الفصل الأول

نظريات المجموعات *Sets theories*

فهرس الفصل

1.1 المجموعات *Sets*

1.1.1 تعاريف Definitions

سنحاول أن نرى خصائص المجموعات ، دون التركيز على مثال معين. سوف نكتشف بسرعة أن العلاقات بين المجموعات لا تقل أهمية عن المجموعات في حد ذاتها و سيكون هذا هو مفهوم التطبيق (أو الدالة) بين مجموعتين.

We will try to explore the properties of sets, without focusing on a specific example. We will quickly discover that the relationships between sets are no less important than the sets themselves, and this will be the concept of the application (or function) between two sets.

1.1.1 : Definition - تعريف

المجموعات عبارة عن مجموعة من العناصر أو العناصر المحددة جيدا والتي تشترك في خصائص مشتركة

Sets are a collection of well-defined objects or elements that share common properties

1.1.1 : Example - مثال

$$\{0,1\};\quad \{\text{أزرق } blue\text{، أحمر } red\};\quad \mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$$

Notations تسميات

1) نسمي مجموعة خالية نرمز لها بالرمز $\varnothing$ كل مجموعة لا تحتوي على أي عنصر.

We call an empty set denoted by $\varnothing$, every set does not contain any element.

2) نقول أن x عنصر من المجموعة E و نكتب $x \in E$ ، نفي هذه القضية أن العنصر x لا ينتمي للمجموعة E و نكتب $x \notin E$.

We say that x is an element of the set E and we write $x \in E$, the negation of this case that the element x does not belong to the set E and we write $x \notin E$.

3) هناك طرق أخرى لتكوين مجموعة، و هي تجميع عناصر معينة تربطهم خاصية مميزة.

There are other ways to form a set, which is to group certain elements that have a distinctive feature.

2.1.1 : Example - مثال

$$\{x \in \mathbb{R}, \quad |x-2| < 3\},$$
$$\left\{z \in \mathbb{C}, \quad z^2 = 1\right\},$$
$$\{x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2].$$

2.1.1 الخاصية المميزة للمجموعة Distinguishing feature of set

2.1.1 : Definition - تعريف

تكون عناصر المجموعة مختلفة أي لا يوجد تكرار في عناصرها وقد تكون منتهية كما قد تكون غير منتهية.

The elements of the set are different, that is, there is no repetition in its elements, and it may be finite or infinite.

3.1.1 : Example - مثال

1) مجموعة نقاط المستوي — *The set of level points*

2) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ — *The set of natural numbers* $\mathbb{N}$

3) المجموعة E المعرفة كما يلي — *The set E defined as follows*

$$E = \{e \in \mathbb{N}, \ \ 0 \leq e \leq 20\}.$$

3.1.1 المجموعة الجزئية Subset

3.1.1 : Definition - تعريف

بالنسبة لمجموعتين A و E ، نقول أن A هي مجموعة جزئية من E إذا كان كل عنصر من A هو أيضا عنصر E. ونرمز لها بالرمز $A \subseteq E$ إذا كان لدينا $x \in E$ لكل $x \in A$.

For two sets A and E we say that A is a subset of E if each element of A is also an element of E. In formal notation $A \subseteq E$ if for all $x \in A$ we have $x \in E$.

ونكتب — *we write*

$$\boxed{A \subseteq E \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in E.}$$

حيث تتحقق لنا الخواص التالية

Where the following properties are achieved

1) $\phi \subset E.$

2) $E \subset E.$

إنطلاقا من المجموعة E نستطيع تكوين مجموعة جديدة عناصرها هي جميع المجموعات الجزئية للمجموعة ونرمز لها بالرمز $\mathscr{P}(E)$.

Starting from the set E, we can create a new set whose elements are all the subsets of the set E and denote it by $\mathscr{P}(E)$.

