$

قيد قسم التلحيم: $3x_1 + 6x_2 \leq 300$

قيد قسم الطلاء: $4x_1 + 2x_2 \leq 240$

شرط عدم السلبية $x_1 , x_2 \geq 0$

مثال 03:

صائغ مجوهرات يصنع قلائد و أساور . هامش الربح للقلادة 32 دج وللسوار 24 دج . تتطلب القلائد ساعتين لقطع الأحجار و 7ساعات للتثبيت و 6ساعات للتلميع . والأساور تتطلب 5 ساعات لقطع الأحجار و7 ساعات للتثبيت و3 ساعات للتلميع. ويتوفر لدى الصائغ 40 ساعة لقطع الأحجار و 70 ساعة للتثبيت و 48 ساعة للتلميع. **المطلوب**: إيجاد التوليفة المثلى من الإنتاج والتي تعظم بها الأرباح ؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد القلائد التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

x_2: عدد الأساور التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

دالة الهدف:

$$Max\ Z = 32x_1 + 24x_2$$

القيود:

قيد القطع: $2x_1 + 5x_2 \leq 40$

قيد التثبيت: $7x_1 + 7x_2 \leq 70$

قيد التلميع: $6x_1 + 3x_2 \leq 48$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

مثال 04:

تقوم شركة مناجم بتشغيل ثلاثة مناجم فرعية تابعة لها. ويفصل الخام من كل منجم إلى نوعين قبل الشحن. ويبين الجدول التالي الطاقة الإنتاجية اليومية للمناجم، وكذلك التكلفة اليومية.

المنجم	نوعية الخام		تكلفة التشغيل 1000 دج/يوم
	خام عالي الجودة طن/يوم	خام قليل الجودة طن/يوم	
المنجم 01	4	4	20
المنجم 02	6	4	22
المنجم 03	1	6	18

ولقد إلتزمت الشركة بتسليم 54 طن من خام العالي الجودة، و 65 طن من قليل الجودة في نهاية كل أسبوع. كما أن للشركة تعاقدات مع العمال تضمن لها تواجد العمال بطول اليوم أو جزء من اليوم أثناء فتح المنجم . **المطلوب:** حدد عدد الأيام التي يجب أن يعملها كل منجم خلال الأسبوع المقبل للوفاء بالتزامات الشركة بأقل تكلفة ممكنة؟

الحل:

المتغيرات:

X_1: عدد الأيام التي سيعمل فيها العمال المنجم 01 خلال الأسبوع المقبل .

X_2: عدد الأيام التي سيعمل فيها العمال المنجم 02 خلال الأسبوع المقبل.

X_3: عدد الأيام التي سيعمل فيها العمال المنجم 03 خلال الأسبوع المقبل.

دالة الهدف: $Min\ Z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3$

القيود:

قيد الطلب من خام العالي الجودة: $4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54$

قيد الطلب من خام قليل الجودة: $4x_1\ 4x_2 + 6x_3 \geq 65$

قيد عدد الأيام $x_1 , x_2 , x_3 \leq 7$

شرط عدم السلبية $x_1 , x_2 \geq 0$

5. حل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية:

يتصف أسلوب الحل البياني بسهولته و وضوحه إلا أنه يعتبر أسلوبا مفيدا و صالحا للمشاكل التي تحتوي على متغيرين فقط، مثال ذلك: إنتاج سلعتين، و يتم التوصل إلى الحل باعتماد الطريقة البيانية من خلال تطبيق الخطوات التالية:

- تحديد النموذج الرياضي (دالة الهدف و القيود)؛
- تمثيل القيود بيانيا، على معلم متعامد و متجانس ؛
- تحديد منطقة الحلول الممكنة؛
- المفاضلة بين الحلول البديلة لاختيار البديل الأمثل. **(سالم، 2017)**

- **حالة تعظيم الأرباح باستخدام الرسوم البيانية:**

مثال 01:

ونعرض هذه الطريقة بالمثال الواقعي لتسهيل الشرح. افترض أن شركة ما متخصصة في صناعة: (حقائب النوم، وخيام) . وكل حقيبة نوم تستلزم 2 ساعة للقطع و 5 ساعات للخياطة و 1 ساعة للطلي ضد الماء، وكل خيمة تتطلب 1 ساعة للقطع و 5 ساعات للخياطة و 3 ساعات للطلي ضد الماء. وإذا علمت أن موارد الشركة هي 14 ساعة للقطع و 40 ساعة للخياطة و 18 ساعة للطلي ضد الماء في اليوم . وأن هامش الربح 50 دج في الحقيبة نوم الواحدة و30 دج في الخيمة الواحدة. **المطلوب:** إيجاد التوليفة المثلى من كلا المنتوجين لتحقيق أقصى ربح ممكن باستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:

المتغيرات:

X_1: عدد الوحدات المنتجة من حقائب النوم والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

X_2: عدد الوحدات المنتجة من الخيام والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

دالة الهدف: $Max\ Z = 50x_1 + 30x_2$

القيود:

قيد قسم القطع: $2x_1 + x_2 \leq 14$

قيد قسم الخياطة: $5x_1 + 5x_2 \leq 40$

قيد قسم الطلي ضد الماء: $x_1 + 3x_2 \leq 18$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

تحويل المتراجحات إلى معادلات:

قيد قسم القطع: $2x_1 + x_2 = 14$ 1

قيد قسم الخياطة: $5x_1 + 5x_2 = 40$ 2

قيد قسم الطلي ضد الماء: $x_1 + 3x_2 = 18$ 3

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

$2x_1 + x_2 = 14$ / (0,14) (7,0)

x_1	0	7
x_2	14	0

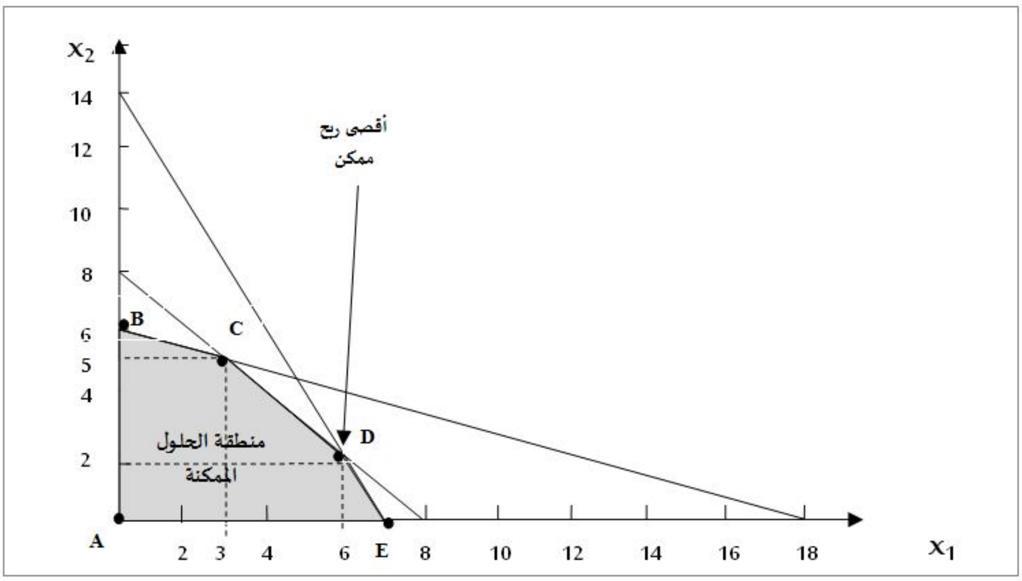
$5x_1 + 5x_2 = 40$/ (0,8) (8,0)

x_1	0	8
x_2	8	0

$x_1 + 3x_2 = 18$/ (0,6) (18,0)

x_1	0	18
x_2	6	0

التمثيل البياني:



إيجاد نقاط التقاطع المستقيمات مع بعضها:

– تقاطع المستقيم 2 مع 3:

$5x_1 + 5x_2 = 40$

$x_1 + 3x_2 = 18 \times(-5)$

$= 5\cancel{x_1} + 5x_2 = 40$

$-5\cancel{x_1} - 15x_2 = -90$

$= -10x_2 = -50$

$= \boxed{x_2 = 5}$

ومنه: $\boxed{x_1 = 3}$

أي: نقطة التقاطع هي: (3 , 5)

– تقاطع المستقيم 1 مع 2:

$2x_1 + x_2 = 14\times(-5)$

$5x_1 + 5x_2 = 40$

$= -10x_1 - 5\cancel{x_2} = -70$

$5x_1 + 5\cancel{x_2} = 40$

$= -5x_1 = -30$

$= \boxed{x_1 = 6}$

ومنه: $\boxed{x_2 = 2}$

أي: نقطة التقاطع هي: (6 , 2)

إيجاد الحل الأمثل في نقاط الأركان:

النقطة	الإحداثيات	**Max Z = 50x$_1$ + 30x$_2$**	النتيجة (الربح)
A	(0 , 0)	50(0)+30(0)	0 دج
B	(0 , 6)	50(0)+30(6)	180 دج
C	(3 , 5)	50(3)+30(5)	300 دج
D	(6 , 2)	50(6)+30(2)	360 دج
E	(7 , 0)	50(7)+30(0)	350 دج

القرار الإداري:

يجب على صاحب الشركة إنتاج 6 وحدات من حقائب النوم و 2 وحدة من الخيام وذلك لتحقيق أقصى ربح ممكن هو : 360 دج.

مثال 02:

ورشة للخياطة تقوم بإنتاج منتوجين: سراويل و معاطف، يمر كلا المنتوجين على ماكنتين: ماكنة الخياطة و ماكنة المكواة، لإنتاج وحدة واحدة من السراويل فإنه يلزم استخدام ساعتين من الزمن على ماكنة الخياطة و ساعة عمل واحدة على ماكنة المكواة، بينما تحتاج الوحدة الواحدة من المعاطف إلى ساعة عمل واحدة على كل من الماكنتين، و لأسباب تقنية فإن الماكنة الأولى لا تعمل أكثر من 10 ساعات في اليوم، بينما الماكنة الثانية لا تعمل أكثر من 6 ساعات يوميا.

ولأسباب متعلقة بالطلب السوقي، لا يمكن إنتاج أكثر من 4,5 وحدات من المنتوج الأول (سراويل) يوميا، وكذلك لا يمكن إنتاج أكثر من 4 وحدات يوميا من المنتوج الثاني (معاطف).

الوحدة الواحدة من السراويل تساهم بربح قدره 1,5 دج، بينما تساهم الوحدة الواحدة من المنتوج الثاني (معطف) بـ 1 دج. **المطلوب:** إيجاد التوليفة المثلى من كلا المنتوجين لتحقيق أقصى ربح ممكن باستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد الوحدات المنتجة من السراويل والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

x_2: عدد الوحدات المنتجة من المعاطف والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

دالة الهدف:

$$\text{Max } Z = 1{,}5x_1 + x_2$$

القيود:

قيد قسم الخياطة: $2x_1 + x_2 \leq 10$

قيد قسم الكي: $x_1 + x_2 \leq 6$

قيد خاص بالطلب السوقي من السراويل: $x_1 \leq 4{,}5$

قيد خاص بالطلب السوقي من المعاطف: $x_2 \leq 4$

شرط عدم السلبية $x_1 , x_2 \geq 0$

تحويل المتراجحات إلى معادلات: 1

قيد قسم الخياطة: $2x_1 + x_2 = 10$

قيد قسم الكي: $x_1 + x_2 = 6$ ②

قيد خاص بالطلب السوقي من السراويل: $x_1 = 4{,}5$ ③

قيد خاص بالطلب السوقي من المعاطف: $x_2 = 4$ ④

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

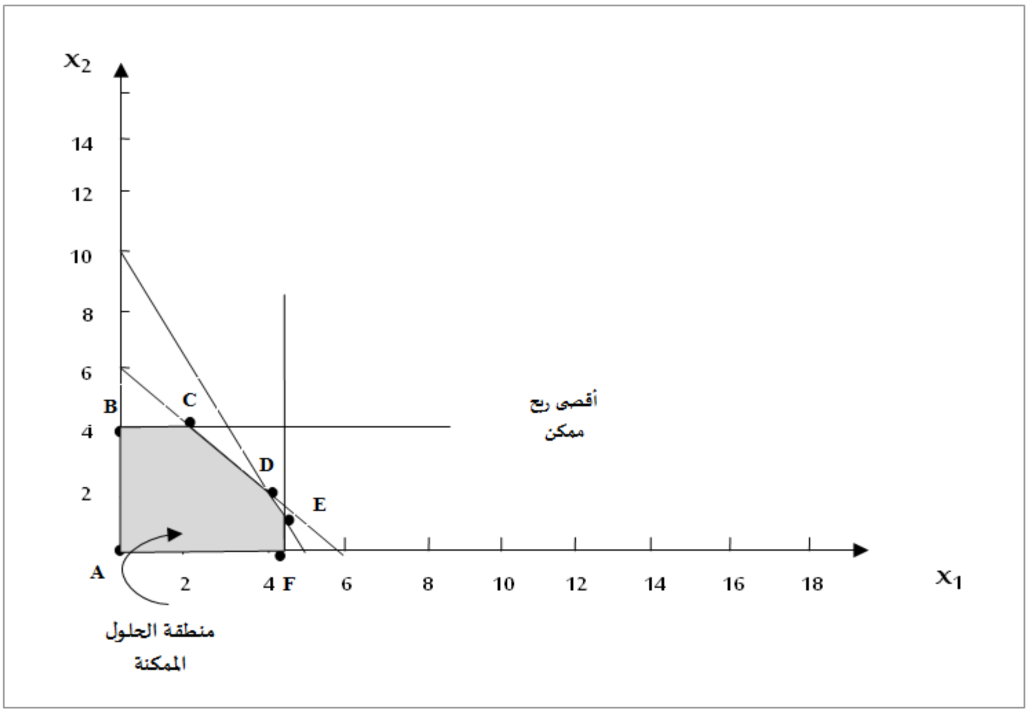
$2x_1 + x_2 = 10$ / (0,10) (5,0)

x_1	0	5
x_2	10	0

$x_1 + x_2 = 6$/ (0,6) (6,0)

x_1	0	6
x_2	6	0

التمثيل البياني:



إيجاد نقاط التقاطع المستقيمات مع بعضها:

– <u>النقطة C: تقاطع المستقيم 2 مع 4:</u>

$$2x_1 + x_2 = 10$$
$$x_2 = 4$$

$$= 2x_1 + (4) = 10$$

$=2x_1 = 6$

$= \boxed{x_1 = 3}$

أي: نقطة التقاطع هي: C(3,4)

– النقطة D: تقاطع المستقيم 1 مع 2:

$2x_1 + x_2 = 10$

$x_1 + x_2 = 6 \times (-2)$

$= \cancel{2}x_1 + x_2 = 10$

$\cancel{-2}x_1 - 2x_2 = -12$

$= -x_2 = -2$

$= \boxed{x_2 = 2}$

$\boxed{x_1 = 4}$

ومنه:

أي: نقطة التقاطع هي: D(4,2)

– النقطة E: تقاطع المستقيم 1 مع 3:

$2x_1 + x_2 = 10$

$x_1 = 4,5$

$= 2(4,5) + x_2 = 10$

$= \boxed{x_2 = 1}$

أي: نقطة التقاطع هي: E(4,5,1)

إيجاد الحل الأمثل في نقاط الأركان:

النقطة	الإحداثيات	$\text{Max } Z = 1,5x_1 + x_2$	النتيجة (الربح)
A	(0 , 0)	1,5(0)+ (0)	0 دج
B	(0 , 4)	1,5(0)+ (4)	4 دج
C	**(3 , 4)**	**1,5(3)+ (4)**	**8,5 دج**
D	(2 , 4)	1,5(2)+ (4)	7 دج
E	(4,5 , 1)	1,5(4,5)+ (1)	7,75 دج
F	(4,5 , 0)	1,5(4,5)+ (0)	6,75 دج

القرار الإداري:

يجب على صاحب ورشة الخياطة إنتاج 3 وحدات من سراويل و 4 وحدات من المعاطف وذلك لتحقيق أقصى ربح ممكن هو: 8,5 دج.

– **حالة تقليل التكاليف باستخدام الرسوم البيانية:**

مثال 01:

في إحدى المستشفيات الخاصة، طلب من المسؤول عن المطبخ أن تكون وجبة الإفطار الصباحية تستجيب للمتطلبات الغذائية اليومية من البروتين، الفيتامين و الحديد، و تكون بأقل تكلفة ممكنة؛ و بعد الاتصال بمتخصصين في التغذية تم التوصل إلى المعطيات التالية:

المتطلبات الغذائية اليومية	الوجبة		الحد الأدنى (وحدة/100غ)
	الوجبة 01 (وحدة/100غ)	الوجبة 02 (وحدة/100غ)	
البروتين	2	2	10
الفيتامين	2	1	7
الحديد	1,33	2	8
تكلفة (دج/100غ)	3	4	

المطلوب: إيجاد التوليفة المثلى من كلا الوجبتين بأقل تكلفة ممكنة باستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد الوحدات (الوجبة 01) والتي تحقق أقل تكلفة ممكنة .

x_2: عدد الوحدات (الوجبة 02) والتي تحقق أقل تكلفة ممكنة .

