

# Chapitre I : Analyse matricielle

Dans ce chapitre, on va faire un petit rappel sur les opérations matricielles.

## I. 1. Opérations sur les matrices :

une matrice réelle de type  $(m, n)$  est un tableau à  $m$  lignes et  $n$  colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=\overline{1, m}, j=\overline{1, n}}$$

- Si  $m = n$ , la matrice de type  $(n, n)$  est dite carrée.
- $A$  est régulière (invertible) si  $\det(A) \neq 0$ .
- $A$  est singulière si  $\det(A) = 0$ .
- Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{R})$  (l'espace des matrices réelles de type  $(m, n)$ ).

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad (\text{Addition})$$

$$(A-B)_{ij} = A_{ij} - B_{ij} \quad (\text{Soustraction})$$

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } i = \overline{1, \dots, m}; j = \overline{1, \dots, n}.$$

(multiplication par un scalaire).

$${}^T A_{ij} = A_{ji} \quad (\text{Transposée})$$

• Soient  $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$

Pour effectuer la multiplication matricielle  $A \cdot B$ , il faut que  $p = q$ .

On pose :  $C = A \cdot B$ ; alors :  $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ , telle que :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj} \quad (p=q)$$

pour  $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, n$ .

### Propriétés :

- $A \cdot B \neq B \cdot A$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Exemple : On donne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

On peut pas calculer  $A \cdot B$  parce que  $A$  a "4" colonnes et  $B$  a "2" lignes.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 37 & 1 & 24 \\ 26 & 9 & 14 & 3 \end{pmatrix}$$

## I.2. Déterminant d'une matrice :

Dans cette section, on veut définir le déterminant d'une matrice  $A = (a_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ .

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| \\ &= a_{11} |A_{11}| - a_{12} |A_{12}| + \dots + (-1)^n a_{1n-1} |A_{1n-1}| \\ &\quad + (-1)^{n+1} a_{1n} |A_{1n}|; \text{ où} \end{aligned}$$

$A_{1j} \in \mathcal{M}_{n-1, n-1}(\mathbb{R})$  sont obtenues si on élimine la 1<sup>ère</sup> ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

$|A_{ij}|$ : les mineurs

$(-1)^{1+j} |A_{ij}|$ : sont appelés les cofacteurs.

D'une manière générale, on peut calculer le déterminant de

$A$  par le développement suivant la ligne " $i$ "; c'est-à-dire :

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|; \text{ telle que:}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemples Calculer le déterminant de A et B :

$$A = \begin{pmatrix} +2 & -1 & +4 \\ -5 & +2 & 3 \\ +8 & -7 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} +2 & 1 & +3 \\ -1 & 0 & 2 \\ +2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} \\ = 2(-15) - 1(-9) + 4(19) = -30 + 9 + 76 = 55$$

On fixe la deuxième colonne :

$$\det(B) = |B| = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

propriétés :

- Une matrice qui a une colonne ou une ligne est nul son déterminant est nul.
- Le déterminant d'une matrice est nul si deux lignes ou deux colonnes sont identiques.
- Si on permute deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe.
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

### I.3. Inverse d'une matrice :

$A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  est une matrice inversible; telle que:  $A \cdot A^{-1} = I_n$   
( $I_n$  est la matrice identité). La matrice inverse  $A^{-1}$  est  
donnée par:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T; \text{ où}$$

$C$  est la matrice des Cofacteurs; appelée Comatrice; et  
notée  $\text{Com}(A)$ .

$$\text{Com}(A) = C = (C_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple: Calculer l'inverse de  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a:

- $\det(A) = 2$
- $C = \text{Com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$