4.1.1 : Example - مثال

لتكن المجموعة

Let the set

$$E = \{1, 2, 3\},$$

فإن مجموعة أجزاء هذه المجموعة هي

The set of parts of this set is

$$\mathscr{P}(E) = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}.$$

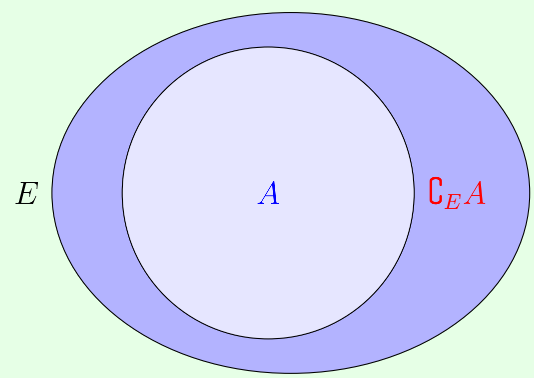
4.1.1 Complementary set متممة مجموعة

4.1.1 : Definition - تعريف

لتكن المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة E، نسمي متممة المجموعة A في المجموعة E التي نرمز لها بالرمز $E \setminus A$ أو $\complement_E A$ ونكتب

Let the set A be a subset of the set E, we call the complement of the set A in the set E which we denote by $E \setminus A$, $\overline{A}$ or $\complement_E A$ and write

$$\boxed{\complement_E A = \left\{x \in E \mid x \notin A\right\}.}$$



5.1.1 : Example - مثال

لتكن المجموعة E و A حيث

Let the sets E and A where

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A = \{2, 3\},$$

ومنه متممة المجموعة A في المجموعة E هي

then the complement of the set A in the set E is given

$$\overline{A} = \{1, 4, 5\}.$$

5.1.1 فرق المجموعات Difference of sets

5.1.1 : Definition - تعريف

لتكن المجموعة A و B مجموعتان جزئيتان من المجموعة E، نعرف فرق المجموعتين A و B الذي نرمز له بالرمز A/B أو $A-B$ ونكتب

Let the sets A and B two subsets of the set E, we know the difference of the two sets A and B which we denote by A/B or $A-B$ and write

$$\boxed{A/B = A - B = \{x \in A \text{ و } x \notin B\}.}$$

6.1.1 : Example - مثال

لتكن المجموعة E و A حيث

Let the set E and A where

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 4, 5\}$$

ومنه

then

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \in A \text{ و } x \notin B\}, \\ &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

and و

$$
\begin{aligned}
B - A &= \{x \in B \text{ و } x \notin A\}, \\
&= \{4, 5\}
\end{aligned}
$$

نلاحظ أن الفرق بين المجموعات ليس تبديلي

We note that the difference between the sets is not commutative.

6.1.1 : Definition - تعريف

الفرق التناظري بين مجموعتين A و B هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة واحدة فقط. الذي نرمز له بالرمز $A\Delta B$. ونكتب

The symmetric difference of two sets A and B is the set of objects that are in one and only one of the sets. The symmetric difference is written $A\Delta B$.

$$\boxed{A\Delta B = (A - B) \cup (B - A).}$$

7.1.1 : Example - مثال

لتكن المجموعة E و A من المثال السابق ومنه

Let the sets E and A from the previous example, then

$$
\begin{aligned}
A\Delta B &= (A - B) \cup (B - A) \\
&= \{1, 2\} \cup \{4, 5\} \\
&= \{1, 2, 4, 5\}
\end{aligned}
$$

نلاحظ أن الفرق التناظري بين المجموعات تبديلي.

We note that the symmetric difference between the sets is commutative.

1.1.1 : Theorem - نظرية

لتكن المجموعة A و B مجموعتان جزئيتان من المجموعة E، فإن الفرق التناظري يمكن حسابه أيضا بالعلاقة التالية:

Let A and B be subsets of the set E, the symmetric difference can also be calculated with the *following relation:*

$$\boxed{A \Delta B = (A \cup B) - (B \cap A) \, .}$$

6.1.1 العمليات على المجموعات Operations on sets

الإتحاد و التقاطع Union and intersection

7.1.1 : Definition - تعريف

لتكن المجموعة E و F مجموعتان.

Let E and F be two sets

1) نرمز لإتحاد المجموعتين E و F بالرمز $E \cup F$ ونكتب

We denote the union of the two sets E and F by $E \cup F$ and write

$$\boxed{E \cup F = \{x : x \in E \vee x \in F\} \, .}$$

يسمى الرمز $\vee$ بالفصل المنطقي و يقرأ (أو).

The symbol $\vee$ is called the logical separator and reads (or).

2) نرمز لتقاطع المجموعتين E و F بالرمز $E \cap F$ ونكتب

We denote the intersection of the two sets E and F as $E \cap F$ and write

$$\boxed{E \cap F = \{x : x \in E \wedge x \in F\} \, .}$$

يسمى الرمز $\wedge$ بالوصل المنطقي و يقرأ (و).