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 4x_2$$

القيود:

قيد مادة البروتين: $2x_1 + 2x_2 \geq 10$

قيد مادة الفيتامين: $2x_1 + x_2 \geq 7$

قيد مادة الحديد: $1{,}33x_1 + 2x_2 \geq 8$

شرط عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq 0$

تحويل المتراجحات إلى معادلات:

قيد مادة البروتين: $2x_1 + 2x_2 = 10$ ------------- 1

قيد مادة الفيتامين: $2x_1 + x_2 = 7$ ----------------- 2

قيد مادة الحديد: $1,33x_1 + 2x_2 = 8$ - ---------- 3

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

$2x_1 + 2x_2 = 10$ / (0 ,5) (5,0)

x_1	0	5
x_2	5	0

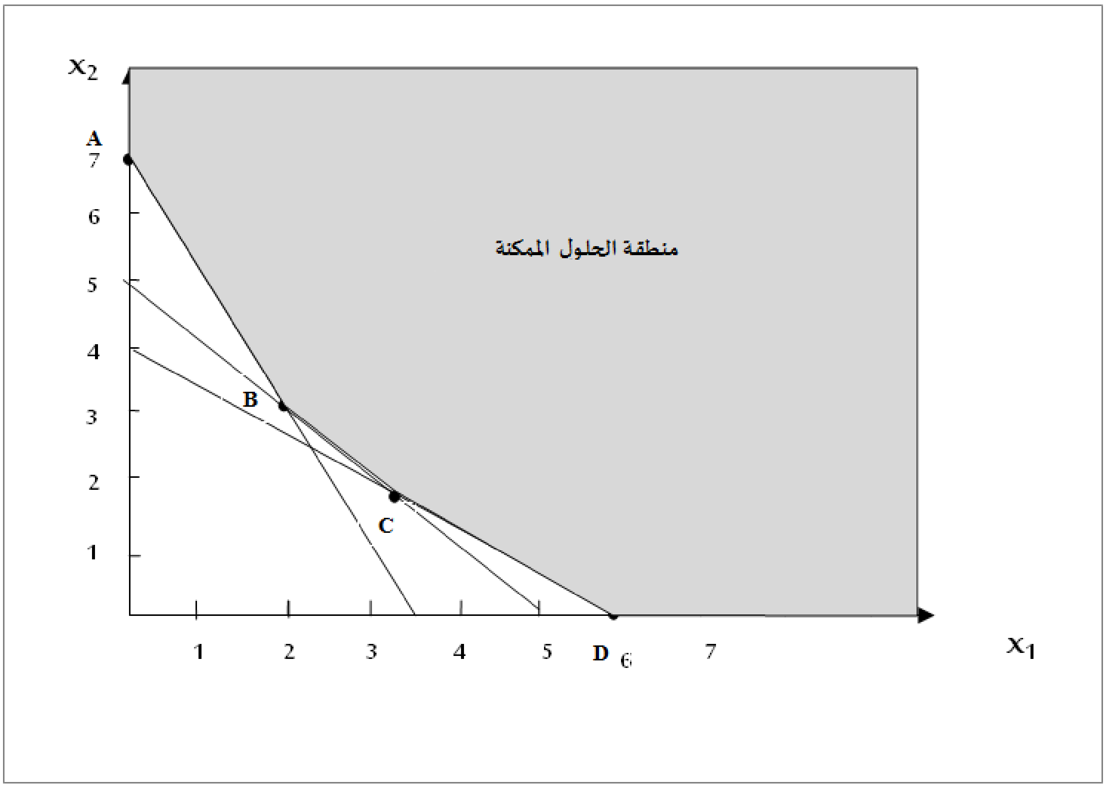
$2x_1 + x_2 = 7$ /(0 ,7) (3,5,0)

x_1	0	3,5
x_2	7	0

$1,33x_1 + 2x_2 = 8$

x_1	0	6
x_2	4	0

التمثيل البياني:



إيجاد نقاط التقاطع المستقيمات مع بعضها:

– النقطة B: تقاطع المستقيم 1 مع 2:

$2x_1 + 2x_2 = 10$

$2x_1 + x_2 = 7 \times (-1)$

$= \cancel{2}x_1 + 2x_2 = 10$

$\cancel{-2}x_1 - x_2 = -7$

$= -x_2 = -3$

$= \boxed{x_2 = 3}$

ومنه: $\boxed{x_1 = 2}$

أي: نقطة التقاطع هي: B(2,3)

– النقطة C: تقاطع المستقيم 1 مع 3:

$2x_1 + 2x_2 = 10$

$1{,}33x_1 + 2x_2 = 8 \times (-1)$

$= 2x_1 + \cancel{2}x_2 = 10$

$-1{,}33x_1 - \cancel{2}x_2 = -8$

$= 0{,}67x_1 = 2$

$= \boxed{x_1 = 3}$

ومنه: $\boxed{x_2 = 2}$

أي: نقطة التقاطع هي: C(3,2)

إيجاد الحل الأمثل في نقاط الأركان:

النقطة	الإحداثيات	$\text{Min } Z = 3x_1 + 4x_2$	النتيجة (التكلفة)
A	(0 , 7)	3(0)+ 4(7)	28 دج
B	(2 , 3)	3(2)+ 4(3)	18 دج
C	**(3 , 2)**	3(3)+ 4(2)	**17 دج**
D	(6 , 0)	3(6)+ 4(0)	18 دج

القرار الإداري:

يجب على مسؤول المطبخ إعداد 3 وجبات من (الوجبة 01) و 2 وجبة من (الوجبة 02) وذلك لتحقيق أقل تكلفة ممكنة قدرها: 17دج.

مثال 02:

ينوي صاحب إحدى مزارع الدواجن شراء نوعين من أنواع الغذاء المخصص للدواجن، ومزجها معا للحصول على خلطة جيدة وغذاء لدواجنه بنفس الوقت. كل نوع من النوعين المكونين للخلطة يحتوي بشكل كلي أو جزئي على مكونات اللازمة لتسمين الدواجن. فكل 1 كلغ من النوع الأول مثلا يحتوي على 10 غ من المكون A و 5غ من المكون B . وكذلك فإن كل 1 كلغ من النوع الثاني يحتوي على 5 غ من المكون A و 10غ من المكون B . علما بأن 1 كلغ من النوعين الأول والثاني يكلف ما مقداره 20 دج . ويرغب صاحب المزرعة في استخدام البرمجة الخطية لتحديد مزيج الخلطة الذي يؤدي إلى أقل التكاليف والتي تضمن توفير الإحتياجات الشهرية الدنيا الواجب توفرها. والجدول التالي يبين المعلومات ذات العلاقة بهذه المشكلة.

المكونات	مكونات (1 كلغ) من الغذاء بـ (غ)		الحد الأدنى لاحتياجات الصوص الواحد (غ)
	النوع الأول	النوع الثاني	
A	10	5	50
B	5	10	40
تكلفة 1 كلغ	20 دج	20دج	

الحل:

المتغيرات:

X_1: عدد الكيلوغرامات التي اشتريت من النوع الأول.

X_2: عدد الكيلوغرامات التي اشتريت من النوع الثاني.

دالة الهدف:

$$\text{Mix } Z = 20x_1 + 20x_2$$

القيود:

قيد المكون A:

قيد المكون B:

شرط عدم السلبية

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \geq 50 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

تحويل المتراجحات إلى معادلات:

قيد المكون A:

قيد المكون B:

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = 50 & (1) \\ 5x_1 + 10x_2 = 40 & (2) \end{cases}$$

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

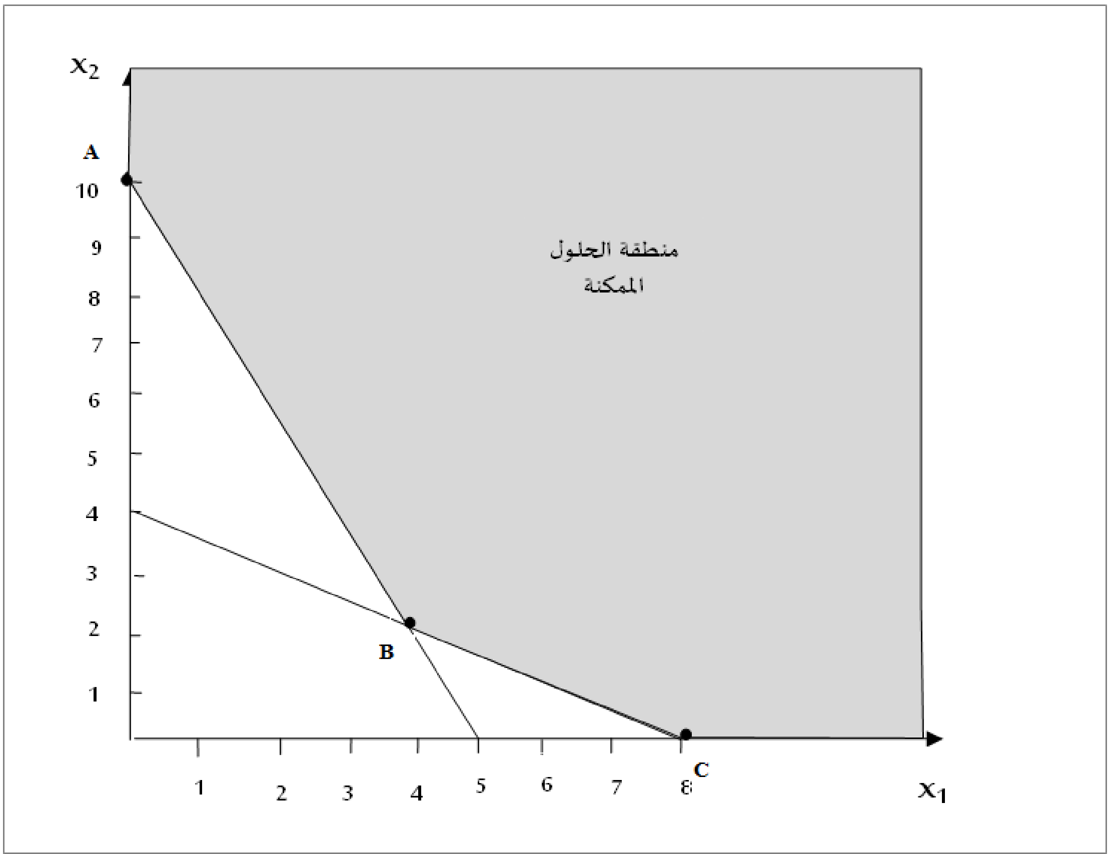
$10x_1 + 5x_2 = 50$ / (0,10) (5,0)

x_1	0	5
x_2	10	0

$5x_1 + 10x_2 = 40$ / (0,4) (8,0)

x_1	0	8
x_2	4	0

التمثيل البياني:



إيجاد نقاط التقاطع المستقيمين:

– النقطة B:

$$10x_1 + 5x_2 = 50$$

$$5x_1 + 10x_2 = 40 \quad \times(-2)$$

$$= \cancel{10}x_1 + 5x_2 = 50$$

$$-\cancel{10}x_1 - 20x_2 = -80$$

$$= -15x_2 = -30$$

$$= \boxed{x_2 = 2}$$

ومنه: $\boxed{x_1 = 4}$

أي: نقطة التقاطع هي: B(4,2)

إيجاد الحل الأمثل في نقاط الأركان:

النقطة	الإحداثيات	$Min\ Z = 20x_1 + 20x_2$	النتيجة (التكلفة)
A	(0 , 10)	20(0)+ 20(10)	200 دج
B	**(4 , 2)**	**20(4)+ 20(2)**	**120 دج**
C	(8 , 0)	20(8)+ 20(0)	160 دج

القرار الإداري:

يجب على صاحب المزرعة شراء 4 كلغ من المكون الغذائي الأول و 3كلغ من المكون الغذائي الثاني ، والذي يكلفه 120 دج (أقل تكلفة ممكنة).

الفصل الثاني: جدول السمبلكس
Simplex Table

1. مفهوم جدول سمبلكس *Simplex*.
2. خطوات حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس.
3. حالة تعظيم الأرباح.
4. حالة تخفيض التكاليف (طريقة *M* الكبيرة *Big-M Technique*).

الفصل الثاني: جدول السمبلكس
Simplex Table

كما أوضحنا سابقا قدرة وسهولة استخدام الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الخطية في حالة وجود متغيرين اثنين واستحالته بالنسبة للطريقة البيانية خاصة في حالة وجودأكثر من متغيرين أي ثلاثة متغيرات فأكثر. وتعد طريقة الحل بجدول السمبلكس Simplexe مجدية في هذا الخصوص لقدرتها على التعامل مع عدد كبير من المتغيرات وبطريقة مبسطة.

وتقوم طريقة السمبلكس Simplexe على فكرة إيجاد التحسن المستمر في دالة الهدف، أي أننا نبدأ من نقطة الأصل (الصفر) ونتحرك باتجاه تحسين دالة الهدف خطوة خطوة إلى أن نصل إلى الحل الأمثل الذي لا يمكن تحسين دالة الهدف بعده على الإطلاق. وتعتمد هذه الطريقة لحل المسائل البرمجة الخطية على قاعدة أساسية تم استنتاجها سابقا في الطريقة البيانية والتي تنص على أن أي حل لمسالة البرنامج الخطي سيكون على أحد أركان منطقة الحلول الممكنة، وبذلك تتجاهل هذه الطريقة الحلول الممكنة الأخرى وتركز على الأركان فقط.

1. مفهوم جدول سمبلكس *Simplex*

في حل نماذج البرمجة الخطية أول من قدم هذه الطريقة هو عالم الرياضيات G. Dantzing في سنة 1947، باعتبارها من الطرق الرياضية الكفوءة في معالجة المشكلات التي تتكون من اثنين أو أكثر من المتغيرات؛

إن فكرة هذه الطريقة قائمة على أساس إيجاد الحل المطلوب للمشكلة المدروسة (التي يتم التعبير عنها من خلال النموذج الرياضي في مراحل متسلسلة في إطار جدول السمبلكس الذي يتم تصميمه بما يتلائم ومتطلبات مراحل الحل وإيجاد قيم المتغيرات المجهولة.

يتم في المرحلة الأولى إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن، وفي المرحلة اللاحقة يتم تحسين هذا الحل تمهيدا نحو إيجاد الحل الأفضل الذي قد تكون عملية الحصول عليه تمتد لأكثر من مرحلة واحدة. في المرحلة الأخيرة يتم الحصول على الحل الأمثل والنهائي للمشكلة **(عبد الأمير، 2018، صفحة 01)**.

2. خطوات حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس:

تمر عملية حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس بعدة خطوات حتى الوصول إلى نقطة الحل الأمثل كما يلي:

الخطوة الأولى :<u>تحويل كل متباينات القيود إلى معادلات (التحول الى الصيغة النموذجية أو القياسية):</u>

تتطلب عملية حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس تحويل هذه البرامج إلى الصيغة القياسية أو النموذجية، حيث لا يمكن إستخدام طريقة السمبلكس إلا بعد الحصول على هذه الصيغة. ويتميز النموذج القياسي بالصفات التالية:

- دالة الهدف تكون في حالة التعظيم أو التقليل؛
- جميع قيود البرنامج الخطي تكون في شكل معادلات؛
- جميع الثوابت (الطرف الأيمن من القيود)تكون قيمها غير سالبة؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

ويتم تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة النموذجية(القياسية)كما يلي:

- نضيف متغيرة مكملة تسمى أيضا بالمتغيرات وهمية أو متغيرة الراكدة Slack variable ، إلى الطرف الأيسر من القيد نرمز لها ب S_j حيث " j " هو ترتيب المتغيرة علما أن قيمة هذه المتغيرة أكبر من أو تساوي الصفر .وتتحدد قيمة المتغيرة المكملة لكل قيد حسب درجة إستغلال الطرف الأيمن من القيد من طرف المتغيرات الحقيقية للبرنامج الخطي، ففي حالة إستغلال كامل الطرف الأيمن من القيد، فإن قيمة المتغيرة المكملة في الحل الأمثل ستكون معدومة، أما في حالة عدم إستغلال كامل كمية الطرف الأيمن من القيد، ففي هذه الحالة سوف تكون قيمة المتغيرة المكملة غير معدومة؛
- ينبغي إضافة المتغيرات المكملة إلى دالة الهدف لكن بربح وحدوي قيمته صفر، وبالتالي فالمتغيرات المكملة ليس لها تأثير على دالة الهدف.

لنفترض برنامج خطي يتكون من قيدين إشارتهما من نوع" أقل من أو يساوي"، ودالة هدف في حالة التعظيم . يتم تحويل هذا البرنامج إلى صيغته القياسية بإضافة متغيرة مكملة إلى القيد الأول نرمز لها بـ " S_1 "، ومتغيرة مكملة أخرى إلى القيد الثاني نرمز لها بـ " S_2 "، ونلاحظ أنه كلما تم إضافة متغيرة مكملة يتصاعد ترتيبها .وبعد إضافة المتغيرات المكملة إلى القيود، يتم إضافتها إلى دالة الهدف لكن بمعاملات صفرية. **(ريغي، 2021، صفحة 24)**

3. حالة تعظيم الأرباح:

$$\text{Max } Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\ldots+c_nx_n$$
$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\ldots, x_n\ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Max } Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\ldots+c_nx_n$$
$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+S_1 = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+S_2 = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+S_L \le b_m \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\ldots, x_n\ge 0, S_1\ge 0, S_2\ge 0,\ldots, S_k\ge 0 \end{cases}$$

الخطوة الثانية :كتابة الحل الأساسي رقم: 1

C_i^B	Cj / X_i^B	C_1	C_2	…	C_n	0	0	…	0	b_i
		X_1	X_2	…	X_n	S_1	S_2	…	S_k	
0	S_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…	0	…	…	…
0	S_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	bm
	Zj	$Z_1=\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\times C_i^B$	$Z_2=\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\times C_i^B$	…	$Z_n=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\times C_i^B$ (j=1,2,…,n)	0	0	…	0	
	Cj-Zj	C_1-Z_1	C_2-Z_2	…	C_n-Z_n	0	0	…	0	$Z=\sum_{i=1}^{m} b_iC_i^B$

حيث:

X_i^B:**المتغيرات الأساسية** :يتم إعتبار المتغيرات المكملة متغيرات أساسية في جدول الحل الأساسي رقم واحد، ومع الإستمرار في الحل تتغير هذه المتغيرات (تخرج متغيرات أساسية وتدخل متغيرات غير أساسية مكانها لتصبح متغيرات أساسية).

$a_{11},\ldots a_{mn}$:**معدلات التعويض** (Substitution rates): وهي تشير إلى التغير في قيمة المتغيرات الأساسية عندما يتم إدخال وحدة واحدة من متغيرة غير أساسية إلى الأساس .وتشير الإشارة الموجبة لـ a لانخفاض قيمة المتغيرات غير الأساسية بقيمة a عندما يتم إدخال وحدة واحدة من المتغيرات غير الأساسية إلى الأساس .أما الإشارة السالبة لـ a فتشير لزيادة قيمة المتغيرات الأساسية بقيمة a عندما يتم إدخال وحدة واحدة من المتغيرات غير الأساسية إلى الأساس.

C_j: معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

C_i^B :معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف.

b_i:قيم الطرف الأيمن من القيود.

Zj: مقدار إنخفاض أو إرتفاع الربح(التكلفة)عند إدخال وحدة واحدة من المتغيرة إلى الأساس.

Zj-Cj:مقدار صافي الربح(صافي التكلفة)المتحقق من إدخال وحدة واحدة من المتغيرة j إلى الأساس.

وبما أن جميع القيود إشارتها أقل من أو يساوي ، وبالتالي تم إضافة لكل قيد متغيرة مكملة، فإن عدد المتغيرات المكملة k يساوي عدد المتغيرات الأساس m ، لأن جميع المتغيرات المكملة تدخل إلى الأساس في جدول الحل الأساسي رقم 1. ونفس الحالية، مكن أن تحدث عندما تكون جميع القيود عبارة عن معادلات، حيث يتم إضافة لكل قيد متغيرة إصطناعية، وهذه المتغيرات تدخل إلى الأساس في جدول الحل الأمثل.

الخطوة الثالثة :الأمثلية:

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع عناصر السطر الأخير من جدول السمبلكس، أي Zj-Cj ، موجبة .وعند تحقق الأمثلية، يتم إستخراج قيم الحل الأمثل كما يلي:

– قيم المتغيرات الموجودة في عمود المتغيرات الأساسية X_i^B تساوي القيم المقابلة لها في عمود الثوابت b_i ؛

– قيم بقية المتغيرات ، أي المتغيرات غير الأساسية، تساوي الصفر؛

– قيمة دالة الهدف هي عبارة عن قيمة Z في السطر الأخير.

واذا لم يتحقق الحل الأمثل فإننا ننتقل إلى الخطوة الرابعة.

الخطوة الرابعة :البحث عن الحلول الأساسية الموالية:

في حالة عدم تحقق الأمثلية، يتم كتابة الحل الأساسي الموالي كما يلي:

البحث عن عمود الارتكاز لتحديد المتغيرة التي تدخل إلى الأساس:

عمود الإرتكاز يقابل أقل قيمة سالبة في السطر الأخير Zj-Cj ، والمتغيرة التي تمثل هذا العمود هي المتغيرة التي تدخل إلى الأساس .وفي حالة وجود متغيرتين على الأقل مرشحتين للدخول إلى الأساس(وجود قيمتين كبيرتين متساويتين على الأقل)، فإنه يتم إختيار إحداهما.

البحث عن سطر الارتكاز لتحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس:

نقسم كل قيمة من قيم bi في جدول السمبلكس غير الأمثل على القيمة(الموجبة فقط)المقابلة لها في عمود الإرتكاز، والسطر التي تنتمي إليه أصغر قيمة موجبة هو سطر الإرتكاز(في حالة قيمة من قيم bi تساوي الصفر، فإن السطر الذي تنتمي إليه قيمة bi هذه هو سطر الإرتكاز)، والمتغيرة التي تقع في سطر الإرتكاز والموجودة في عمود متغيرات الأساس X_i^B هي المتغيرة التي تخرج من الأساس.

ويمكن أن نصادف حالة وجود متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس(تساوي أصغر قيمتين موجبتين على الأقل من حصائل قسمة قيم bi على القيم المقابلة لها في عمود الإرتكاز)، وهي حالة سنتطرق إليها عند تناول الحالات الخاصة التي يمكن مصادفتها عند حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس.

عنصر الإرتكاز:

هو نقطة تقاطع عمود الإرتكاز وسطر الإرتكاز.

ويتم إعداد جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي:

- يتم إستبدال المتغيرة التي تخرج من الأساس بالمتغيرة التي تدخل إلى الأساس وذلك في العمود الذي يحتوي على متغيرات الأساس X_i^B
- يتم تحويل عمود الإرتكاز إلى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الارتكاز إلى القيمة 1 وباقي عناصر العمود إلى قيم معدومة؛
- يتم تحويل سطر الارتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الارتكاز.
- يتم حساب باقي العناصر على النحو التالي :العنصر المرشح للتغيير نطرح منه حاصل ضرب العنصرين المقابلين له في كل من سطر الارتكاز وعمود الارتكاز مقسوما على قيمة عنصر الارتكاز.

فإذا افترضنا أن A في الجدول التالي هي عنصر الارتكاز:

A	B
C	D

فإن عملية التحويل تكون كما يلي:

1	B/A
0	D-($\frac{B\times C}{A}$)

مثال 01

مصنع يصنع نوعين من المنتجات. يستهلك المنتج الأول 4 ساعات عمل في قسم التصنيع و5 ساعات عمل في قسم التغليف، والمنتج الثاني يستهلك 5 ساعات عمل في قسم التصنيع و3 ساعات عمل في قسم التغليف، بحيث الأول يحقق ربح قدره 25 دج، والثاني 35 دج.

ويعمل العمال في المصنع بواقع 8 ساعات يوميا في قسم التصنيع و 15 ساعة في القسم التغليف .

المطلوب : أوجد حجم الإنتاج الأمثل الذي يعظم ربح المؤسسة باستخدام جدول السمبلكس ؟

الحل:

المنتج / القسم	المنتج 1	المنتج 2	ساعات العمل المتاحة
قسم التصنيع	2 سا	4 سا	80 ساعة
قسم التغليف	3 سا	1 سا	60 ساعة
الربح (دج)	50	120	/

1. **كتابة النموذج الرياضي للمسألة:**

المتغيرات:

x_1: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 1

x_2: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 2

دالة الهدف:

$$\text{Max } Z = 50x_1 + 120x_2$$

القيود:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 80 \\ 3x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. **حل النموذج الرياضي باسخدام جدول السمبلكس:**

تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:

$$\text{Max } Z = 50x_1 + 120x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + S_1 = 80 \\ 3x_1 + x_2 + S_2 = 60 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	120	0	0	R	
		x_1	x_2	S_1	S_2	النتيجة	
0	S_1	2	4	1	0	80	80/4=20
0	S_2	3	1	0	1	60	60/1=60
Zj		0	0	0	0	0	
Zj-Cj		-50	-120	0	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الجديد.

- X_2 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj**) (عمود الإرتكاز)
- S_1 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (4) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	120	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	S_2	
120	x_2	1/2	1	1/4	0	20
0	S_2	5/2	0	-1/4	1	40
Zj		60	120	30	0	2400
Zj-Cj		10	0	30	0	

قيم (Zj-Cj)كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$x_1=0$

$x_2=20$

$S_1=0$

$S_2=40$

$Z=2400$

القرار الإداري:

يجب على صاحب المؤسسة إنتاج 20 وحدة من المنتج الثاني فقط. لتحقيق أقصى ربح ممكن وهو 2400 دج.

مثال 02:

مؤسسة تنتج أربع منتجات على آلتين، الوقت اللازم لإنتاج الوحدة من كل منتج والطاقة الإنتاجية لكل آلة موضحة في الجدول التالي:

الآلة	المنتج 1	المنتج 2	المنتج 3	المنتج 4	الطاقة الإنتاجية
الأولى	2 سا	3 سا	4 سا	2 سا	720 ساعة
الثانية	3 سا	2 سا	1 سا	2 سا	600 ساعة

تحسب تكاليف الإنتاج على أساس زمن تشغيل الألات، تكلفة الساعة على الآلة الأولى هي 10 و.ن وعلى الآلة الثانية 15 و.ن؛ سعر بيع الوحدة من المنتجات (م 1، م 2، م3، م4) هي على التوالي (85 ون، 90 ون، 75 ون، 65 ون)

المطلوب : أوجد حجم الإنتاج الأمثل الذي يعظم ربح المؤ سسة باستخدام جدول السمبلكس ؟

الحل:

1. كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

المتغيرات:

X_1: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 1

X_2: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 2

X_3: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 3

X_4: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 4

دالة الهدف:

$$\text{Max } Z = (85-65)x_1 + (90-60)x_2 + (75-55)x_3 + (65-50)x_4$$

القيود:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 720 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 600 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

2. حل النموذج الرياضي باستخدام جدول السمبلكس:

تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 0S_1 + 0S_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + S_1 = 720 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + S_2 = 600 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	20	30	20	15	0	0	R النتيجة	
		x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2		
0	S_1	2	3	4	2	1	0	720	720/3=240
0	S_2	3	2	1	2	0	1	600	600/2=300
Zj		0	0	0	0	0	0	0	
Zj-Cj		−20	−30	−20	−15	0	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الجديد.

- x_2 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj** (عمود الإرتكاز)
- S_1 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثاني:</u>

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	20	30	20	15	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
30	x_2	2/3	1	4/3	2/3	1/3	0	240
0	S_2	5/3	0	-5/3	2/3	-2/3	1	120
Zj		20	30	40	20	10	0	7200
Zj-Cj		0	0	20	5	10	0	

قيم (Zj-Cj) كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$x_1=0$

$x_2=240$

$x_3=0$

$x_4=0$

$S_1=0$

$S_2=120$

$Z= 7200$

<u>القرار الإداري:</u>

يجب على صاحب المؤسسة إنتاج 240 وحدة من المنتج الثاني فقط. لتحقيق أقصى ربح ممكن وهو 7200 دج

مثال 03:

تقوم شركة الحجار بإنتاج وبيع نوعين من الفولاذ يمر إنتاجهما على ثلاثة أقسام، وتحقق من خلال ذلك عن الطن الواحد ربحا قدره 300 دج عن النوع الأول و 200 دج عن النوع الثاني . وفيما يلي بقية المعلومات المتعلقة بإنتاج طن واحد من كلا النوعين.

	النوع 1	النوع 2	الطاقة المتاحة
	عدد الساعات اللازمة	عدد الساعات اللازمة	
القسم 01	6 سا	6 سا	420 سا
القسم 02	3 سا	6 سا	300 سا
القسم 03	4 سا	2 سا	240 سا

المطلوب : إيجاد البرنامج الإنتاجي الأمثل من نوعي الفولاذ الذي يعظم ربح المؤسسة باستخدام جدول السمبلكس ؟

الحل:

1. **كتابة النموذج الرياضي للمسألة:**

المتغيرات:

X_1: عدد الأطنان المنتجة من الفولاذ (النوع الأول)

X_2: عدد الأطنان المنتجة من الفولاذ (النوع الثاني)

دالة الهدف:

$$\text{Max } Z = 300x_1 + 200x_2$$

القيود:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 420 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 300 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. **حل النموذج الرياضي باسخدام جدول السمبلكس:**

تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:

$$Max\ Z = 300x_1 + 200x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + S_1 = 420 \\ 3x_1 + 6x_2 + S_2 = 300 \\ 4x_1 + 2x_2 + S_3 = 240 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	300	200	0	0	0	R النتيجة	
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	6	6	1	0	0	420	420/6=70
0	S_2	3	6	0	1	0	300	300/3=100
0	S_3	4	2	0	0	1	240	240/4=60
Zj		0	0	0	0	0	0	
Zj-Cj		-300	-200	0	0	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الجديد.

- X_1 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj)** (عمود الإرتكاز)
- S_3 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (4) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	300	200	0	0	0	R النتيجة	
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	0	3	1	0	-3/2	60	60/3=20
0	S_2	0	9/2	0	1	-3/4	120	120/4,5=26,6
300	x_1	1	1/2	0	0	1/4	60	60/0,5=120
Zj		300	150	0	0	75	18000	
Zj-Cj		0	-50	0	0	75		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- X_2 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj** (عمود الإرتكاز)
- S_1 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثالث:</u>

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	300	200	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
200	x_2	0	1	1/3	0	-1/2	20
0	S_2	0	0	-3/2	1	3/2	30
300	x_1	1	0	-1/6	0	1/2	50
Zj		300	200	50/3	0	50	1900
Zj-Cj		0	0	50/3	0	50	

قيم (Zj-Cj)كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$x_1=50$

$x_2=20$

$S_1=0$

$S_2=30$

$S_3=0$

$Z= 1900$

القرار الاداري:

يجب على شركة الحجار إنتاج 50 طن من الفولاذ (النوع الأول) و 20 طن من الفولاذ (النوع الثاني). لتحقيق أقصى ربح ممكن وهو 1900 دج.

مثال 04:

تنتج شركة كهربائية ثلاث أنواع من المنتوجات الكهربائية تمر بثلاث أقسام إنتاجية كما هو موضح في الجدول التالي:

	ساعات العمل المطلوبة لإنتاج الوحدة الواحدة		
	قسم التصنيع	قسم التجميع	قسم الرقابة
أجهزة التكييف	5	5	10
أفران كهربائية	5	10	5
مجففات كهربائية	5	5	5
الساعات المتاحة	110	180	200

المطلوب: أوجد الحجم الأمثل من المنتجات الثلاث ، إذا كان هامش الربح الوحدوي لأجهزة التكييف 145 دج وللأفران الكهربائية 200 دج و للمجففات الكهربائية 185 دج.

الحل:

1. كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

المتغيرات:

X_1: عدد أجهزة التكييف المنتجة.

X_2: عدد أجهزة الأفران الكهربائية المنتجة.

X_3: عدد أجهزة المجففات الكهربائية المنتجة.

دالة الهدف:

$$\text{Max } Z = 145x_1 + 200x_2 + 185x_3$$

القيود:

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 110 \\ 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 180 \\ 10x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. حل النموذج الرياضي باستخدام جدول السمبلكس:

تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + S_1 = 110 \\ 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 + S_2 = 180 \\ 10x_1 + 5x_2 + 5x_3 + S_3 = 200 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	145	200	185	0	0	0	R النتيجة	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	5	5	5	1	0	0	110	110/5=22
0	S_2	5	10	5	0	1	0	180	180/10=18
0	S_3	10	5	5	0	0	1	200	200/5=40
Zj		0	0	0	0	0	0	0	
Zj-Cj		-145	-200	-185	0	0	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الجديد.

- X_2 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj)** (عمود الإرتكاز)
- S_2 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (10) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ Cj	145	200	185	0	0	0	R النتيجة	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	5/2	0	5/2	1	-1/2	0	20	20/2,5=8
200	x_2	1/2	1	1/2	0	1/10	0	18	18/0,5=36
0	S_3	15/2	0	5/2	0	-1/2	1	110	110/2,5=44
Zj		100	200	100	0	20	0		
Zj-Cj		-45	0	-85	0	20	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- X_3 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Zj-Cj**) (عمود الإرتكاز)
- S_1 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (5/2) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثالث:</u>

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	145	200	185	0	0	0	R
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	النتيجة
185	x_3	1	0	1	2/5	-1/5	0	8
200	x_2	0	1	0	-1/5	1/5	0	14
0	S_3	5	0	0	-1	0	1	90
Zj		185	200	185	34	3	0	4280
Zj-Cj		40	0	0	34	3	0	

قيم (Zj-Cj)كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق، ومنه:

$x_1=0$

$x_2=14$

$x_3=8$

$S_1=0$

$S_2=0$

$S_3=90$

$Z=4280$

القرار الإداري:

يجب على شركة المخصصة في الصناعة الكهربائية عدم إنتاج أي وحدة من أجهزة التكييف، و إنتاج 14 وحدة من أجهزة الأفران الكهربائية، 8 وحدات من أجهزة المجففات الكهربائية، لتحقيق أقصى ربح قدره 4280 دج.

مثال 05:

يصنع مصنع نوعين من السلع: الأول شوكولاطة، والثاني بسكويت، بحيث:

يمر المنتج الأول بقسم التغليف فقط ويحتاج إلى 3 ساعات عمل للوحدة الواحدة، أما المنتج الثاني يحتاج إلى 1 ساعة في قسم التصنيع ، و 2 ساعة في قسم التغليف.

ويعمل في المصنع عمال بواقع 6 ساعات يوميا في قسم التصنيع ، و18 ساعات في قسم التغليف.

ويحقق النوع الأول ربحا قدره 3 دج للوحدة الواحدة، ويحقق الثاني 30 دج للوحدة الواحدة.

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لهذا المصنع باستخدام جدول السمبلكس؟

الحل:

	شوكولاطة	بسكويت	الساعات العمل المتاحة
قسم التصنيع	/	1سا	6 سا
قسم التغليف	3 سا	2 سا	18 سا
الربح للوحدة الواحدة	3 دج	5 دج	/

1. كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

المتغيرات:

x_1: عدد الوحدات المنتجة من شكولاطة.

x_2: عدد الوحدات المنتجة من بسكويت.

دالة الهدف:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

القيود:

$$\begin{cases} x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. حل النموذج الرياضي باسخدام جدول السمبلكس:

تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$\begin{cases} x_2 + S_1 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + S_2 = 18 \\ x_1 , x_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	5	0	0	R	
		x_1	x_2	S_1	S_2	النتيجة	
0	S_1	0	1	1	0	6	6/1=6
0	S_2	3	2	0	1	18	18/2=9
Zj		0	0	0	0	0	
Zj-Cj		-3	-5	0	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الجديد.

- X_2 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj)** (عمود الإرتكاز)
- S_1 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (1) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثاني:</u>

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	5	0	0	R	
		x_1	x_2	S_1	S_2	النتيجة	
5	x_2	0	1	1	0	6	6/0=∞
0	S_2	3	0	-2	1	6	6/3=2
Zj		0	5	5	0	30	
Zj-Cj		-3	0	5	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- X_1 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj)** (عمود الإرتكاز)

- S_2 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثالث:</u>

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	5	0	0	R
		x_1	x_2	S_1	S_2	النتيجة
5	x_2	0	1	1	0	6
3	x_1	1	0	-2/3	1/3	2
Zj		3	5	3	1	36
Zj-Cj		0	0	3	1	

قيم (Zj-Cj) كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$x_1=2$

$x_2=6$

$S_1=0$

$S_2=0$

$Z=36$

<u>القرار الاداري:</u>

يجب على شركة إنتاج 2 وحدة من شكولاطة و 6 وحدات من البسكويت.لتحقيق أقصى ربح قدره 36 دج

4. حالة تخفيض التكاليف (طريقة M الكبيرة *Big-M Technique*) :

ما هي خطوات الحل بطريقة السمبلكس في حالة تقليل التكاليف ؟

– تحويل النموذج إلى النموذج القياسي حسب القيود:

<u>رمز المتراجات:</u>

- ✓ إذا كان أقل أو يساوي نضيف متغير وهمي ≤ S+
- ✓ إذا كان أكبر أو يساوي نطرح متغير وهمي ونضيف متغير إصطناعي ≥ S+R-
- ✓ إذا كان القيد إشارته = نضيف متغير إصطناعي فقط R+
- ✓ إضافة كل من المتغيرات الإصطناعية (R_1, R_2) إلى دالة الهدف Z وذلك بضربها في ثابت يعبر عنه بـ M وهي عبارة عن قيمة كبيرة جدا.
- ✓ توجد كل من المتغيرات الإصطناعية (R_1, R_2) بدلالة القيد ويتم التعويض عنه في جدول الحل الإبتدائي الأولي بمعنى (كتابة المتغيرات الإصطناعية في القيود بدلالة بقية المتغيرات)
- ✓ المتغيرات الإصطناعية (R_1, R_2) لا تؤثر على الحل ولكن تؤثر على دالة الهدف.

– إنشاء جدول ويتم ترتيب المعاملات فيها ويسمى جدول الحل الأساسي الأولي وتفرغ فيها جميع المعاملات ويزيد عدد الأعمدة لأن هناك قيم لـ R

– ننظر إلى الصف الأخير من الجدول ونختار أقل قيمة سالبة لأننا نريد تقليل التكاليف، ويسمى عمود الإرتكاز (المتغير الداخل)

– يتم قسمة كميات (النتيجة R)على المعامل المقابل له في عمود الإرتكاز.

– نختار أقل قيمة موجبة وبالتالي حددنا صف الإرتكاز (المتغير الخارج)

– نقطة الإرتكاز: تتحدد بتقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز.

– نقسم الصف الإرتكاز على نقطة الإرتكاز لتحديد القيم الجديدة في الصف الجديد للجدول الموالي.

– أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

– ننظر في كل مرة إلى الصف الأخير من الجدول إذا كانت ا أرقام موجبة أو أصفار يعني توصلنا إلى الحل الأمثل، أما إذا كانت القيمة سالبة نعيد تكرار الخطوات مرة اخرى حتى نتوصل إلى الحل الأمثل.

– تكون قيم عمود (النتيجة R) هي الحل الأمثل .

– نعوض في دالة الهدف Z لنتأكد من الحل. **(الأسطل، 2016، الصفحات 175-176)**

مثال 01:

تلقت شركة متخصصة في صناعة الدهان طلبية قدرها 1000 كلغ من خليط الطلاء يتكون من مادتين. حيث يكلف الكلغ من المادة الأولى 50 دج ومن المادة الثانية 60 دج. كما انه ولأسباب تتعلق بمعيير الجودة فإن الشركة مقيدة بضرورة إستعمال 150 كلغ على الأقل من المادة الأولى.

المطلوب: تحديد الكميات الواجب إستعمالها من المادتين لإنتاج الخليط بأقل تكلفة لاستعمال طريقة السمبلكس-؟

الحل:

1. **الخطوة الأولى: كتابة النموذج الرياضي للمسألة:**

المتغيرات:

x_1: عدد (الكلغ) الواجب إستعمالها من المادة الأولى في الخليط النهائي.

x_2: عدد (الكلغ) الواجب إستعمالها من المادة الثانية في الخليط النهائي.