The symbol $\wedge$ is called a logical join and reads (and).

3) يمكن تعميم هذان التعريفان في حالة أكثر من مجموعتين و نرمز لتقاطع و اتحاد جملة من المجموعات E_i بالرمز $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ و $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ على الترتيب.

These two definitions can be generalized in the case of more than two sets, and we denote the intersection and union of a set of sets E_i by $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ and $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$, respectively.

خــــواص Properties

لتكن A ، B و C ثلاث مجموعات جزئية من المجموعة E، لدينا الخواص التالية.
Let A, B and C three subsets of the set E, we have the following properties.

1) **الخاصية التبديلية** Commutative property
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2) **الخاصية التجميعية** Associative property
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

3) **الخاصية التوزيعية** Distributive property
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4) **خاصية المتمم** Complement property
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
- $\complement(\complement A) = A$
- $\complement A \cap A = \phi$
- $\complement A \cup A = E$

الجداء الديكارتي Cartesian product

8.1.1 : Definition - تعريف

الجداء الديكارتي هو اسم يطلق في الرياضيات لجداء مجموعتين E و F، ويرمز له بالرمز $F \times E$، أي مجموعة الأزواج المرتبة التي ينتمي عنصرها الأول إلى المجموعة E وينتمي عنصرها الثاني إلى المجموعة F. سمي كذلك نسبة إلى رينيه ديكارت الذي قام بتأسيس الهندسة التحليلية مطلقا هذا المفهوم من جداء المجموعات و نكتب

The Cartesian product is the mathematical term for the product of two sets E and F,

denoted by $E \times F$, which is the set of ordered pairs whose first element belongs to E and second element belongs to F. It is named after René Descartes who established the foundations of analytical geometry, introducing this concept of product of sets.
We can write it as

$$\boxed{E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \wedge y \in F\}.}$$

1.1.1 : Remark - ملاحظة

يمكن تعميم الجداء الديكارتي لأكثر من مجموعتين أو لجملة من المجموعات نرمز له عندها بالرمز $\prod_{i=1}^{n} E_i$ و نكتب

The Cartesian product can be generalized to more than two sets or to a collection of sets denoted by $\prod_{i=1}^{n} E_i$, which is the set of ordered n-tuples whose i-th element belongs to the set E_i. We can write it as:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} E_i = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in E_i, i = 1, ..., n\}.}$$

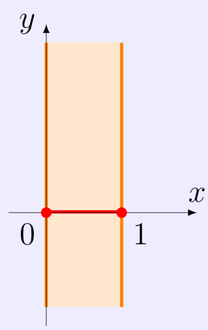
8.1.1 : Example - مثال

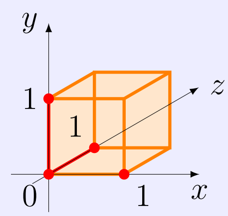
We have the following examples لدينا الأمثلة التالية

1) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \left\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$ *the plane* المستوي

2) $[0, 1] \times \mathbb{R} = \left\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\right\}$

3) $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = \left\{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\right\}$





Properties خـــواص

لتكن المجموعة A و B و C ثلاث مجموعات جزئية من المجموعة E، لدينا الخواص التالية.

Let the set A, B, and C three subsets of the set E, we have the following properties.

1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

7.1.1 Set fragmentation تجزئة مجموعة

9.1.1 : Definition - تعريف

لتكن E مجموعة كيفية غير خالية و لتكن $E_1, ..., E_n$ مجموعات جزئية من E نقول أن $E_1, ..., E_n$ تشكل تجزئة للمجموعة E إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية

Let E be a non-empty set and let $E_1, ..., E_n$ be subsets of E We say that $E_1, ..., E_n$ form a fragmentation of the set E if and only if the following conditions are met

1) $\forall i \in \{1, ..., n\} : E_i \neq \phi$

2) $\forall i \neq j : E_i \cap E_j = \phi$

3) $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$

8.1.1 Finished set مجموعة منتهية

10.1.1 : Definition - تعريف

إذا كانت E مجموعة منتهية عدد عناصرها $n \in \mathbb{N}$. نسمي العدد n بأصلي المجموعة E و نكتب

If E is a finite set whose number of elements is $n \in \mathbb{N}$. We call the number n by the order *or cardinal number of a set E and write*

$$Card(E) = n$$

9.1.1 : Example - مثال

لتكن المجموعة

Let the set

$$E = \{1, 2, 3, 6, 9, 11\},$$

فإن أصلي المجموعة E هو

then, the cardinal number of the set E is

$$Card(E) = 6.$$

2.1.1 : Remark - ملاحظة

نقول عن مجموعة أنها غير منتهية إذا كانت تحتوي على عدد غير محدود من العناصر (أي غير معدودة).