دالة الهدف:

$$Mix\ Z = 50x_1 + 60x_2$$

القيود:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 \geq 150 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. **الخطوة الثانية: تحويل النموذج الرياضي إلى نموذج معياري**

القيد الأول: نلاحظ أن القيد الأول على شكل مساواة وبالتالي يبقى في الحاضر على حاله $\mathbf{x_1 + x_2 = 1000}$

القيد الثاني: لكي يتساوى طرفا القيد فإننا نطرح كمية من الطرف الأيسر من القيد ويسمى المتغير الذي يرمز للكمية المضافة **بالمتغير الزيادة Variade de surplus** ونرمز له بالرمز S: (الطاقة العاطلة الغير مستغلة) وبالتالي يصبح القيد الثاني كما يلي: $\mathbf{x_1 - S_1 = 150}$

القيد الثالث: شرط عدم السلبية $\mathbf{x_1 , x_2, S_1 \geq 0}$

ومنه تصبح دالة الهدف كما يلي: $\mathbf{Mix\ Z = 50x_1 + 60x_2 + 0S_1}$

3. **الخطوة الثالثة: إيجاد حل أولي مقبول**

لإيجاد حل أولي مقبول نفرض حالة اللاإنتاج والتي يكون فيها كل من X_1 و X_2 مساويا للصفر.عندئذ يكون الحل الأولي كما يلي:

القيد الأول: $0+0=1000$ وهذا غير منطقي.

القيد الثاني: $-S_1=150$ وهذا غير منطقي لأنها تخرق شرط عدم السلبية.

وبما انه لا يوجد حل أولي مقبول ، يمكن اللجوء إلى حل أولي وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية (خيالية) للقيود الغير محققة ونرمز لها بالرمز: **R** (هو متغير وهمي لا معنى له إقتصاديا، ينعدم أثناء الوصول إلى الحل الأمثل، إضافته تساعدنا على الحل فقط، ولا يؤثر على الحل لكن يؤثر على دالة الهدف)كما يلي:

$$x_1+x_2+R_1=1000$$

$$x_1-S_1+R_2=150$$

وبما أن المتغيرات الإصطناعية دخيلة على المسألة وتستعمل لإيجاد الحل الأولي فقط فيجب التخلص منها حتى لا تظهر في الحل الأمثل وذلك عن طريق تحميلها بمعامل كبير (رقم كبير جدا) ونرمز لها بالرمز **M**: في دالة الهدف . وبالتالي تكون دالة الهدف في هذه الحالة كما يلي:

$$Mix\ Z=50x_1+60x_2+0S_1+MR_1+MR_2$$

4. **الخطوة الرابعة: نقل معطيات الحل الأولى لجدول السمبلكس**

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60	0	M	M	R النتيجة	
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2		
M	R_1	1	1	0	1	0	1000	1000/1=1000
M	R_2	1	0	-1	0	1	150	150/1=150
Zj		2M	M	-M	M	M	1150M	
Cj-Zj		50-2M	60-M	M	0	0		

5. **الخطوة الخامسة: إختبار أمثلية الحل.**

نتوصل إلى الحل الأمثل في حالة تخفيض التكاليف Min عندما يكون جميع قيم السطر الأخير موجبة أو معدومة.

6. **الخطوة السادسة: تحسين الحل**

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60	0	M	M	R النتيجة	
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2		
M	R_1	0	1	1	1	-1	850	850/1=850
50	x_1	1	0	-1	0	1	150	150/-1=-150
Zj		50	M	M-50	M	-M+50	850M+7500	
Cj-Zj		0	60-M	-M+50	0	2M-50		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الموالي.

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
0	S_1	0	1	1	1	-1	850
50	x_1	1	1	0	1	0	1000
Zj		0	50	0	50	0	50000
Cj-Zj		50	10	0	M-50	M	

قيم (Cj-Zj) كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق، ومنه:

$x_1=1000$

$x_2=0$

$S_1=850$

$Z=50000$

القرار الاداري:

يجب على شركة إنتاج 1000 كلغ من المادة الأولى فقط، لتحقيق أدنى تكلفة قدرها 50000 دج.

مثال 02:

ليكن لدينا النموذج التالي:

$$Mix\ Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ 6x_1 + x_2 \geq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلـوب: إيجـاد التوليفـة المثلى مـن كـلا المتغيرين لتحقيـق ادنـى تكلفـة ممكنـة باسـتخدام جـدول سمبلكس؟

الحل:

<u>تحويل النموذج الرياضي إلى نموذج معياري</u>

$$Mix\ Z = 5x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - S_1 + R_1 = 20 \\ 6x_1 + x_2 - S_2 + R_2 = 30 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{cases}$$

<u>جدول الحل الأولي:</u>

C_i^B	C_j \ X_i^B	5	3	0	0	M	M	R النتيجة	
		x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
M	R_1	3	2	-1	0	1	0	20	20/3=6,66
M	R_2	6	1	0	-1	0	1	30	30/6=5
Zj		9M	3M	-M	-M	M	M	50M	
Cj-Zj		5-9M	3-3M	M	M	0	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثاني.

- x_1 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Cj-Zj**) (عمود الإرتكاز)

- R_2 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (6) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثاني:</u>

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

القيمة الجديدة = القيمة القديمة - جداء القيمتين المتقابلتين / نقطة الإرتكاز

C_i^B	X_i^B \ C_j	5	3	0	0	M	M	R	
		x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	النتيجة	
M	R_1	0	3/2	-1	1/2	1	-1/2	5	5/(3/2)=3,33
5	x_1	1	1/6	0	-1/6	0	1/6	5	5/(1/6)=30
Zj		0	3/2M+5/6	-M	1/2M-5/6	M	-1/2M+5/6	5M+5	
Cj-Zj		5	-3/2M+13/6	M	-1/2M+5/6	0	3/2+5/6		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- X_2 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Cj-Zj)** (عمود الإرتكاز)
- R_1 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3/2) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثالث:</u>

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

القيمة الجديدة = القيمة القديمة - جداء القيمتين المتقابلتين / نقطة الإرتكاز

C_i^B	X_i^B \ C_j	5	3	0	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
3	x_2	0	1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	10/3
5	x_1	1	0	1/9	-2/9	1/9	2/9	40/9
Zj		5	3	-13/9	-1/9	23/9	1/9	290/9
Cj-Zj		0	0	13/9	1/9	M-23/9	M-1/9	

قيم (Cj-Zj)كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$x_1=40/9$

$x_2=10/3$

$S_1=0$

$S_2=0$

$Z=290/9$

مثال 03:

ليكن لدينا النموذج التالي:

$$\text{Mix } Z = 5x_1 + 7x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 50 \\ x_1 \geq 20 \\ x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: إيجاد التوليفة المثلى من كلا المتغيرين باستخدام طريقة Big M؟

الحل:

<u>تحويل النموذج الرياضي إلى نموذج معياري</u>

$$\text{Mix } Z = 5x_1 + 7x_2 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + R_1 = 50 \\ x_1 - S_2 + R_2 = 20 \\ x_2 + S_3 = 20 \\ x_1, x_2, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	5	7	0	0	M	M	R النتيجة	
		x_1	x_2	S_2	S_3	R_1	R_2		
M	R_1	1	2	0	0	1	0	50	50/1=50
M	R_2	1	0	-1	0	0	1	20	20/1=20
0	S_3	0	1	0	1	0	0	20	20/0=∞
Zj		2M	2M	-M	0	M	M	70M	
Cj-Zj		5-2M	7-2M	M	0	0	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثاني.

- X_1 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Cj-Zj)** (عمود الإرتكاز)
- R_2 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (1) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	5	7	0	0	M	M	R النتيجة	
		x_1	x_2	S_2	S_3	R_1	R_2		
M	R_1	0	2	1	0	1	-1	30	30/2=15
5	x_1	1	0	-1	0	0	1	20	20/0=∞
0	S_3	0	1	0	1	0	0	20	20/1=20
Zj		5	2M	M-5	0	M	-M	30M+100	
Cj-Zj		0	7-2M	-M+5	0	0	2M		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- X_2 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Cj-Zj)** (عمود الإرتكاز)
- R_1 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)

- العدد (2) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثالث:</u>

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	5	7	0	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_2	S_3	R_1	R_2	
7	x_2	0	1	1/2	0	1/2	-1/2	15
5	x_1	1	0	-1	0	0	1	20
0	S_3	0	0	-1/2	1	-1/2	1/2	5
Zj		5	7	-3/2	0	7/2	3/2	205
Cj-Zj		0	0	3/2	0	M-7/2	M-3/2	

قيم (Cj-Zj) كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$x_1=20$

$x_2=15$

$S_2=0$

$S_3=5$

$Z=205$

الفصل الثالث: المسائل الثنائية في البرمجة الخطية

Binary problems in linear programming

5. المدلول الإقتصادي للثنائية.
6. أهمية تحويل النموذج الأولي إلى النموذج الثنائي.
7. الخطوات الأساسية لتحويل النموذج الأولي إلى نموذج ثنائي.

الفصل الثالث: المسائل الثنائية في البرمجة الخطية
Binary problems in linear programming

في هذا الفصل سوف نتطرق إلى المسائل الثنائية (النموذج المقابل أو البرنامج الثنائي) في البرمجة الخطية . يعتمد هذا النموذج على معكوس المصفوفة قيد الدراسة أي: هناك نموذجان الأول يطلق عليه بالنموذج الأولي (الأصلي) والذي يتم صياغته من خلال المشكلة المطروحة في المسألة، والثاني عبارة عن مشكلة مناظرة للمشكلة الأولى ويطلق عليها بالنموذج الثنائي أو المقابل والذي يتم الحصول عليه بتحويل النموذج الأولي.**(Subhendu, 2014, p. 30)**

أي أن كل مشكلة للتدنية في البرمجة الخطية تقابلها مشكلة تعظيم وكل مشكلة تعظيم تقابلها مشكلة تدنية (تخفيض). وتسمى المشكلة الأولية بالمشكلة الأصلية والمشكلة المناظرة لها تسمى بالمشكلة الثنائية. والعلاقة بين المشكلتين من السهل رؤيتها بدلالة المعاملات التي تسهم بشكل عام. **(دولينج، 2003، صفحة 239)**

1. المدلول الإقتصادي للثنائية:

– يعطي حل المسألة الثنائية قيما لكل مورد من الموارد المستخدمة في النموذج الأصلي فوق سعر تلك الموارد الأصلية ، حيث أن أعظم ربح سيتم تحقيقه سيتم توزيعه على عناصر المدخلات التي تشارك في تحقيقه، وبتعبير آخر فإن y هو مقدار الربح الحدي الذي تحققه وحدة إضافية من المدخل (المورد) وتضيفه للربح ، وهذا ما يطلق عليه **(سعر الظل)** ، حيث لا يمكن رؤيته بصورة مباشرة إنما هو إنعكاس لقدرة المؤسسة على الحصول على موارد إضافية وإنتاج وحدات من المنتوج تعطي ربحا إضافيا (لأن الأرباح في النموذج متعلقة بوحدة المنتوج وليس بوحدة من موارد المستخدمة)؛

– إن القيمة العظمى لـ :Z تساوي بالضبط القيمة الصغرى لـ :W ، وهذا يعني أنه إذا وجد الحل الأمثل لكل من البرنامج الأصلي والبرنامج الثنائي فإننا نكون قد خصصنا الربح الكلي الذي ستحققه المؤسسة على الموارد الإقتصادية التي تستخدم في إنتاج هذا الربح؛

– توضح قيمة المتغيرات y في الحل الأمثل للبرنامج الثنائي ، الربح الحدي لكل مورد من موارد الإنتاج ، بمعنى أنها تحدد للمسير المقدار الذي يمكن به زيادة الأرباح المؤسسة الكلية إذا إستطاع زيادة الكمية المتاحة من كل مورد من موارد الإنتاج بوحدة واحدة؛

– إن الموارد المستخدمة بالكامل هي التي سيكون لها قيمة حدية في البرنامج الثنائي . ويعني ذلك أن موارد الإنتاج وفيرة العرض والتي لم تستغل بالكامل سوف تأخد قيمة حدية ، أي ربحها الحدي يساوي صفر.

2. أهمية تحويل النموذج الأولي إلى النموذج الثنائي :

– الحصول على نموذج يحتوي على عدد أقل من القيود، وبذلك سوف يختصر العمل الحسابي لجداول السمبلكس والوصول إلى الحل الأمثل، والحصول على نفس الحل الأمثل سواءا كان الحل للنموذج الأولي أو الحل للنموذج الثنائي.

– للتخلص من الإشارة السالبة في الجانب الأيمن (إن وجدت)أي عندما تكون المصادر ذات كميات سالبة وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي.

– لغرض التعرف على أبعاد المشكلة الثنائية، فإذا كان النموذج الأولي بصيغة التعظيم أي المشكلة بالصيغة الربحية، فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة التصغير وتمثيله للجانب (التكلفة) لنفس المشكلة المعبر عنها بالصيغة الأولية.

– يساعد حل النموذج المقابل على إجراء تحليل ما بعد الأمثلية والتوصل إلى حلول بطريقة مختصرة في حالة إجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية في تلك المشكلة أو إضافة قيود جديدة للمشكلة.

– تساعد الإدارة في معرفة قيمة البدائل الأخرى للقرار. **(حمادي، 2018، صفحة 89)**

3. الخطوات الأساسية لتحويل النموذج الأولي إلى نموذج ثنائي:

هو عملية عكس النموذج الأولي بكل محتوياته، ولأي مشكلة برمجية يرتبط معها نموذج برمجي مقابل له.

الجدول 01: الخطوات الأساسية لتحويل النموذج الأولي إلى نموذج ثنائي.

	النموذج الأولي	النموذج الثنائي المقابل له
1	Max	Min
2	Min	Max
3	Z	W
4	x	y
5	ثوابت	المعاملات
6	المعاملات	ثوابت
7	≤	≥
8	≥	≤
9	مصفوفة المعاملات : – الصفوف – الأعمدة	منقول مصفوفة المعاملات: – الصف يصبح عمود – والعمود يصبح صف
10	شرط عدم السلبية	شرط عدم السلبية

المصدر: رند الأسطل. (2016). **بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية.** الطبعة السادسة. جامعة فلسطين. فلسطين. ص.224.

مثال 01:

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 60x_2 + 90x_3$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 100 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: إيجاد البرنامج الثنائي (المسألة الثنائية) لهذا البرنامج الخطي؟

الحل:

يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$\text{Min } W = 100y_1 + 200y_2$$

$$\begin{cases} 10y_1 + y_2 \geq 30 \\ 6y_1 + 3y_2 \geq 60 \\ 3y_1 + 6y_2 \geq 90 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي يساوي عدد القيود في البرنامج الأولي، وعدد القيود في البرنامج الثنائي يساوي عدد المتغيرات في البرنامج الأولي.

مثال 02:

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{Max } Z = 56x_1 + 49x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: إيجاد البرنامج الثنائي (المسألة الثنائية) لهذا البرنامج الخطي؟

الحل:

يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$\text{Min } W = 24y_1 + 15y_2 + 32y_3$$

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 8y_3 \geq 56 \\ 6y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 49 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال 03:

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{Min } W = 14y_1 + 40y_2 + 18y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 50 \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 30 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: إيجاد البرنامج الثنائي (المسألة الثنائية) لهذا البرنامج الخطي؟

الحل:

يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$\text{Max } Z = 50x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

مثال 04:

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{Min } W = 16y_1 + 20y_2 + 30y_3$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 \\ y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: إيجاد البرنامج الثنائي (المسألة الثنائية) لهذا البرنامج الخطي؟

الحل:

يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$Max\ Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 16 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 20 \\ x_1 + 2x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

مثال 05:

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$Max\ Z = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le 430 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 460 \\ x_1 + 2x_3 \le 420 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1) إيجاد البرنامج الثنائي (المسألة الثنائية) لهذا البرنامج الخطي؟
2) إستنتج الحل الأمثل للمسألة الثنائية؟

الحل:

1) يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$Min\ W = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 20 \\ 3y_1 + 5y_2 \ge 30 \\ y_1 + 2y_3 \ge 50 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

2) إستنتاج الحل الأمثل للمسألة الثنائية:

أولا/ إيجاد الحل الأمثل للمسألة الأولية:

تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + S_1 = 430 \\ 3x_1 + 5x_2 + S_2 = 460 \\ x_1 + 2x_3 + S_3 = 420 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	20	30	50	0	0	0	R النتيجة	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	1	3	1	1	0	0	430	430/1=430
0	S_2	3	5	0	0	1	0	460	460/0=∞
0	S_3	1	0	2	0	0	1	420	420/2=210
Zj		0	0	0	0	0	0	0	
Zj-Cj		-20	-30	-50	0	0	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثاني.

- x_3 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Zj-Cj**) (عمود الإرتكاز)
- S_3 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (2) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

القيمة الجديدة = القيمة القديمة - $\frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$

C_i^B	X_i^B \ C_j	20	30	50	0	0	0	R النتيجة	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	1/2	3	0	1	0	-1/2	220	220/3=73,33
0	S_2	3	5	0	0	1	0	460	460/5=92
50	x_3	1/2	0	1	0	0	1/2	210	210/0=∞
Zj		25	0	50	0	0	25	10500	
Zj-Cj		5	-30	0	0	0	25		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- X_2 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Zj-Cj**) (عمود الإرتكاز)
- S_1 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثالث:</u>

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

القيمة الجديدة = القيمة القديمة - $\frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$

C_i^B	X_i^B \ C_j	20	30	50	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
30	x_2	1/6	1	0	1/3	0	-1/6	220/3
0	S_2	13/6	0	0	-5/3	1	5/3	280/3
50	x_3	1/2	0	1	0	0	1/2	210
Zj		30	30	50	10	0	20	12700
Zj-Cj		10	0	0	10	0	20	

قيم (Zj-Cj) كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق.

نعلم أن القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في المسألة الأولية والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية بنفس الترتيب للمسألة الثنائية ، ومنه:

- القيمة المقابلة لمتغير الفجوة S_1 في المسألة الأولية هي(10) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_1 في المسألة الثنائية تساوي $y_1=10$.
- القيمة المقابلة لمتغير الفجوة S_2 في المسألة الأولية هي(0) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_2 في المسألة الثنائية تساوي $y_2=0$.
- القيمة المقابلة لمتغير الفجوة S_3 في المسألة الأولية هي(20) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_3 في المسألة الثنائية تساوي $y_3=20$.
- قيمة دالة الهدف في الحل الأمثل للمسألتين تكون متساوية، ومنه قيمة دالة الهدف للمسألة . الثنائية تساوي $W = 12700$

وعليه الحل الأمثل للمسألة الثنائية هو:

$y_1=10$.

$y_2=0$.

$y_3=20$.

$W = 12700$

الفصل الرابع: تحليل الحساسية

Sensitivity analysis

8. تغير قيم معاملات المغيرات في دالة الهدف.
9. تغير قيم الطرف الأيمن من القيود.
10. التغير في معاملات المتغيرات في القيود.
11. إضافة متغيرة جديدة.
12. إضافة قيد جديد.

الفصل الرابع: تحليل الحساسية
Sensitivity analysis

عند استخدام البرمجة الخطية لنمذجة حالات الحقيقية نحتاج غالبًا إلى حل البرامج الخطية الجديدة التي تم الحصول عليها من خلال إجراء تغييرات صغيرة على المشكلات التي تم حلها بالفعل. يمكن أن يحدث هذا لأسباب مختلفة منها:

– قد تكون المعاملات عبارة عن تقديرات للكميات الرئيسية ، لاحقًا بمزيد من المعلومات قد يكون لدينا تقديرات أفضل.