We say that a set is infinite if it contains an unlimited number of elements.

Properties خـــواص

1) $Card(\phi) = 0.$

2) $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

2.1.1 : Theorem - نظرية

إذا كانت المجموعة E مجموعة منتهية عدد عناصرها $n \in \mathbb{N}$ فإن عدد عناصر مجموعة أجزائها $\mathscr{P}(E)$ هو :

If the set E is a finite set whose number of elements is $n \in \mathbb{N}$, then the number of elements *of the set of its parts* $\mathscr{P}(E)$ *is:*

$$\boxed{Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)} = 2^n.}$$

10.1.1 : Example - مثال

Let the set لتكن المجموعة

$$E = \{1, 2, 3\},$$

then: فإن :

$$\mathscr{P}(E) = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2, 3.$$

we remark that: نلاحظ أن :

$$Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)} = 2^3 = 8.$$

نسمي العلاقة الثنائية : التعبير عن العلاقة بين الأزواج أو أفراد هذه الثنائية المرتبة.

We call the binary relationship: the expression of the relationship between pairs or members of this ordered pair.

9.1.1 تعريف العلاقة Definition of relationship

11.1.1 : Definition - تعريف

لتكن A و B مجموعتين، نعرف العلاقة الثنائية من المجموعة A إلى المجموعة B بأنها مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لـ A و B و نرمز لها غالبا بالرمز $(\mathscr{R})$، من أجل كل ثنائية (x, y) نكتب :

Let A *and* B *be sets, we define the binary relation from set* A *to set* B *as a subset of the Cartesian product of* A *and* B *and often denoted by* $(\mathscr{R})$*, for each binary* (x, y) *we write:*

(1) $(x\mathscr{R}y)$ إذا كان x على علاقة مع y .

$(x\mathscr{R}y)$*, if* x *is in relation to* y*.*

(2) $(x\not\mathscr{R}y)$ إذا كان x ليس على علاقة مع y .

$(x \not\mathscr{R} y)$, *if x is not related to y.*

العلاقة على مجموعة Relationship on set

تعريف - Definition : 12.1.1

لتكن A و B مجموعتين، إذا كانت $(\mathscr{R})$ علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B فإننا نسمي مجموعة A بمجموعة الانطلاق أو البداية للعلاقة، ونسمي مجموعة الثنائيات التي تحقق العلاقة بمدى العلاقة بمجموعة الوصول أو النهاية للعلاقة، وهي جزء من الجداء الديكارتي لـ A و B.

Let A and B be two sets. If $\mathscr{R}$ is a relation from the set A to the set B, then we call the set A the domain or the starting set of the relation, and we call the set of ordered pairs that satisfy the relation the range or the end set of the relation, which is a subset of the Cartesian product of A and B.

العلاقة العكسية Inverse relationship

تعريف - Definition : 13.1.1

لتكن $(\mathscr{R})$ العلاقة المعرفة من المجموعة A نحوالمجموعة B فإننا نعرف معكوس $(\mathscr{R})$ أو العلاقة العكسية ونرمز لها بالرمز $(\mathscr{R}^{-1})$ ونعرف على أنها علاقة من المجموعة B نحوالمجموعة A.

Let $(\mathscr{R})$ be a relation defined from set A to set B. We define the inverse $(\mathscr{R}^{-1})$ of $\mathscr{R}$ as a relation from set B to set A.

مثال - Example : 11.1.1

أوجد معكوس العلاقة — *Find the inverse of the relationship*

$$\mathscr{R} = \{(1, y), (1, z), (3, x)\}$$

من المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ نحو المجموعة $B = \{x, y, z\}$. العلاقة العكوسة هي

From the set $\{1,2,3\} = A$ *towards the set* $\{x,y,z\} = B$. *The inverse relationship is*

$$\begin{aligned} \mathscr{R}^{-1} &: B \longrightarrow A \\ &= \{(y,1),(z,1),(x,3)\} \end{aligned}$$

10.1.1 خواص العلاقات Relationship properties

الخاصية الإنعكاسية Reflexive property

لتكن E مجموعة كيفية و لتكن الثنائية (x,y) حيث: $x \in E$ و $y \in E$، ولتكن العلاقة $(\mathscr{R})$ علاقة معرفة في المجموعة E. نعرف الخواص التالية:

Let E be a qualitative set and let the binary (x,y) where: $x \in E$ and $y \in E$, and let $(\mathscr{R})$ be a relation defined in the set E . We define the following properties:

14.1.1 : Definition - تعريف

نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة إنعكاسية إذا تحقق الشرط

We say about the relation $(\mathscr{R})$ *that it is a reflexive relation if the condition is met*

$$\boxed{\forall x \in E : x\mathscr{R}x.}$$

الخاصية التناظرية Symmetric property

15.1.1 : Definition - تعريف

نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة تناظرية إذا تحقق الشرط

We say about the relation $(\mathscr{R})$ *that it is a symmetric relation if the condition is met*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E \times E : x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x.}$$

الخاصية ضد التناظرية Antisymmetric property

16.1.1 : Definition - تعريف

نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة ضد تناظرية إذا تحقق الشرط

We say about the relation $(\mathscr{R})$ that it is an antisymmetric relation if the condition is met

$$\boxed{\forall (x, y) \in E \times E : (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x) \Longrightarrow x = y.}$$

الخاصية المتعدية Transitive property

17.1.1 : Definition - تعريف

و نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة متعدية إذا تحقق الشرط

We say about the relation $(\mathscr{R})$ that it is a transitive relation if the condition is met

$$\boxed{\forall (x, y, z) \in E \times E \times E : (x\mathscr{R}y \vee y\mathscr{R}z) \Longrightarrow x\mathscr{R}z.}$$

11.1.1 علاقة التكافؤ Equivalence relationship

نعرف الآن علاقتين أساسيتين هما علاقة التكافؤ وعلاقة الترتيب

We define now two basic relationships, the equivalence and the order relationship

18.1.1 : Definition - تعريف

نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة تكـــافؤ إذا تحقق ما يلي

We say about the relation $(\mathscr{R})$ that it is an equivalence relation if the following is true

(1) $(\mathscr{R})$ علاقة إنعكاسية. — *$(\mathscr{R})$ is a reflexive relation.*

(2) $(\mathscr{R})$ علاقة تناظرية. — *$(\mathscr{R})$ is a symmetric relation.*

(3) $(\mathscr{R})$ علاقة متعدية. — *$(\mathscr{R})$ is a transitive relation.*

12.1.1 : Example - مثال

(1) علاقة $(=)$ على أي مجموعة هي علاقة تكافؤ.

The $(=)$ relation on any set is an equivalence relation.

(2) علاقة التوازي على مجموعة المستقيمات هي علاقة تكافؤ.

The relation of parallelism on the set of straight lines is an equivalence relation.

(3) علاقة التعامد على مجموعة المستقيمات هي ليست علاقة تكافؤ.

The relation perpendicular to the set of straight lines is not an equivalence relation.

الفكرة العامة وراء علاقة التكافؤ أنها تصنف العناصر المتشابهة بشكل ما.

The general idea behind the equivalence relation is that it classifies elements that are similar in some way.

3.1.1 : Remark - ملاحظة

في الرياضيات تقسم علاقة التكافؤ المجموعة إلى فئات متكافئة، حيث تكون كل فئة جزئية متكافئة مع المجموعة الأصلية التي تتكون من جميع العناصر المتكافئة مع بعضها البعض بموجب العلاقة. تشكل فئات التكافؤ تجزئة للمجموعة الأصلية، مما يعني أنها غير فارغة، ومنفصلة بشكل ثنائي، وأن اتحادها هو المجموعة الأصلية.

In mathematics, an equivalence relation divides the set into equivalence classes, where each equivalence class is a subset of the original set consisting of all elements that are equivalent to each other under the relation. The equivalence classes form a partition of the original set, meaning that they are non-empty, pairwise disjoint, and their union is the original set.