– حتى إذا كانت المعاملات دقيقة تمامًا ، فقد تتغير بمرور الوقت ، على سبيل المثال ، إذا احتجنا إلى مراعاة سعر بعض الموارد ، نظرًا لأن هذا السعر يتغير ، فسنرغب في تحديث نموذجنا.

– قد ندرك أننا نسينا أحد المتغيرات في القيود ،و فجأة أصبح لدينا متغير إضافي نريد أن نعرف عنه في النموذج الرياضي.

– قد نرغب في استبدال أي معاملات تم تقديرها بتقديرات أكثر تشاؤمًا لحساب سيناريو أسوأ حالة.
(Antolin camarena, 2020, p. 01)

وبالنظر لكثرة التغيرات التي يمكن أن تحدث، فإن عملية إعادة حل البرنامج الخطي يمكن أن تكون مجهدة وتتطلب حسابات كثيرة، مما يؤدي إلى ضياع الوقت و احتمال الوقوع في أخطاء حسابية. ولتجاوز مثل هذه المشكلات يتم إستخدام ما يسمى بـ: **«تحليل الحساسية»** أو **«تحليل ما بعد الأمثلية»**، والذي يدرس أثر التغيرات التي يمكن أن تحدث في البرنامج الخطي، وذلك بالاعتماد على آخر جدول عند حله بطريقة السمبلكس (جدول الحل الأساسي الأمثل) دون اللجوء إلى إعادة حله مجددا.

إذ يستخدم أسلوب تحليل الحساسية جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي لتحديد المدى المسموح به في التغيرات التي تحدث في البرنامج الخطي والتي لا تؤثر على الحل الأمثل. **(ريغي، 2021، صفحة 61)**
وسيتم دراسة العديد من أنواع التغييرات التي يمكن أن تحدث على البرنامج الخطي:

– تغير قيم معاملات المغيرات في دالة الهدف؛

– تغير قيم الطرف الأيمن من القيود؛

– التغير في معاملات المتغيرات في القيود؛

– إضافة متغيرة جديدة؛

– إضافة قيد جديد.

ليكن لدينا النموذج التالي والحل الأمثل له (هذا المثال تم حله سابقا):

$$Mix\ Z = 50x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 \geq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
0	S_1	0	1	1	1	-1	850
50	x_1	1	1	0	1	0	1000
Zj		0	50	0	50	0	50000
Cj-Zj		50	10	0	M-50	M	

1. تغير قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف:

– <u>تغير قيم معاملات المتغيرات خارج الأساس:</u>

المتغيرة X_2 هي متغيرة خارج الأساس. فإذا إفترضنا أن قيمة معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار Δ فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلا ؟

نكتب قيمة المعامل الجديدة للمتغيرة X_2 في دالة الهدف في السطر Cj ونعيد حساب قيم Cj-Zj في السطر الأخير، ونتحصل على الجدول التالي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60+ Δ	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
0	S_1	0	1	1	1	-1	850
50	x_1	1	1	0	1	0	1000
Zj		0	50	0	50	0	50000
Cj-Zj		50	10+ Δ	0	M-50	M	

يبقى الجدول السابق أمثلا ، إذا بقيت جميع قيم السطر الأخير Cj-Zj أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التقليل.

ي ،لاحظ أن السطر الأخير يحتوي على مجهولين M و Δ ، إلا أننا قلنا سابقا أن M هي قيمة موجبة كبيرة جدا ، وبالتالي فإن قيمة الخانات التي تحتوي على M تبقى موجبة .إذا يبقى الحل الأمثل إذا كانت قيمة Cj-Zj أكبر من أو تساوي الصفر، أي:

$$10+\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\geq -10$$

أي:

$$\Delta \in [-10\ +\infty[$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_2 في دالة الهدف أكبر من أو تساوي 10- ، فإن نقطة الحل الأمثل لا تتغير . وبعبارة أخرى:

$$C_2\geq 60+\Delta \Rightarrow C_2\geq 60-10 \Rightarrow C_2\geq 50$$

أي:

$$C_2 \in [50\ +\infty[$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة C_2 أكبر من أو تساوي 50 ، فإن نقطة الحل الأمثل لا تتغير.

- لنفترض أن قيمة C_2 إرتفعت بوحدة واحدة (تغير داخل المجال)، ستكون نقطة الحل الأمثل كما يلي:

$x_1 = 1000$, $x_2 = 0$, $S_1 = 850$, Min Z=50000

ويلاحظ بقاء نفس متغيرات الأساس وقيمها وقيمة دالة الهدف.

- لنفترض أن قيمة C_2 إنخفضت بوحدة واحدة(تغير خارج المجال)، ستكون نقطة الحل الأمثل كما يلي:

$x_1 = 150$, $x_2 = 850$, $S_1 = 0$, Min Z=49150

ويلاحظ أن نقطة الحل الأمثل تغيرت .وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة معامل المتغيرة X_2 في دالة الهدف خارج المجال المسموح به، فهذا يعني أن جدول الحل الأخير سيصبح غير أمثل، وبالتالي يجب متابعة الحل إنطلاقا من هذا الجدول.

– <u>تغير قيم معاملات متغيرات الأساس:</u>

المتغيرة X_1 هي متغيرة داخل الأساس .فإذا إفترضنا أن معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار Δ ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلا ؟

نكتب قيمة المعامل الجديد للمتغيرة X_1 في دالة الهدف في السطر Cj وأيضا في العمود $C^B{}_i$ ، ونعيد حساب قيم السطر Cj-Zj، ونتحصل على الجدول التالي:

C_i^B	C_j / X_i^B	$50+\Delta$	60	0	M	M	R
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	النتيجة
0	S_1	0	1	1	1	-1	850
$50+\Delta$	x_1	1	1	0	1	0	1000
Zj		$50+\Delta$	$50+\Delta$	0	$50+\Delta$	0	$50000+1000\Delta$
Cj-Zj		0	$10-\Delta$	0	$M-50-\Delta$	M	

يبقى الجدول السابق أمثلا إذا بقيت جميع قيم السطر Cj-Zj أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التقليل . وعلى هذا الأساس يجب أن تبقى قيم الخلايا في السطر Cj-Zj المكتوبة بدلالة Δ كلها أكبر من أو تساوي الصفر، أي الخانة C_2-Z_2 ، مع إستبعاد الخلية C_4-Z_4 ، لأنها تبقى موجبة مهما كانت قيمة Δ، لأن قيمة M هي قيمة موجبة كبيرة. إذا يبقى الحل أمثلا عندما:

$$10-\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\leq 10$$

أي:

$$\Delta \in]-\infty, 10]$$

ملاحظة:

– عند دراسة حساسية قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف وكانت هذه الأخيرة في حالة التعظيم، فإن الحل يبقى أمثل كلما بقيت قيم السطر Zj-Cj أكبر من أو تساوي الصفر.

2. تغير قيم الطرف الأيمن من القيود:

يمكن دراسة أثر تغير قيم الطرف الأيمن من القيود على الحل الأمثل من خلال المثال التالي:

لنفترض أن النموذج تغير كما هو موضح في البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Mix } Z = 50x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 \geq 150+\Delta \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

يكتب جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
M	R_1	1	1	0	1	0	1000
M	R_2	1	0	-1	0	1	150+Δ
Zj		2M	M	-M	M	M	1150M
Cj-Zj		50-2M	60-M	M	0	0	

نعيد كتابة الجدول السابق كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60	0	M	M	$R+\Delta$ النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
M	R_1	1	1	0	1	0	1000+0
M	R_2	1	0	-1	0	1	150+1
Zj		2M	M	-M	M	M	1150M
Cj-Zj		50-2M	60-M	M	0	0	

يُلاحظ أن قيم معاملات العمود (النتيجة R+Δ) لها نفس قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة S_1 (مضروبة في 1-) ، ونفس قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية R_2. وهذا يعني أن قيم العمود (النتيجة R+Δ) في الجدول الأخير الأمثل ستكون نفسها قيم معاملات العمود S_1 (مضروبة في 1-)، أو قيم معاملات العمود R_2 في نفس الجدول لأن جميع العمليات التي تُجرى على صفوف الأعمدة الخاصة بالمتغيرتين S_1 و R_2 تُجرى أيضا على صفوف العمود (النتيجة R+Δ).

- يُعاد كتابة جدول الحل الأمثل كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
0	S_1	0	1	1	1	-1	850-Δ
50	x_1	1	1	0	1	0	1000+0Δ
Zj		0	50	0	50	0	50000
Cj-Zj		50	10	0	M-50	M	

ولكي يبقى الحل أمثلا وممكنا يجب أن تبقى:

$X_1 \geq 0$ و $S_1 \geq 0$ أي:

$$850-\Delta \geq 0$$

$$\Delta \leq 850$$

و $\Delta \in]-\infty\ 850]$

ويلاحظ أن قيمة X_1 لن تصبح سالبة مهما كانت قيمة Δ .

3. التغير في قيم معاملات المتغيرات في القيود:

يمكن في بعض الأحيان بسبب التطورات التكنولوجية إستبدال الآلات القديمة بأخرى جديدة أكثر تطورا ، أو يمكن إحلال الآلات محل العمال أو إحلال العمالة الماهرة مكان العمالة الأقل مهارة، ...الخ . ومثل هذه التغيرات يمكن أن تؤثر على ما تتطلبه المنتجات من عوامل الإنتاج الداخلة في عملية إنتاجها، وهو ما يؤدي إلى تغير في معاملات المتغيرات في القيود . وعند حدوث هذا لا بد من دراسة أثر هذه التغيرات على الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

مثال:

$$\text{Mix } Z = 3x_1 + 3/2x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

يكون جدول الحل الأمثل كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	3/2	2	0	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_2	R_3	
0	S_1	0	0	7/5	1	1/5	-1/5	-1/5	53/5
3	x_1	1	0	-1/5	0	-3/5	3/5	-2/5	6/5
3/2	x_2	0	1	4/5	0	2/5	-2/5	3/5	16/5
Zj		3	3/2	3/5	0	-6/5	6/5	-3/10	42/5
Cj-Zj		0	0	7/5	0	6/5	M-6/5	M+3/10	

سنحاول دراسة حساسية قيم معاملات المتغيرات حسب ترتيب هذه الأخيرة كما يلي:

المتغيرة X_1

يلاحظ أن المتغيرة الحقيقية X_1 هي متغيرة داخل الأساس .ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة حسب القيد الذي تنتمي إليه كما يلي:

– <u>القيد الأول :سعر ظله يساوي الصفر:</u>

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته" أقل من أو يساوي"، كما يلي:

$$\Delta a_{ij}^* = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكملة في العمود } bi}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية داخل الأساس}} = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكملة في العمود } S1}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية } x1} = \frac{\frac{53}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{53}{6}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_1 أقل من أو تساوي 53/6 ، فإن الحل يبقى أمثلا .

$$w = a_{11} + \Delta a_{ij}^* = 1 + \frac{53}{6} = \frac{59}{6}$$

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلا.

$$a_{11}^* \leq \frac{59}{6}$$

– <u>القيد الثاني :سعر ظله يساوي: 6/5</u>

أي تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

– <u>القيد الثالث :سعر ظله يساوي3/10- :</u>

أي تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

المتغيرة X_2 :

يلاحظ أن المتغيرة الحقيقية **X_2** هي متغيرة داخل الأساس. ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة حسب القيد الذي تنتمي إليه كما يلي:

– القيد الأول: سعر ظله يساوي الصفر:

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته" أقل من أو يساوي"، كما يلي:

$$\Delta a_{ij}^{*}=\frac{\text{قيمة المتغيرة المكملة في العمود } bi}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية داخل الأساس}}=\frac{\text{قيمة المتغيرة المكملة في العمود } S1}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية } x2}=\frac{\frac{53}{5}}{\frac{16}{5}}=\frac{53}{16}$$

$$w=a_{12}+\Delta a_{12}^{*}=1+\frac{53}{16}=\frac{69}{16}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_2 أقل من أو تساوي 69/16 فإن الحل يبقى أمثلا .

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلا.

$$a_{12}^{*}\leq\frac{69}{16}$$

– القيد الثاني: سعر ظله يساوي: 6/5

أي تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

– القيد الثالث: سعر ظله يساوي 3/10- :

أي تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

المتغيرة X_3 :

يلاحظ أن المتغيرة الحقيقية X_3 هي متغيرة خارج الأساس .ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة حسب القيد الذي تنتمي إليه كما يلي:

– القيد الأول: سعر ظله يساوي الصفر:

الحل يبقى أمثلا مهما تغيرت قيمة معامل المتغيرة.

– القيد الثاني: سعر ظله يساوي: 6/5

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته" أكبر أو يساوي" ، كما يلي:

$$\Delta a_{23}^{*}=\frac{Cj-Zj\ \text{قيمة المتغيرة الحقيقية } x3 \text{ في الصف}}{\text{سعر ظل القيد}}=\frac{\frac{7}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{7}{6}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_3 أقل من أو تساوي 7/6 فإن الحل يبقى أمثلا .

$$w = a_{23} + \Delta a_{23}^{*} = 1 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6}$$

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلا.

$$a_{23}^{*} \leq \frac{13}{6}$$

– القيد الثالث: سعر ظله يساوي 3/10- :

يتم دراسة حساسية معامل المتغيرة كما يلي، مع العلم أن القيد إشارته "يساوي"، ودالة الهدف في حالة التقليل:

$$\Delta a_{33}^{*} = \frac{Cj - Zj \text{ قيمة المتغيرة الحقيقية في الصف } x3}{\text{سعر ظل القيد}} = \frac{\frac{7}{5}}{-\frac{3}{10}} = -\frac{14}{3}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_3 أكبر من أو تساوي 14/6- فإن الحل يبقى أمثلا .

$$w = a_{33} + \Delta a_{33}^{*} = 2 - \frac{14}{3} = -\frac{8}{3}$$

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلا.

$$a_{33}^{*} \geq -\frac{8}{3}$$

4. إضافة متغيرة جديدة:

عند إضافة متغيرة جديدة إلى البرنامج الخطي، فإننا ندرس تأثير هذا التغير على الحل الأمثل من خلال ضرب قيم معاملات عمود المتغيرة الجديدة في مصفوفة المتغيرات المكملة أو الإصطناعية في جدول الحل الأمثل كما يلي:

– في حالة قيد أقل من يساوي: نأخذ قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة؛

– في حالة قيد أكبر من أو يساوي: نأخذ إما قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة بعد ضربها في 1- ، أو قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية؛

– في حالة قيد يساوي: نأخذ قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية؛

ثم يتم حساب قيمة Cj-Zj (السطر الأخير من جدول السمبلكس) في عمود المتغيرة المضافة، وهنا نكون أمام حالتين:

- ✓ ***قيمة Cj-Zj سالبة***: إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، فإضافة متغيرة جديدة لا يؤثر على الحل الأمثل، أما إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل فهذا يعني أن الحل سيصبح غير أمثل، وبالتالي ينبغي مواصلة الحل؛
- ✓ ***قيمة Cj-Zj موجبة***: إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، فإضافة متغيرة جديدة سيجعل من الحل غير أمثل،وبالتالي ينبغي مواصلة الحل، أما إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل فهذا يعني أن إضافة المتغيرة الجديدة لن يؤثر على الحل الأمثل.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل المقابل له:

$$\text{Mix } Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	10	0	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
10	x_2	2/7	1	0	-1/7	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	-1	6/7	2
Zj		20/7	10	0	-10/7	0	10/7	20
Cj-Zj		1/7	0	0	10/7	M	M-10/7	

المطلوب: ما هو تأثير إضافة متغيرة ثالثة X_3 على الحل الأمثل للبرنامج الخطي؟

$$\text{Mix } Z = 3x_1 + 10x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 14 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نضرب قيم معاملات عمود المتغيرة X_3 في مصفوفة المتغيرتين الإصطناعيتين R_1 و R_2 كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ -1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

نظيف العمود المتحصل عليه إلى جدول الحل الأمثل ونحسب قيمة Cj-Zj كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ Cj	3	10	5	0	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	
10	x_2	2/7	1	3/7	0	-1/7	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	4/7	1	-6/7	-1	6/7	2
Zj		20/7	10	30/7	0	-10/7	0	10/7	20
Cj-Zj		1/7	0	5/7	0	10/7	M	M-10/7	

يلاحظ أن قيمة C_3-Z_3 هي قيمة موجبة (5/7) وبما أن دالة الهدف في حالة التقليل، فإن الحل يبقى أمثل بنفس متغيرات الأساس وقيمها وقيمة دالة الهدف.

إذا إفترضنا أن قيمة معامل المتغيرة المضافة في دالة الهدف هي 4 ، ففي هذه الحالة تكون قيمة C_3-Z_3 هي (-2/7) وبالتالي سيصبح الحل غير أمثل، وفي هذه الحالة ينبغي متابعة الحل حيث تدخل المتغيرة X_3 إلى الأساس في جدول الحل الموالي ويتم الإستمرار في الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل الجديد التالي:

X_1=2/11

X_2=0

X_3=50/11

S_1=0

S_2=0

MinZ= 206/11

5. إضافة قيد جديد:

إذا إفترضنا أننا أضفنا قيدا ثالثا إلى برنامج خطي يتكون من قيدين (تم حله سابقا)، حيث يتشكل لنا البرنامج الخطي الجديد التالي:

$$\text{Mix } Z = 3X_1 + 10X_2$$

$$\begin{cases} 5X_1 + 6X_2 \geq 10 \\ 2X_1 + 7X_2 \geq 14 \\ X_1 + 5X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

نعوض قيم X_1 و X_2 التي تم الحصول عليها سابقاً عند حل البرنامج الخطي وهي على التوالي 0 و 2 في القيد الثالث المضاف كما يلي:

$$X_1 + 5X_2 \geq 8 \Rightarrow 0+5(2) \geq 8 \Rightarrow 10 \geq 8$$

يلاحظ أن القيد محقق، وبالتالي فنقطة الحل الأمثل لا تتغير.

لنفترض قيدا ثالثا جديدا آخر حيث يصبح البرنامج الخطي الجديد كما يلي:

$$\text{Mix } Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

نعوض قيم x_1 و x_2 في القيد الثالث المضاف كما يلي:

$$x_1 + 3x_2 \geq 8 \Rightarrow 0+3(2) \geq 8 \Rightarrow 6 \geq 8$$

يلاحظ أن القيد الثالث الجديد في هذه الحالة غير محقق . ولدراسة تأثير هذا القيد الجديد على الحل الأمثل نقوم بما يلي:

يتم تحويل القيد إلى معادلة كما يلي:

$$x_1 + 3x_2 - S_3 + R_3 = 8$$

من جدول الحل الأمثل(قبل إضافة القيد الجديد)نستخرج قيم المتغيرات الحقيقية الأساسية. يلاحظ أن المتغيرة الحقيقية الوحيدة داخل الأساس هي x_2 ، وقيمتها هي كما يلي:

$$2/7x_1 + x_2 + 0S_1 - 1/7S_2 + 0R_1 + 1/7R_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - 2/7x_1 - 0S_1 + 1/7S_2 - 0R_1 - 1/7R_2$$

الخطوة التالية هي تعويض قيمة x_2 في القيد الثالث الجديد المحول إلى معادلة المتحصل عليها سابقا كما يلي:

$$x_1 + 3(2 - 2/7x_1 - 0S_1 + 1/7S_2 - 0R_1 - 1/7R_2) - S_3 + R_3 = 8$$

ونتحصل على معادلة القيد الثالث الجديد كما يلي:

$$1/7x_1 + 3/7S_2 - S_3 - 3/7R_2 + R_3 = 2$$

نضيف هذا القيد إلى جدول الحل الأمثل مع إدخال المتغيرة الإصطناعية R_3 إلى الأساس .كما ينبغي أيضا إضافة العمودين الخاصين بـ S_3 و R_3 وبعد هذه العملية يلاحظ أن الجدول أصبح غير أمثل، لهذا ينبغي الإستمرار في الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	10	0	0	0	M	M	M	R	
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	النتيجة	
10	x_2	2/7	1	0	-1/7	0	0	1/7	0	2	
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	0	-1	6/7	0	2	
M	R_3	1/7	0	0	3/7	-1	0	-3/7	1	2	14/3
Zj		20/7+M/7	10	0	-10/7+3M/7	-M	0	10/7-3M/7	M	20+2M	
Cj-Zj		1/7-M/7	0	0	10/7-3M/7	M	M	10/7M-10/7	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثاني.

- S_2 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Cj-Zj**) (عمود الإرتكاز)
- R_3 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3/7) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثاني:</u>

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	10	0	0	0	M	M	M	R	
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	النتيجة	
10	x_2	1/3	1	0	0	-1/3	0	0	1/3	8/3	8
0	S_1	-3	0	1	0	-2	-1	0	2	6	-
0	S_2	1/3	0	0	1	-7/3	0	-1	7/3	14/3	14
Zj		10/3	10	0	0	-10/3	0	0	10/3	80/3	
Cj-Zj		-1/3	0	0	0	10/3	M	M	M-10/3		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** بقيت قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- X_1 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Cj-Zj**) (عمود الإرتكاز)
- X_2 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (1/3) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثالث:

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	10	0	0	0	M	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	
3	x_1	1	3	0	0	-1	0	0	1	8
0	S_1	0	9	1	0	-5	-1	0	5	30
0	S_2	0	-1	0	1	-2	0	-1	2	2
Zj		3	9	0	0	-3	0	0	3	24
Cj-Zj		0	1	0	0	3	M	M	M-3	

قيم (Cj-Zj)كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$x_1=8$

$x_2=0$

$S_1=30$

$S_2=2$

$S_3=0$

$Z= 24$

مثال 01:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له:

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 460 \\ x_1 + 2x_3 \leq 420 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{cases}$$

والذي جدول حله الأمثل التالي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	20	30	50	0	0	0	R
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	النتيجة
30	x_2	1/6	1	0	1/3	0	-1/6	220/3
0	S_2	13/6	0	0	-5/3	1	1/6	280/3
50	x_3	1/2	0	1	0	0	1/2	210
Zj		30	30	50	10	0	20	12700
Zj-Cj		10	0	0	10	0	20	

المطلوب: تحديد مدى أمثلية الحل لمعاملي المتغيرين X_2 X_3 في دالة الهدف على الحل الأمثل للبرنامج الخطي؟

الحل:

1. تحديد مدى الأمثلية معامل X_2 :

المتغيرة X_2 هي متغيرة داخل الأساس .فإذا إفترضنا أن معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار Δ ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلا ؟

C_i^B	X_i^B \ C_j	20	30+Δ	50	0	0	0	R
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	النتيجة
30+Δ	x_2	1/6	1	0	1/3	0	-1/6	220/3
0	S_2	13/6	0	0	-5/3	1	1/6	280/3
50	x_3	1/2	0	1	0	0	1/2	210
Zj		30+Δ/6	30+Δ	50	10+Δ/3	0	20-Δ/6	$12500+\frac{220}{3}\Delta$
Zj-Cj		10+ Δ/6	0	0	10+Δ/3	0	20-Δ/6	

يبقى الجدول السابق أمثلا ، إذا بقيت جميع قيم السطر Zj-Cj أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التعظيم . وعلى هذا الأساس يجب أن تبقى قيم الخلايا في السطر Zj-Cj المكتوبة بدلالة Δ كلها أكبر من أو تساوي الصفر، أي أن الخانة Z_6-C_6 ، تبقى الحل أمثلا عندما:

$$20-\Delta/6\geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 120$$

أي:

$$\Delta \in]-\infty, 120]$$

2. تحديد مدى الأمثلية معامل X_3 :

المتغيرة X_3 هي متغيرة داخل الأساس .فإذا إفترضنا أن معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدارΔ ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلا ؟

C_i^B	X_i^B \ C_j	20	30	$50+\Delta$	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
30	x_2	1/6	1	0	1/3	0	-1/6	220/3
0	S_2	13/6	0	0	-5/3	1	1/6	280/3
$50+\Delta$	x_3	1/2	0	1	0	0	1/2	210
Zj		$30+\Delta/2$	30	$50+\Delta$	10	0	$20+\Delta/2$	$12700+210\Delta$
Zj-Cj		$10+\Delta/2$	0	0	10	0	$20+\Delta/2$	

يبقى الجدول السابق أمثلا إذا بقيت جميع قيم السطر Zj-Cj أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التعظيم . وعلى هذا الأساس يجب أن تبقى قيم الخلايا في السطر Zj-Cj المكتوبة بدلالة Δ كلها أكبر من أو تساوي الصفر، أي أن :

$$10+\Delta/2\geq 0 \Rightarrow \Delta\geq -20$$

أي: $\Delta \in [-20, +\infty]$

و: $20+\Delta/2\geq 0 \Rightarrow \Delta\geq -40$

أي: $\Delta \in [-40, +\infty]$

ومنه: $\Delta \in [-20, +\infty]$

مثال 02:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له:

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 20x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 420 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 380 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

إذا علمت أن جدول الحل الأمثل لهدا البرنامج هو:

C_i^B	X_i^B \ C_j	30	20	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
20	x_2	0	1	1/3	0	-1/2	20
0	S_2	0	0	-3/2	1	3/2	30
30	x_1	1	0	-1/6	0	1/2	50
Zj		30	20	5/3	0	5	1900
Zj-Cj		0	0	5/3	0	5	

المطلوب: حدد البرنامج الأمثل لهذا النموذج ، إذا تغير المورد المتاح للقيد الأول بمقدار Δ؟

الحل:

نموذج يصبح بالشكل التالي:

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 20x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 420 + \Delta \\ 3x_1 + 6x_2 \le 380 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 240 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

يمكن شرح نتائج الصف الأخير من جدول كما يلي:

أرقام الخانات: Z_1-C_1، Z_2-C_2، Z_4-C_4 كلها مساوية للصفر وهي نتيجة لإدخال وظهور المتغيرات x_1 x_2 S_2 في الحل النهائي أي في العمود X^B_i ولذلك يجب أن تكون قيمتها دائما مساويا للصفر في السطر الأخير. وتبدو أهمية قيمة أرقام هذه الخانات عندما تكون هناك متغيرات أصلية X_i غير موجودة في الحل النهائي حيث يمكن معرفة آثار إدخال تلك المتغيرات إلى الحل النهائي على الأرباح وعلى البرنامج الإنتاجي.

– أما أرقام الخانات: Z_3-C_3، Z_5-C_5، فهي تقيس تكلفة قيود الاقسام والتي يمكن شرحها كما يلي:

أولا/ إن تغير في الطرف الأيمن من القيد الأول (المتعلق بالقسم الأول) والممثل بالمتغير S_1 (متغير الطاقات الغير المستغلة) تبلغ تكلفة هذا القيد 5/3 أي أنه عند إضافة ساعة واحدة فقط للقسم الاول ، فإن الربح سوف يزداد بمقدار الربح الحدي (سعر الظل) والمقدر بـ : 5/3 دج. فمثلا زيادة طاقة القسم الأول من 420 ساعة إلى 421 ساعة فإن الحل الأمثل سوف يعطينا برنامجا إنتاجيا مختلفا:

$x_1 = 50 - 1/6 = 49{,}83$ Unité, $x_2 = 20 + 1/3 = 20{,}33$ Unité

Max Z =30(49,83) + 20(20,33) =1901,66 (زيادة قدرها : 1,66 دج أو 3/5دج)

وللإجابة على السؤال هناك طرق عديدة يمكن إتباعها لتحديد هذا المجال وأبرزها الجانب الرياضي وهو كما يلي:

القيد الأول: S_1:

$20+1/3\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\geq -60$

$30-3/2\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\leq 20$

$50-1/6\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\leq 300$

ومنه: $-60\leq\Delta\leq 20$

أي تتغير كمية المورد الأول للقسم الأول ضمن مجال [420+20،420-60] أي: [440،360]

مثال 03:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له:

$$\text{Max } Z = 300x_1 + 500x_2 + 400x_3$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 10x_2 + 8x_3 \leq 1800 \\ 15x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 1800 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1800 \\ x_1 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

إذا علمت أن جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج هو:

C_i^B	X_i^B \ C_j	300	500	400	0	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	0	-2	0	1	-4/5	0	0	360
400	x_3	0	3/2	1	0	1/10	0	3/2	165
0	S_3	0	1	0	0	-1/5	1	0	540
300	x_1	1	0	0	0	0	0	-1	10
Zj		300	600	400	0	40	0	300	69000
Zj-Cj		0	100	0	0	40	0	300	

المطلوب: حدد البرنامج الأمثل لهذا النموذج ، إذا تغير المورد المتاح للقيد الثاني بمقدار Δ؟

الحل:

نموذج يصبح بالشكل التالي:

$$\text{Max } Z = 300x_1 + 500x_2 + 400x_3$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 10x_2 + 8x_3 \leq 1800 \\ 15x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 1800 + \Delta \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1800 \\ x_1 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

– أما أرقام الخانة: Z_5-C_5، فهي تقيس تكلفة قيود الأقسام والتي يمكن شرحها كما يلي:

أولا/ إن تغير في الطرف الأيمن من القيد الثاني (المتعلق بالقسم الثاني) والممثل بالمتغير S_2 (متغير الطاقات الغير المستغلة) تبلغ تكلفة هذا القيد 40 أي أنه عند إضافة ساعة واحدة فقط للقسم الأول ، فإن الربح سوف يزداد بمقدار الربح الحدي (سعر الظل) والمقدر بـ : 40 دج. فمثلا زيادة طاقة القسم الثاني من 1800 ساعة إلى 1801 ساعة فإن الحل الأمثل سوف يعطينا برنامجا إنتاجيا مختلفا:

$x_1 = 10$ تبقى ثابتة

$x_3 = 165 + 1/10\Delta$

$S_1 = 360 - 4/5\Delta$

$S_3 = 540 - 1/5\Delta$

$\text{Max } Z = 300(10) + 500(0) + 400(165{,}1) = 69040$ DA (زيادة قدرها : 40 دج)

وللإجابة على السؤال هناك طرق عديدة يمكن إتباعها لتحديد هذا المجال وأبرزها الجانب الرياضي وهو كما يلي:

القيد الثاني: S_2:

$165 + 1/10\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -1650$

$360 - 4/5\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 450$

$540 - 1/5\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 2700$

أي تتغير كمية المورد الثاني للقسم الثاني ضمن مجال [1650-،450] . حتى لا يتغير الحل الأمثل.

الفصل الخامس: مسائل النقل
Transportation problems

1. مسائل النقل في حالة تخفيض التكاليف.

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية *North-West Corner*.
- طريقة التكلفة الدنيا *Least-Cost*.
- طريقة فوجل التقريبية (الجزاء) *Vogel's Approximation (Penalty Method)*.

2. مسائل النقل في حالة تعظيم الأرباح.

- الزاوية الشمالية الغربية.
- طريقة أعلى عائد (وهي المقابلة لأدنى تكلفة في حالة التدنئة).

الفصل الخامس: مسائل النقل
Transportation problems

يعتبر تقليل تكلفة نقل المنتجات مواقع الإنتاج والتخزين إلى مراكز الطلب جزءًا أساسيًا من الحفاظ على الربحية للشركات التي تتعامل مع توزيع المنتجات نظرًا لأن تكاليف النقل لا يمكن التحكم فيها بشكل عام ، فإن تقليل التكلفة الإجمالية يتطلب اتخاذ أفضل قرارات توجيه المنتج. من هذا المنطلق تسعى مؤسسات الأعمال المختلفة إلى استخدام الوسائل والأساليب الحديثة والمتطورة بهدف تخفيض تكاليف النقل إلى أدنى مستوى ممكن. تمت صياغة هذه المشكلة الأساسية لأول مرة كمشكلة برمجة خطية في أوائل الأربعينيات من القرن الماضي وهي معروفة على نطاق واسع بمشكلة النقل**(Sewel, 2005, p. 1)**

1. مسائل النقل في حالة تخفيض التكاليف:

وكمثال: لنفرض أن شركة ما تمتلك مصنعان في مواقع مختلفة في جميع أنحاء البلاد حيث ينتجان أدوات معينة. يمتلك شريك المبيعات الخاص بهم ثلاثة مستودعات مركزية حيث يقومون بشحن هذه الأدوات إلى عملائهم المختلفين. يمكن للمصانع إنتاج عدد معين من الأدوات في الأسبوع لكل منها ، كما أن الطلب المتوقع لكل مستودع معروف أيضًا. يوجد تكلفة شحن من كل مصنع إلى كل مستودع.

السؤال المطروح: ما هو المصنع الذي يجب أن ينتج ويشحن منتوجاته ؟ كم عدد الأدوات التي يجب تصنيعها ؟ ولأي مستودع يجب شحنها لتلبية الطلب في كل موقع بأقل تكلفة؟**(IMSL, 2020, p. 1)**

صياغة نموذج مسألة النقل:

نموذج النقل هو نوع خاص من مشاكل الشبكات لشحن سلعة من المصدر (على سبيل المثال: المصانع) إلى الوجهات (على سبيل المثال : المستودع). يتعامل نموذج النقل بالحصول على خطة الحد الأدنى للتكلفة لنقل سلعة من عدد من المصادر (m) إلى عدد من الوجهات (n).

لنفرض أن: s_i هو عدد وحدات التوريد المطلوبة عند المصدر i ($i=1,2,3,\dots,m$)، d_j هو عدد وحدات المطلوبة (الطلب) في الوجهة j ($j=1,2,3,\dots,n$) ويمثل c_{ij} تكلفة الوحدة الواحدة لنقل الوحدات من المصادر i إلى الوجهة j.

باستخدام طريقة البرمجة الخطية لحل مشكلة النقل ، نحدد قيمة الوظيفة الموضوعية التي تقلل من تكلفة النقل وأيضًا تحديد عدد الوحدات التي يمكن نقلها من المصدر i إلى الوجهة j. إذا كان x_{ij} هو عدد الوحدات المشحونة من المصدر i إلى الوجهة j. **(Shraddha, 2017, p. 270)**

ومنه النموذج الرياضي لمشكلة النقل فيمكن كتابته بالشكل التالي:

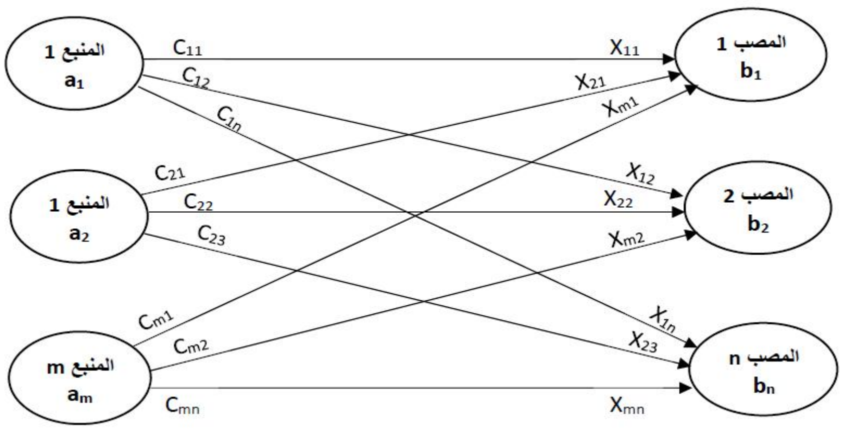
$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$
$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \ ,\ \ i = 1,2,3 \dots m.$$
$$\sum\nolimits_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \ ,\ \ j = 1,2,3 \dots n.$$
$$x_{ij} \geq 0$$

يمكن تمثيل جدول التكاليف للوحدات من المراكز الإنتاجية إلى المراكز التسويقية كما يلي:

مراكز العرض	مراكز الطلب					العرض Supply
	1	2	3	....	N	
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
3	C_{31} X_{31}	C_{23} X_{23}	C_{33} X_{33}	...	C_{3n} X_{3n}	a_3
...	...	...	...	...	...	...
M	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	...	C_{mn} X_{mn}	
Demand الطلب	b_1	b_2	b_3	...	b_n	$\sum a_i = b_j$

كما يشترط نموذج النقل بشكله الأولي ضرورة المساواة بين عدد الوحدات في المراكز الإنتاجية وعدد الوحدات المطلوبة في المراكز التسويقية (مراكز الطلب)، ليكون جدول النقل في حالة توازن، أي أن: (مجموع العرض = مجموع الطلب)، أما إذا لم تتحقق المساواة يتم إضافة سطر أو عمود وهمي ليستوعب الفارق بين كمية العرض والطلب وتكون تكاليف النقل فيها صفر.

الشكل 01: تمثيل مشكلة النقل بيانيا.



المصدر: ريغي هشام. (2021). **محاضرات وتطبيقات في مادة رياضيات المؤسسة.** مطبوعة منشورة. جامعة ميلة. الجزائر.

إيجاد الحل الأولي(الإبتدائي) لمشكلة النقل

لغرض إيجاد الحل الأولي لمشكلة النقل هناك ثلاث طرق رئيسية:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية North-West Corner
- طريقة التكلفة الدنيا Least-Cost
- طريقة فوجل التقريبية(الجزاء) Vogel's Approximation (Penalty Method).

– **طريقة الزاوية الشمالية الغربية North-West Corner Method :** يقصد بالزاوية الشمالية الغربية أو خانة في الجدول إلى الأعلى وإلى اليسار، وهي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي، وتعتبر هذه الطريقة من أسهل وأبسط الطرق وأكثرها شيوعا، حيث لا يستخدم فيها أي منطق علمي لتوزيع الكميات المتوفرة من المراكز الانتاجية إلى مراكز الطلب، بالمقابل فإنها تهمل عنصر التكاليف عند التوزيع، وتتطلب جداول كثيرة للوصول إلى الحل الأمثل.

يتم الحل وفقا لهذه الطريقة بعد التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن كما يلي:

– نبدأ بالخلية العليا اليسرى(الزاوية الشمالية الغربية) لجدول النقل، ثم نخصص أكبر عدد من الوحدات لتلك الخلية، ويكون هذا العدد المخصص الأقل في سطر الكمية المعروضة المتوفرة أو الأقل في عمود متطلبات الطلب.

– ننقص كمية العرض في السطر، وكمية الطلب في العمود بنفس كمية الوحدات التي خصصت للخلية.