Equivalence class صنف التكافؤ

19.1.1 : Definition - تعريف

لتكن $(\mathscr{R})$ علاقة تكافؤ في المجموعة E و ليكن $a \in E$.

Let $(\mathscr{R})$ be an equivalence relation in the set E and let $a \in E$.

نعرف صنف تكافؤ العنصر a الذي نرمز له بالرمز $\dot{a}$ كما يلي

We define the equivalence class of the element a denoted by $\dot{a}$ as follows

$$\boxed{\dot{a} = \{x \in E : x\mathscr{R}a\}}$$

13.1.1 : Example - مثال

العلاقة التالية :

The following relationship:

$$\forall x, y : x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

هي علاقة تكافؤ.

It is an equivalence relationship.

ليكن $x \in \mathbb{R}$. نبحث عن العناصر y من $\mathbb{R}$ حيث $x\mathscr{R}y$.

Let $x \in \mathbb{R}$. We are looking for the y an elements of $\mathbb{R}$ where $x\mathscr{R}y$.

يجب أن نجد حلول المعادلة $x^2 - y^2 = x - y$ في (y) . حيث يمكن كتابتها على الشكل:

We have to find the solutions to the equation $x^2 - y^2 = x - y$ in (y). Where it can be written in the form:

$$(x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0.$$

حلولها هي $y = x$ و $y = 1 - x$.

Its solutions are $y = x$ and $y = 1 - x$.

ومنه صنف تكافؤ العنصر x هو $\{x, 1 - x\}$. يتكون من عنصرين ، ما لم يكن $x = 1 - x \Leftrightarrow x = 1/2$. في هذه الحالة صنف التكافؤ هو المجموعة $\{1/2\}$.

Hence the class of element valence x is $\{x, 1 - x\}$. consisting of two elements, unless $x = 1 - x \Leftrightarrow x = 1/2$. In this case the class of equivalence is the set $\{1/2\}$.

12.1.1 Ranking relationship علاقة الترتيب

نظرية الترتيب هي فرع من فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة الأنواع المختلفة من العلاقات الثنائية التي تعطي بنية ترتيبية يمكن القول من خلالها متى يكون أي عنصر أقل من أو يسبق العنصر الآخر.

Order theory is a branch of mathematics that focuses on studying the various types of binary relations that give rise to a structural ordering, which can be used to determine when any given element is less than or precedes another element.

20.1.1 : Definition - تعريف

نقول أن العلاقة $(\mathscr{R})$ علاقة ترتيب في المجموعة E إذا تحقق ما يلي

We say that the relation $(\mathscr{R})$ is a ordering relation on the set E if the following is satisfied:

(1) $(\mathscr{R})$ علاقة إنعكاسية. — *$(\mathscr{R})$ is a reflexive relation.*

(2) $(\mathscr{R})$ علاقة ضد تناظرية. — *$(\mathscr{R})$ is an asymmetric relation.*

(3) $(\mathscr{R})$ علاقة متعدية. — *$(\mathscr{R})$ is a transitive relation.*

في حالة تزويد المجموعة بعلاقة ترتيب. فنقول أن المجموعة مرتبة منتهية إذا كانت منتهية عند إذ يمكن تمثيلها بيانيا في شكل رسم تخطيطي هاس Hasse، على غرار التمثيل البياني المعتاد على الورق، ما يمكن من العمل بسهولة عليها. أما إذا كانت المجموعة غير منتهية فإنه يمكن تمثيل جزء منها فقط.

In the case of equipping a set with an ordering relation, we say that the set is a finite partially ordered set if it is finite and can be represented graphically in the form of a Hasse diagram, similar to the usual graphical representation on paper, which makes it easy to work with. However, if the set is infinite, only a part of it can be represented.

14.1.1 : Example - مثال

العلاقة المعروفة «أصغر من أو يساوي» في $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ هي علاقة ترتيب :

The relation "less than or equal to" in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, and $\mathbb{R}$ is an ordering relation.

- إنعكاسية — *Reflexive*

$$\forall x : x \leq x,$$

- ضد تناظرية — *Asymmetric*

$$\forall x, y : x \leq y \text{ و } y \leq x \Longrightarrow x = y,$$

- متعدية — *Transitive*

$$\forall x, y, z : x \leq y \text{ و } y \leq z \Longrightarrow x \leq z.$$

15.1.1 : Example - مثال

في نظرية المجموعات، فإن علاقة الإحتواء $\subset$ هي علاقة ترتيب في المجموعة $\mathscr{P}(E)$ مجموعة أجزاء المجموعة E :

In set theory, the inclusion relation $\subset$ is a order relation on the set $\mathscr{P}(E)$, the set of all subsets of E.

- إنعكاسية — *Reflexive*

$$\forall A \subset \mathscr{P}(E) : A \subset A,$$

- ضد تناظرية — *Asymmetric*

$$\forall A, B \subset \mathscr{P}(E) : A \subset B \text{ and } B \subset A \Longrightarrow A = B,$$

- متعدية — *Transitive*

$$\forall A, B, C \subset \mathscr{P}(E) : A \subset B \text{ and } B \subset C \Longrightarrow A \subset C.$$

13.1.1 علاقة الترتيب الكلي Total order relation

لتكن $(\mathscr{R})$ علاقة ترتيب في المجموعة E.

Let $(\mathscr{R})$ be a relation of order on the set E.

21.1.1 : Definition - تعريف

نقول أن العلاقة $(\mathscr{R})$ علاقة ترتيب كلي في المجموعة E إذا تحقق ما يلي

We say that the relation $(\mathscr{R})$ is a total order relation in the set E if the following conditions are satisfied:

$$\boxed{\forall (x, y) \in E \times E : (x\mathscr{R}y \vee y\mathscr{R}x).}$$

16.1.1 : Example - مثال

علاقة الإحتواء $\subset$ بين المجموعات الجزئية للمجموعة E ليست علاقة ترتيب كلي على $\mathscr{P}(E)$. هناك مجموعات بحيث لا يتم إحتواء الأول في الثانية ، ولا إحتواء الثانية في الأولى. على سبيل المثال

The inclusion relation $\subset$ between the subsets of the set E is not a total order relation on $\mathscr{P}(E)$, as there exist pairs of subsets that are neither contained in each other. For example,

$$A + [1,3] \not\subset B = [0,2] \text{ and } [0,2] \not\subset [1,3].$$

لا يمثل A مجموعة جزئية من B ، ولا يمثل B مجموعة جزئية من A ، مما يعني أن علاقة التضمين بين A و B ليست علاقة ترتيب إجمالي.

Neither A is a subset of B, nor is B a subset of A, which means that the inclusion relation between A and B is not a total order relation.

17.1.1 : Example - مثال

نزود $\mathbb{R}^2$ بالعلاقة $\prec$ المعرفة:

We provide $\mathbb{R}^2$ with the relation $\prec$ defined as:

$$(x,y) \prec (x',y') \iff x \leq x' \text{ and } y \leq y'.$$

العلاقة $\prec$ تحدد علاقة ترتيب على $\mathbb{R}^2$. لكن هذا الترتيب ليس كلي لأنها لا يمكن أن نقارن بين $(0,1)$ و $(1,0)$.

The relation $\prec$ defines a partial order on $\mathbb{R}^2$. However, this order is not total because we cannot compare between $(0,1)$ and $(1,0)$.

2.1 التطبيقات *Mappings*

1.2.1 تعاريـــف Definitions

تعريـــف التطبيق Definition of mapping

22.2.1 : Definition - تعريف

لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين . نقول أننا عرفنا تطبيقا f من A نحو B إذا عرفنا علاقة تربط كل عنصر x من A بعنصر وحيد y من B. ونكتب:

Let A and B be two non-empty sets. We say that we have defined a mapping f from A to B if we have established a relationship that connects each element x from A to a unique element y from B. We write this as:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

أو

or

$$\boxed{f(\text{Mapping}, \quad \text{تطبيق}) \iff (\forall x \in A)(\exists! y \in B) : y = f(x)}$$

- y يُسمى صورة x بالتطبيق f.

y is called the image of x under the mapping f.

- x يُسمى سابق y بالتطبيق f.

x is called the preimage of y under the mapping f.

- المجموعة A تُسمى مجموعة الإنطلاق.

The set A is called the domain of the mapping.

- المجموعة B تُسمى مجموعة الوصول.

The set B is called the codomain or range of the mapping.

4.2.1 : Remark - ملاحظة

(1) يكون f تطبيق من A نحو B $\iff$ كل عنصر x من A له صورة وحيدة في B .

f is a mapping from A to B if and only if every element x in A has a unique image in B.