– إذا أصبح العرض في السطر مساويا الآن للصفر، نتحرك إلى الأسفل في العمود إلى الخلية التالية، أما إذا أصبح كل من العرض في السطر والطلب في العمود مساويين للصفر، نتحرك إلى الأسفل خلية واحدة ثم إلى اليمين خلية أخرى.

– نخصص للخلية التالية والمحددة في الخطوة الثالثة، أكبر عدد ممكن الوحدات، ثم نعود حتى نصل إلى حل أولي مقبول. **(بهلولي، 2020، صفحة 116)**

مثال 01:

تنتج شركة ثلاثة أنواع من السلع الكهربائية، وتقوم بتجهيز ثلاثة مراكز تسويقية (الطلب)، و يوضح الجدول التالي تكاليف نقل الوحدة الواحدة وكذا الكميات المعروضة والمطلوبة.

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	1	2	3	**Supply**
1	7	3	10	22
2	4	6	0	24
3	5	8	9	14
Demand الطلب	18	22	20	60

المطلوب: إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

الحل:

بعد التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة(في هذا المثال متساوية وتساوي 60)نتبع الخطوات التالية:

– نبدأ بالطلب الأول وقيمته 18 وحدة والعرض الأول وقيمته 22 وحدة، وبالتالي العرض الأول يغطي الطلب الأولي وبتكلفة نقل 7 دج، مع بقاء 4 وحدات من العرض الأول.

– ننتقل للطلب الثاني وقيمته 22 وحدة يتم تلبيتها 4 وحدات من العرض الأول المتبقي وبتكلفة نقل 3 دج، أما 18 وحدة الأخرى تلبى بالعرض الثاني المقدر ب 24 وحدة بتكلفة نقل 6 دج، مع بقاء 6 وحدات من العرض الثاني بعد تلبية الطلبين الأول والثاني.

– ثم ننتقل للطلب الثالث وقيمته 20 وحدة التي يتم تلبيته ب 6 وحدات المتبقية من العرض الثاني بتكلفة نقل 0 دج، وإكمالها بالعرض الثالث 14 وحدة بتكلفة نقل 9 دج.

ويمكن تمثيل الخطوات السابقة في جدول الحل الأولي بحيث أن ما داخل المربعات الصغيرة هي تكاليف النقل والأخرى الكميات:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض Supply
	1	2	3	
1	7 **18**	3 **4**	10	22
2	4	6 **18**	0 **6**	24
3	5	8	9 **14**	14
Demand الطلب	18	22	20	60

ثم نحسب قيمة التكاليف الكلية من دالة الهدف بضرب الكميات في تكلفة الوحدة الواحدة للنقل، ومنه تكون تكلفة النقل الأولية وفقا لهذه الطريقة:

MinZ=(18×7)+(4×3)+(18×6)+(6×0)+(14×9)=372 DA

مثال 02:

يقوم الديوان الوطني للتمور بتسويق تمور إنطلاقا من ثلاثة موانئ رئيسية إلى ثلاثة دول، حيث أن الكميات الممكن تصديرها حسب الموانئ هي:

- ميناء الجزائر : يمكن أن يصدر 80 طن.
- ميناء وهران : يمكن أن يصدر 40 طن.
- ميناء جيجل : يمكن أن يصدر 60 طن.

و كانت الكميات المطلوبة لكل دولة:

- الو م أ: حجم الطلب 70 طن.
- كندا : حجم الطلب 70 طن.
- استراليا : حجم الطلب 40 طن.

و الجدول الموالي يلخص تكاليف النقل للقنطار الواحد:

	الو م أ	كندا	أستراليا
ميناء الجزائر	5	6	7
ميناء وهران	9	5	11
ميناء جيجل	13	12	8

المطلوب:

1. أكتب البرنامج الرياضي للمسألة؟
2. إيجاد الحل مثل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

الحل:

1. كتابة البرنامج الرياضي للمسألة:

دالة الهدف : بما أن الهدف هو البحث عن أفضل توليفات للنقل بين الموانئ و مراكز الاستقبال بأقل التكاليف فإن دالة الهدف في هذه المسألة هي دالة تدنئة للتكاليف و يمكن صياغة المعادلة بالشكل الرياضي العام:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \ ,\ \ i = 1,2,3 \dots m.$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \ ,\ \ j = 1,2,3 \dots n.$$
$$x_{ij} \geq 0$$

و يمكن ترجمتها حسب مثالنا إلى الشكل:

✓ دوال الطلب تكون بالشكل:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j / \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3$$

✓ دوال العرض تكون بالشكل:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = a_i / \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = a_3$$

كميات العرض والطلب غير سالبة:

$$x_{ij} \geq 0$$

2. إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

بعد التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة(في هذا المثال متساوية = 180)نتبع الخطوات التالية:

- نبدأ بالطلب الأول وقيمته 70 طن والعرض الأول وقيمته 80 طن، وبالتالي العرض الأول يغطي الطلب الأولى وبتكلفة نقل 5 دج، مع بقاء 10 طن من العرض الأول.
- ننتقل للطلب الثاني وقيمته 70 طن يتم تلبيتها 10 طن من العرض الأول المتبقي وبتكلفة نقل 6 دج، أما 60 طن الأخرى تلبى بالعرض الثاني المقدر ب 40 طن بتكلفة نقل 5 دج، و 20طن من العرض الثالث وبتكلفة 12 دج.
- ثم ننتقل للطلب الثالث وقيمته 40 طن التي يتم تلبيته ب 40 طن المتبقية من العرض الثالث بتكلفة نقل 8 دج.

ويمكن تمثيل الخطوات السابقة في جدول الحل الأولي بحيث أن ما داخل المربعات الصغيرة هي تكاليف النقل والأخرى الكميات:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض Supply
	الو م أ	كندا	أستراليا	
ميناء الجزائر	5 / 70	6 / 10	7	80
ميناء وهران	9	5 / 40	11	40
ميناء جيجل	13	12 / 20	8 / 40	60
Demand الطلب	70	70	40	180

ثم نحسب قيمة التكاليف الكلية من دالة الهدف بضرب الكميات في تكلفة الوحدة الواحدة للنقل، ومنه تكون تكلفة النقل الأولية وفقا لهذه الطريقة:

$$MinZ=(70\times5)+(10\times6)+(40\times5)+(20\times12)+(40\times8)=1170\ DA$$

– **طريقة التكلفة الدنيا Least-Cost:**

طريقة التكلفة الدنيا هي طريقة أخرى تستخدم للحصول على الحل المبدئي العملي لمشكلة النقل. هنا ، يبدأ التخصيص بالخلية ذات التكلفة الدنيا. يتم اختيار الخلايا الأقل تكلفة على الخلية الأعلى تكلفة بهدف الحصول على أقل تكلفة للنقل.

تعطي طريقة التكلفة الدنيا نتائج أفضل من طريقة الركن الشمالي الغربي لأنها تأخذ في الاعتبار تكلفة الشحن أثناء إجراء التخصيص ، في حين أن طريقة الزاوية الشمالية الغربية تراعي فقط متطلبات التوافر والعرض والتخصيص يبدأ من الزاوية اليسرى القصوى بغض النظر عن تكلفة الشحن. **(Business, 2022, p. 1)**

ولفهم طريقة التكلفة الأقل من خلال المشكلة المثال أدناه:

مثال 03:

تقوم المؤسسة الوطنية للمياه المعدنية بالجزائر بتموين المناطق الشمالية للوطن بمنتوجاتها من المياه المعدنية عن طريق وحداتها الثلاث الأكثر شهرة وهي:

- وحدة موزاية ، تنتج قارورات مياه المسماة (موزاية) بطاقة قصوى هي 55.10^3 قارورة شهريا؛
- وحدة سعيدة ، تنتج قارورات مياه المسماة (سعيدة) بطاقة قصوى هي 45.10^3 قارورة شهريا؛
- وحدة باتنة ، تنتج قارورات مياه المسماة (باتنة) بطاقة قصوى هي 20.10^3 قارورة شهريا.

يتم التسويق في إتجاه النواحي الشمالية الثلاث وهي:

- الناحية الغربية مقرها وهران، تقدر كميات طلبها بـ 50.10^3 قارورة شهريا؛

- الناحية الشرقية مقرها قسنطينة، تقدر كميات طلبها بـ 30.10^3 قارورة شهريا؛
- الناحية الوسطى مقرها البليدة، تقدر كميات طلبها بـ 40.10^3 قارورة شهريا.

دراسات المحاسبة التحليلية بينت أن تكلفة القارورة الواحدة المنقولة من كل وحدة إنتاج إلى كل مقر ناحية من النواحي بالدينار كما يلي:

	الوسط	الشرق	الغرب
موزاية	1	4	5
سعيدة	5	7	3
باتنة	10	8	9

تبحث المؤسسة عن خطة لتموين مختلف النواحي بمنتوجاتها بأقل تكلفة ممكنة. **(راتول، 2006، صفحة 110)**

المطلوب:

1. أثبت أن هذه المسألة تخضع لمسائل النقل؟
2. شكل جدول المسألة باستخدام طريقة التكلفة الدنيا؟

الحل:

1. كتابة البرنامج الرياضي للمسألة:

دالة الهدف: هدف المؤسسة هو إيجاد الكميات الواجب توجيهها من كل منبع إلى كل مصب بغية تدنئة التكاليف الكلية التي تتحملها المؤسسة وبالتالي فإنه توجد دالة الهدف هي على الشكل التالي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}\, x_{ij}$$

مجموع الطلب يساوي مجموع العرض:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 55 + 45 + 20 = 120$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 50 + 40 + 30 = 120$$

كميات العرض والطلب غير سالبة:

$$x_{ij} \geq 0$$

2. تشكيل جدول المسألة باستخدام طريقة التكلفة الدنيا:

بعد التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة(في هذا المثال متساوية $=120.10^3$ قارورة مياه معدنية) نتبع الخطوات التالية:

– نبدأ بالطلب الأول وقيمته 40.10^3 قارورة والعرض الأول وقيمته 55.10^3 قارورة ، وبالتالي العرض الأول يغطي الطلب الأولى وبأقل تكلفة نقل 1 دج، مع بقاء 15.10^3 قارورة من العرض الأول.

– بقاء 15.10^3 قارورة من العرض الأول توزع على مركز الطلب الثاني (لأنه أقل تكلفة)

– ننتقل للطلب الثاني وقيمته المتبقية 15.10^3 قارورة ،يتم تلبيتها من العرض الثاني بـ 15.10^3 قارورة وبتكلفة نقل 7 دج، أما 30.10^3 قارورة متبقيةالأخرى المتبقية من العرض الثاني تلبي مركز الطلب الثالث المقدر ب 50.10^3 قارورة بتكلفة نقل 3 دج، و 20.10^3 قارورة من العرض الثالث تلبي بها مركز الطلب الثالث وبتكلفة أقل تقدر بـ 9 دج.

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض Supply	باقي	باقي
	الوسط	الشرق	الغرب			
موزاية	1 / **40**	4 / **15**	5	55	15	0
سعيدة	5	7 / **15**	3 / **30**	45	30	0
باتنة	10	8	9 / **20**	20	0	
Demand الطلب	40	30	50	120		
باقي	0	15	20			
باقي		0	0			

ثم نحسب قيمة التكاليف الكلية من دالة الهدف بضرب الكميات في تكلفة الوحدة الواحدة للنقل، ومنه تكون تكلفة النقل الأولية وفقا لهذه الطريقة:

$$MinZ=(40\times1)+(15\times4)+(15\times7)+(30\times3)+(20\times9)=475.10^3\ DA$$

– **طريقة فوجل التقريبية(الجزاء) Vogel's Approximation (Penalty Method):**

مشكلة النقل هي مشكلة الحياة الحقيقية حيث يتم نقل السلع من المصانع إلى مستودعات البيع بالتجزئة بحيث يجب تقليل تكلفة النقل الإجمالية. في البحوث العمليات ، تعتبر مسائل النقل فئة خاصة من مسائل البرمجة الخطيةحيث تـُعرف طريقة فوجل التقريبية (VAM) بالطريقة الفعالة لحل مشاكل النقل .إن مفهوم تكلفة الجزاء (الاختلاف بين أصغر تكلفة في الصف أو العمود) تجعل هذه

الطريقة أكثر فاعلية من الطرق الأخرى مثل: طريقة الزاوية الشمالية الغربية North-West Corner و طريقة التكلفة الدنيا Least-Cost وما إلى ذلك. ولكن طريقة التحديد تكلفة الجزاء ليست منطقية في بعض الحالات. **(Ashraful, 2014, p. 182)**.

وتتلخص خطوات إيجاد الحل الأساسي الأولي بهذه الطريقة فيما يلي:

- الخطوة 1: موازنة مشكلة النقل المحددة إذا كان (إجمالي العرض> إجمالي الطلب) أو (إجمالي العرض <إجمالي الطلب)؛
- الخطوة 2: حدد تكلفة الجزاء لكل صف وعمود عن طريق طرح أقل تكلفة للخلية في الصف أو العمود من أقل تكلفة خلية التالية في نفس الصف أو العمود؛
- الخطوة 3: حدد الصف أو العمود الذي يحتوي على أعلى تكلفة جزاء، ونخصص أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة في السطر أو العمود الذي تم اختياره؛
- الخطوة 4: قم بتخصيص أكبر قدر ممكن للخلية الممكنة بأقل تكلفة نقل في الصف أو العمود مع أعلى تكلفة جزاء؛
- الخطوة 5: كرر الخطوات 2 و 3 و 4 حتى يتم استيفاء جميع المتطلبات؛
- الخطوة 6: حساب تكلفة النقل الإجمالية للتخصيص الممكنة. **(Serdar, 2011, p. 373)**

مثال 04:

أوجد الحل الأولي لمشكلة النقل السابقة (مثال03) باستخدام طريقة فوجل ؟

الحل:

1. نجد الفروقات الأولى في التكلفة للأسطر والأعمدة كما هو مبين في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب 1	2	3	العرض Supply	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3
1	[1] 40	[4] 15	[5] /	55	3	1	1
2	[5] /	[7] /	[3] 45	45	2	4	/
3	[10] /	[8] 15	[9] 5	20	1	1	1
Demand الطلب	40	30	50	120			
الفرق 1	4	3	2				
الفرق 2	/	3	2				
الفرق 3	/	4	4				

2. نلاحظ أن أكبر فرق سطريا وعموديا هو الموجود في العمود الأول، وعليه نبحث على أقل تكلفة في العمود مع الكمية (d_1) فنجد أن للخلية (S_1,d_1) أقل تكلفة وقيمتها هي 1 ، نقارن احتياجات مركز الطلب (d_1) مع الكمية المتاحة في المصدر (S_1) ثم نختار أقل الكميتين $\min(40,55)=40$ هذه العملية تؤدي إلى تلبية كل إحتياجات المركز (d_1) (تشطيب الخليتين المتبقيتين من الجدول) بينما تبقى قيمة عرض مقدارها 15 في المصدر (S_1) ، ثم نعيد حساب الفروق الثانية بين التكاليف مرة أخرى مع تجاهل تكاليف الخلايا المملوءة والمشطبة.

3. نلاحظ أن أكبر فرق يقابل السطر الثاني، وأصغر تكلفة على مستوى هذا السطر هي 3 في الخلية (S_2,d_3) نقارن احتياجات مركز الطلب (d_3) مع ما هو متاح من الكميات لدى المصدر (S_2) ثم نختار أقل الكميتين $\min(50,45)=45$ يتم تخصيص 45 للخلية (S_2,d_3) وبالتالي جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر (S_2) قد نفذت(يتم شطب الخليتين المتبقيتين) وبقي احتياج مقداره 5 وحدات للمركز (d_3) لم يلبى بعد، حساب الفروق الثالثة بين التكاليف مرة أخرى.

4. نلاحظ أن أكبر فرق هو 4 على مستوى العمودين الثاني والثالث، إلا أننا نختار العمود الثاني لأنه يقابل أقل تكلفة وتقدر قيمتها ب 4 في الخلية (S_1,d_2) نقارن احتياجات مركز الطلب (d_2) مع ما هو متبقي من الكميات لدى المصدر (S_1) ، ثم نختار أقل الكميتين $45 = \min(15,30)$ ونخصصها للخلية (S_1,d_2) وبالتالي جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر (S_1) قد نفذت (يتم شطب الخلية المتبقية)وبقي طلب مقداره 15 وحدة في العمود الثاني (d_3) لم يلبى بعد.

5. عند هذه المرحلة من الحل لا نحتاج لحساب الفرق في التكلفة للأسطر والأعمدة بسبب وجود مصدر عرض واحد (S_3) والذي لم تنفذ كل الكميات المتوفرة لديه، إذن نبحث عن أقل تكلفة في السطر (S_3) والتي تساوي 8 تقابل العمود (d_2) ، إذن سيتم تخصيص 15 وحدة لتلبية كل احتياجات مركز الطلب (d_2)، ويبقى عرض مقداره 5 وحدات يخصص للخلية (S_3,d_3) ، ويتم بذلك تلبية كل إحتياجات المركز (d_3) ، وبذلك يصبح نموذج النقل في صيغته النهائية كما يلي:

مراكز العرض	مراكز الطلب		
	1	2	3
1	[1] 40	[4] 15	[5] /
2	[5] /	[7] /	[3] 45
3	[10] /	[8] 15	[9] 5
Demand الطلب	40	30	50

عدد الخلايا الداخلة في الحل يساوي إلى m+n-1 ويساوي 5، وبموجب الجدول أعلاه تكون تكلفة النقل الإجمالية كما يلي:

$$MinZ=(40\times1)+(15\times4)+(45\times3)+(15\times8)+(5\times9)=400.10^3\ DA$$

نلاحظ أن الطريقتين الأخيرتين قد حققتا اقتصادا في مجموع التكاليف قدره 75 وحدة نقدية مقارنة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

مثال 05:

لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 5 مراكز توزيع ، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع الخمسة.

تعرض مراكز الإنتاج (المنبع)كميات معينة من الإنتاج: a_1، a_2، a_3، أما مراكز التوزيع (المصب) فتقوم بطلب كميات معينة من الإنتاج: b_1، b_2، b_3، b_4، b_5، كما هو موضح في الجدولين أدناه.

مركز الإنتاج	O_1	O_2	O_3
الطاقة الإنتاجية (العرض d_i)	$a_1=240$	$a_2=160$	$a_3=260$

مركز التوزيع	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
الطلب (b_j)	$b_1=120$	$b_2=130$	$b_3=145$	$b_4=125$	$b_5=140$

عملية نقل المنتج P من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مراكز التوزيع الخمسة يترتب عليها تحمل تكلفة النقل C_{ij}.

C_{ij} تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج P من مراكز الإنتاج i إلى مركز التوزيع j .

تكلفة النقل الوحدوية يقدمها الجدول أدناه:

C_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	100	800	100	500	400
O_2	500	500	300	600	700
O_3	200	900	500	900	800

المطلوب:

أوجد الحل الأولي لمشكلة النقل باستخدام طريقة فوجل ؟

الحل:

1. نجد الفروقات الأولى في التكلفة للأسطر والأعمدة كما هو مبين في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب					العرض Supply	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3	الفرق 4
	1	2	3	4	5					
1	[100] /	[800] /	[100] **145**	[500] /	[400] **95**	240	0	300	100	/
2	[500] /	[500] **130**	[300] /	[600] **30**	[700] /	160	200	200	100	100
3	[200] **120**	[900] /	[500] /	[900] **95**	[800] **45**	260	300	300	100	100
الطلب **Demand**	120	130	145	125	140	660				
الفرق 1	100	300	200	100	300					
الفرق 2	/	300	200	100	300					
الفرق 3	/	300	/	100	300					
الفرق 4	/	400	/	300	100					

2. نقوم بحساب الفرق بين أدنى تكلفتين على مستوى جميع الأسطر و الأعمدة فنحصل على القيم: (100-100=0، 300-500=200، 500-200=300) على مستوى الأسطر الثلاث، ونحصل على القيم: (200-100=100، 800-500=300، 300-100=200، 600-500=100، 700-400=300) على مستوى الأعمدة؛

3. نقوم باختيارأكبر فرق بين الأعمدة و الأسطر، نلاحظ في هذا المثال أن 300 هي أكبر فرق و قد تكررت في السطر الأخير و العمودين الثاني و الخامس، و هنا يتم اختيار أكبر فرق بينها و الذي يوافق أدنى تكلفة، و هو السطر الثالث و الذي يوافق 200 التي تعبر عن أدنى تكلفة في الجدول؛

4. تعبر الخلية 200 عن تكلفة تزويد المصب الأول بالمنتج من المنبع الثالث، لذلك يتم تزويد طلبه المتمثل في 120 وحدة من 260 وحدة (عرض المنبع الثالث)، و بذلك يتم إشباع المصب الأول (العمود الأول)، و يتبقى للمنبع الثالث كمية معروضة تقدر بـ 140 وحدة؛

5. و هكذا يتم إلغاء العمود الأول من جدول النقل لكونه مشبعا، و يتم تحيين (*actualisation*) الجدول بإعادة حساب الفرق بين التكاليف المتبقية، فنحصل على القيم: 300، 200، 300 في الأسطر الثلاث، و تبقى القيم: 300، 200، 100، 300 في الأعمدة الأربعة المتبقية، نقوم باختيار أكبر فرق (300) و الذي يوافق أدنى تكلفة (100)؛

6. تمثل الخلية 100 عن تكلفة نقل المنتجات من المنبع الأول إلى المصب الثالث، لذلك يتم تزويد هذا الأخير بكل طلبه المتمثل في 145 وحدة من أصل 240 وحدة معروضة لدى المنبع الأول، و هكذا يتم إشباع العمود الثاني، و إلغاوه، و يبقى للمنبع الأول كمية معروض تقدر بـ 95 وحدة. **(بلجيلالي، 2018، صفحة 100)**

و بإتباع نفس الخطوات في كل مرة، نحصل على النتائج النهائية التالية:

مراكز العرض	مراكز الطلب					العرض Supply
	1	2	3	4	5	
1	[100] /	[800] /	[100] **145**	[500] /	[400] **95**	240
2	[500] /	[500] **130**	[300] /	[600] **30**	[700] /	160
3	[200] **120**	[900] /	[500] /	[900] **95**	[800] **45**	260
Demand الطلب	120	130	145	125	140	660

عدد الخلايا الداخلة في الحل يساوي إلى m+n-1 ويساوي 7، وبموجب الجدول أعلاه تكون تكلفة النقل الإجمالية كما يلي:

$$MinZ=(145\times100)+(95\times400)+(130\times500)+(30\times600)+(120\times200))$$
$$+(95\times900))+(45\times800)=281000\ DA$$

2. مسائل النقل في حالة تعظيم الأرباح:

إن حل مسائل النقل في حالة التعظيم لا تختلف كثيرا عن الحل في حالة التدنئة كما تم عرضه سابقا، يتم إيجاد الحل الأساسي الأول تحت نفس الشروط ، وإما بطريقة :

- الزاوية الشمالية الغربية؛
- أو طريقة أعلى عائد(وهي المقابلة لأدنى تكلفة في حالة التدنئة).

ثم يتم إختبار الحل إما بـ :

- بطريقة التخطي؛
- أو بطريقة التوزيع المعدل.

غير أن الإختلاف يكمن في إختيار الخلايا التي تدخل الحل إذ على العكس في حالة التدنئة، فإن الخلية المرشحة للدخول إلى الحل هي التي تعطي أكبر عائد حدي موجب . وتجدر الإشارة هنا أيضا أن الخلايا الداخلة في الحل في أي جدول على طول سيرورة الحل يجب أن تساوي : m+n-1 . **(راتول، 2006، صفحة 146)**

- **طريقة أعلى عائد (وهي المقابلة لأدنى تكلفة في حالة التدنئة)**

مثال 06:

المؤسسة الوطنية للصناعات الإلكترونية لها ثلاث وحدات لإنتاج التلفزيونات من نفس الطراز وهي:

- وحدة البليدة؛
- وحدة سيدي بلعباس؛

– وحدة تيزي وزو.

هذه الوحدات مكلفة بتموين مخازنها الرئيسية المتواجدة في كل من:

– الجزائر؛
– وهران؛
– قسنطينة.

التي تمون بدورها السوق الوطنية. الكميات التي تكون الوحدات قادرة على إنتاجها وتسويقها وكذا الكميات التي تطلبها المخازن الرئيسية أسبوعيا والربح المحصل عليه من كل جهاز مرسل من كل وحدة إلى كل مخزن (بالآلاف الدينارات)، معروض في الجدول التالي:

العرض **Supply**	مخزن وهران	مخزن قسنطينة	مخزن الجزائر	
200	1	3	9	وحدة البليدة
150	0,5	3	6	وحدة تيزي وزو
250	8	0,5	4	وحدة سيدي بلعباس
600	100	220	280	الطلب **Demand**

المطلوب: أوجد شبكة النقل التي يجب على المؤسسة تبنيها والتي تسمح لها بالحصول على أعلى ربح ممكن باستخدام طريقة أعلى ربح؟

الحل:

بعد التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة (في هذا المثال متساوية = 600) وبالتالي يمكن إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة أعلى ربح باتباع الخطوات التالية:

– أعلى ربح في الجدول هو 9 آلاف دج ، خلية (S_1,d_1)، العرض 200 والطلب 280 ، أكبر قيمة يمكن توجيهها هي :200 ، يستنفذ العرض ، ويبقى الطلب قيمته 80 وحدة.

– أعلى ربح في السطر الثاني هو 6 آلاف دج ، خلية (S_2,d_1)، العرض 150 والطلب 80 وحدة المتبقية، القيمة المتبقية من الطلب تلبى من العرض الثاني بـ: 80 وحدة ، يبقى العرض المتبقي 70 وحدة.

– العرض المتبقي والتي قيمته 70 وحدة توجه إلى الطلب الثاني لأنه يحقق أعلى ربح 3 آلاف دج.

– وبالتالي يبقى الطلب الثاني لم يلبى بمقدار 150 وحدة.

– العرض الثالث يلبي الطلب الثالث بالكامل بمقدار 100 وحدة لأنه يحقق أعلى ربح 8 آلاف دج.

– العرض الثالث يبقى لديه 150 وحدة والتي يلبي بها الطلب الثاني بالكامل.

ويمكن تمثيل الخطوات السابقة في جدول الحل الأولي بحيث أن ما داخل المربعات الصغيرة هي أرباح النقل والأخرى الكميات:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض Supply
	مخزن الجزائر	مخزن قسنطينة	مخزن وهران	
وحدة البليدة	9 / 200	3 / /	1 / /	200
وحدة تيزي وزو	6 / 80	3 / 70	0,5 / /	150
وحدة سيدي بلعباس	4 / /	0.5 / 150	8 / 100	250
Demand الطلب	280	220	100	600

عدد الخلايا الداخلة في الحل يساوي إلى m+n-1 ويساوي 5، وبموجب الجدول أعلاه يكون أعلى ربح النقل الإجمالي كما يلي:

$$MaxZ=(200\times9)+(80\times6)+(70\times3)+(150\times0,5)+(100\times8)= 3365000\ DA$$

تمارين محلولة:

<u>التمرين الأول:</u>

الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 04 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج و طلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	12	13	04	06	500
O_2	06	04	10	11	700
O_3	10	09	12	04	800
b_i	400	900	200	500	

المطلوب:

انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؟

2. قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه؟

3. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟

4.أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟
5. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟

حل التمرين الأول:

1. تشكيل جدول النقل:

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض Supply
	1	2	3	4	
1	12 x_{11}	13 x_{12}	4 x_{13}	6 x_{14}	500
2	6 x_{21}	4 x_{22}	10 x_{23}	11 x_{24}	700
3	10 x_{31}	9 x_{32}	12 x_{33}	4 x_{34}	800
Demand الطلب	400	900	200	500	2000

2- صياغة نموذج النقل:

$$Min\ Z = 12x_{11}+13x_{12}+4x_{13}+6x_{14}+6x_{21}+4x_{22}+10x_{23}+11x_{24}+10x_{31}+9x_{32}+12x_{33}+4x_{34}$$

قيود العرض:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=500$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=700$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=800$$

قيود الطلب:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=400$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{23}=900$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=200$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=500$$

قيود عدم سلبية المتغيرات: $x_{ij} \geq 0$

3- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

مراكز العرض	مراكز الطلب 1	2	3	4	العرض Supply	الفرق 1	الفرق 2
1	12 / 400	13 / 100	4 / /	6 / /	500	100	0
2	6 / /	4 / 700	10 / /	11 / /	700	0	/
3	10 / /	9 / 100	12 / 200	4 / 500	800	700	0
Demand الطلب	400	900	200	500	2000		

Min Z =12 (400)+13 (100)+4 (0)+6 (0) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (0)+9 (100)+12 (200)+4 (500) = 14200

3- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا:

مراكز العرض	مراكز الطلب 1	2	3	4	العرض Supply	الفرق 1	الفرق 2
1	12 / 300	13 / /	4 / 200	6 / /	500	300	0
2	6 / /	4 / 700	10 / /	11 / /	700	0	/
3	10 / 100	9 / 200	12 / /	4 / 500	800	300	100
Demand الطلب	400	900	200	500	2000		

Min Z =12 (300)+13 (0)+4 (200)+6 (0) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (100)+9 (200)+12 (0)+4 (500) = 10400

4- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	الفرق
O_1	12 /	13 /	04 200	06 300	~~500~~ ~~300~~ 0	2 6
O_2	06 /	04 700	10 /	11 /	~~700~~ 0	2 2 2
O_3	10 400	09 200	12 /	04 200	~~800~~ ~~600~~ ~~400~~	5 5 1
b_i	~~400~~ 0	~~900~~ ~~200~~ 0	~~200~~ 0	~~500~~ ~~200~~ 0	2000	
الفرق	4 4 4	5 5 5	6	2 2 7		

$$\text{Min } Z = 12(0)+13(0)+4(200)+6(300)+6(0)+4(700)+10(0)+11(0)+10(400)+9(200)+12(0)+4(200) = 12000$$

التمرين الثاني:

الجدول أدناه يقدم معطيات لمسألة نقل ما.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	20	17	15	10	130
O_2	16	14	18	13	50
O_3	12	15	11	19	100
b_i	40	40	80	120	

المطلوب:

1. انطلاقا من معطيات مسألة النقل شكل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؟
2. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا؟
3. أوجد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوصل إليه باستخدام طريقة عوامل الضرب؟

حل التمرين الثاني:

1- تشكيل جدول النقل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 X_{11}	17 X_{12}	15 X_{13}	10 X_{14}	130
O_2	16 X_{21}	14 X_{22}	18 X_{23}	13 X_{24}	50
O_3	12 X_{31}	15 X_{32}	11 X_{33}	19 X_{34}	100
b_i	40	40	80	120	280

2- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 10	17 /	15 /	10 120	~~130~~ ~~10~~ 0
O_2	16 10	14 40	18 /	13 /	~~50~~ ~~10~~ 0
O_3	12 20	15 /	11 80	19 /	~~100~~ ~~20~~ 0
b_i	~~40~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~40~~ 0	~~80~~ 0	~~120~~ 0	280

$$Min\ Z = 20(10)+17(0)+15(0)+10(120)+16(10)+14(40)+18(0)+13(0)+12(20)+15(0)+11(80)+19(0) = 3240$$

3- إيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوصل إليه:

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $U_i=0$ مع $C_{ij} = U_i + V_i$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow 20 = 0 + V_1 \Rightarrow V_1 = 20$$

$$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow 10 = 0 + V_4 \Rightarrow V_4 = 10$$

$$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow 16 = U_2 + 20 \Rightarrow U_2 = -4$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 14 = -4 + V_2 \Rightarrow V_2 = 18$$
$$C_{31} = U_3 + V_1 \Rightarrow 12 = U_3 + 20 \Rightarrow U_3 = -8$$
$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 11 = -8 + V_3 \Rightarrow V_3 = 19$$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$$C'_{12} = C_{12} - V_2 - U_1 \Rightarrow C'_{12} = 17 - 18 - 0 \Rightarrow C'_{12} = -1$$
$$C'_{13} = C_{13} - V_3 - U_1 \Rightarrow C'_{13} = 15 - 19 - 0 \Rightarrow C'_{13} = -4$$
$$C'_{23} = C_{23} - V_3 - U_2 \Rightarrow C'_{23} = 18 - 19 - (-4) \Rightarrow C'_{23} = 3$$
$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 13 - 10 - (-4) \Rightarrow C'_{24} = 7$$
$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 15 - 18 - (-8) \Rightarrow C'_{32} = 5$$
$$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 19 - 10 - (-8) \Rightarrow C'_{34} = 17$$

الحل المتوصل إليه ليس أمثلا، لذا نختار الخلية الأشد سالبية و هي الخلية X_{13} و التي تتم دراسة مسارها:

10+ 0

-20 +80

بما أن أقل قيمة هي 10=$(min : 10, 80)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة X_{13} هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:

0 10

03 07

و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 /	17 /	15 10	10 120	130
O_2	16 10	14 40	18 /	13 /	50
O_3	12 30	15 /	11 70	19 /	100
b_i	40	40	80	120	280

$$Min\ Z = 20(0)+17(0)+15(10)+10(120)+16(10)+14(40)+18(0)+13(0)+12(30)+15(0)+11(70)+19(0) = 3200$$

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $C_{ij} = U_i + V_i$ مع $U_i=0$

$$C_{13} = U_1 + V_3 \Rightarrow 15 = 0 + V_3 \Rightarrow V_3 = 15$$

$$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow 10 = 0 + V_4 \Rightarrow V_4 = 10$$

$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 11 = U_2 + 15 \Rightarrow U_3 = -4$$

$$C_{31} = U_3 + V_1 \Rightarrow 12 = -4 + V_1 \Rightarrow V_1 = 16$$

$$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow 16 = U_2 + 16 \Rightarrow U_2 = 0$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 14 = 0 + V_2 \Rightarrow V_3 = 14$$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$$C'_{11} = C_{11} - V_1 - U_1 \Rightarrow C'_{11} = 20 - 16 - 0 \Rightarrow C'_{11} = 4$$

$$C'_{12} = C_{12} - V_1 - U_2 \Rightarrow C'_{12} = 17 - 14 - 0 \Rightarrow C'_{12} = 3$$

$$C'_{23} = C_{23} - V_3 - U_2 \Rightarrow C'_{23} = 18 - 15 - (0) \Rightarrow C'_{23} = 3$$

$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 13 - 10 - (0) \Rightarrow C'_{24} = 3$$

$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 15 - 14 - (-4) \Rightarrow C'_{32} = 5$$

$$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 19 - 10 - (-4) \Rightarrow C'_{34} = 13$$

يتضح من أعلاه بأن جميع قيم التكاليف الجديدة موجبة، و عليه فقد تم التوصل إلى الحل الأمثل باستخدام طريقة عوامل الضرب، و بالتالي فإن التكاليف الكلية النهائية تساوي 3200، نجد أننا قد وفرنا 40 وحدة. **(بلجيلالي، 2018، الصفحات 125-131)**

قائمة المراجع

باللغة العربية:

1. هاني عرب. (2008). **محاضرات في بحوث العمليات.** [مقال على الشبكة]
https://www.noor-book.com
2. أبو القاسم مسعود الشيخ. (2009). **بحوث العمليات.** الطبعة الثانية. مصر: المجموعة العربية للتدريب والنشر.
3. محمد الطراونة، سليمان عبيدات (2009). **مقدمة في البحوث العمليات.** الطبعة الأولى. الأردن: دار المسيرة للنشر والتوزيع.
4. كلية العلوم الإقتصادية.(2016).**محاضرات في رياضيات المؤسسة.**مطبوعة منشورة.جامعة باتنة 1. الجزائر.
5. أحمد نصير. (2017). **محاضرات وتمارين في مقياس رياضيات المؤسسة.** مطبوعة منشورة. جامعة الوادي. الجزائر.
6. إلياس سالم . (2017). **محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة.** مطبوعة منشورة. جامعة المسيلة. الجزائر.
7. هند عبد الأمير أحمد محمد .(2018). **طريقة السمبلكس.** [مقال على الشبكة]
https://business.uobabylon.edu.iq
8. رند الأسطل. (2016). **بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية.** الطبعة السادسة. جامعة فلسطين. فلسطين.
9. إدوارد دولينج. (2003). **الطرق الرياضية للإدارة والإقتصاد (سلسلة ملخصات شوم).** الطبعة الأولى. مصر: الدار الدولية للإستثمارات الثقافية.
10. حمادي خديجة. (2018). **محاضرات وتمارين في مقياس رياضيات مؤسسة.** مطبوعة منشورة. جامعة البويرة. الجزائر.
11. بهلولي فيصل. (2020). **رياضيات مؤسسة "دروس وتطبيقات"** مطبوعة منشورة . جامعة البليدة 02. الجزائر.
12. راتول محمد. (2006). **بحوث عمليات.** الطبعة الثانية. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
13. بلجيلالي فتيحة. (2018). **رياضيات مؤسسة.** مطبوعة منشورة. جامعة تيارت. الجزائر.
14. ريغي هشام. (2021). **محاضرات وتطبيقات في مادة رياضيات المؤسسة.** مطبوعة منشورة. جامعة ميلة. الجزائر.

باللغة الأجنبية:

15. Subhendu Das. (2014) . An Algorithm for Binary Linear Programming, **Journal of Applied Mathematics & Bioinformatics**, vol.4, no.3.
16. Omar Antolín Camarena.(2020). **Sensitivity Analysis**. [online article] https://www.matem.unam.mx/~omar/math340/sensitivity.html
17. Sewell, Granville (2005), **Computational Methods of Linear Algebra**, second edition, John Wiley & Sons, New York.
18. IMSL. (2020). **Solving the Transportation Problem**. [online article] https://www.imsl.com/blog/solving-transportation-problem
19. Shraddha Mishra.(2017). Solving Transportation Problem by Various Methods and Their Comaprison. **International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)** .Vol 44 N^0: 4.
20. Business .(2022). **Least Cost Method**. [online article] https://businessjargons.com/least-cost-method.html
21. Ashraful Babu.(2014). **Advanced Vogel's Approximation Method (AVAM): A New Approach to Determine Penalty Cost for Better Feasible Solution of Transportation Problem.** International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT).Vol 3 N^0: 1.
23. Serdar Korukoglu.(2011).An Improved Vogel's Approximation Method For The Transportation Problem. **Mathematical and Computational Applications,** Vol. 16, N^o: 2

فهرس المحتويات