(2) إذا كان f تطبيق من A نحو B فإنه يمكن أن يكون للعنصر y من B أكثر من سابقة في A.

If f is a mapping from A to B, then an element y in B may have more than one preimage in A.

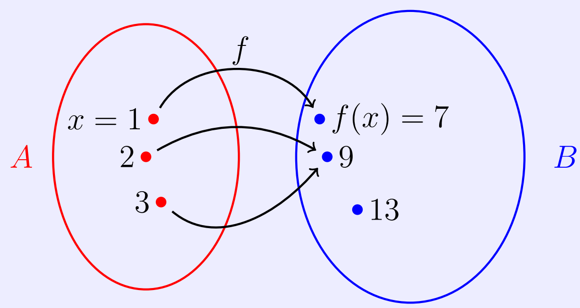
(3) يجب التفريق بين $f(x)$ و f : لدينا $f(x) \in B$، بينما f تمثل التطبيق ككل، وهي تنتمي إلى فضاء التطبيقات المعرفة من A نحو B .

It is important to distinguish between $f(x)$ and f. We have that $f(x) \in B$, while f represents the mapping as a whole, which belongs to the set of all mappings from A to B.

18.2.1 : Example - مثال

لدينا $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{7, 9, 13\}$.

We have $A = \{1, 2, 3\}$ and $B = \{7, 9, 13\}$.



- لدينا

We have

$$f(1) = 7; f(2) = 9; f(3) = 9.$$

- f تطبيق من A نحو B لكل عنصر x من A له صورة وحيدة في B.

f is a mapping from A to B such that every element x in A has a unique image in B.

- هنا العنصر 13 ليس لها سابقة وفق التطبيق f .

In this case, the element 13 in B does not have a preimage in A under the mapping f.

- هنا العنصر 9 لها سابقتان : 2 و 3.

In this case, the element 9 in B has two preimages in A: 2 and 3.

Direct and inverse image الصورة المباشرة و العكسية

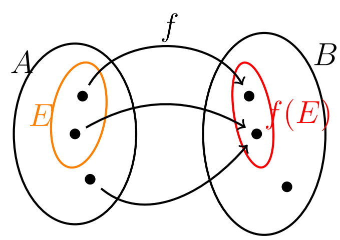
23.2.1 : Definition - تعريف

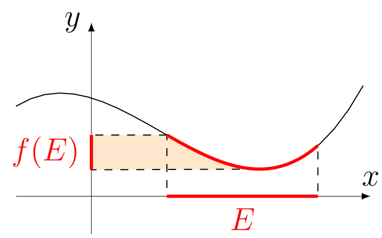
لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين. ولتكن E مجموعة جزئية من A، وليكن $f : A \to B$ تطبيق.
نعرف الصورة المباشرة للمجموعة E بواسطة التطبيق f المجموعة:

Let A and B be two non-empty sets. Let E be a subset of A, and let $f : A \to B$ be a function.

We define the direct image (or forward image) of the set E under the function f as follows:

$$\boxed{f(E) = \big\{f(x) \mid x \in E\big\}}$$





24.2.1 : Definition - تعريف

لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين. ولتكن F مجموعة جزئية من B، وليكن $f : A \to B$ تطبيق.
نعرف الصورة العكسية للمجموعة F بواسطة التطبيق f المجموعة:

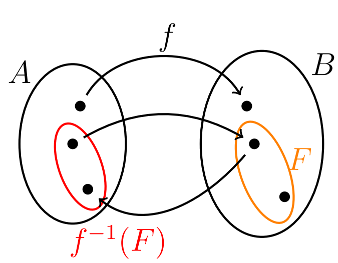
Let A and B be non-empty sets. Let F be a subset of B, and let $f : A \to B$ be a function.

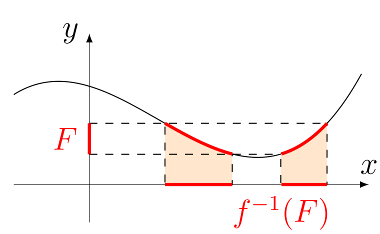
We define the inverse image, or preimage, of F under the function f to be the set:

$$\boxed{f^{-1}(F) = \big\{x \in A \mid f(x) \in F\big\}}$$

بمعنى آخر، $f^{-1}(F)$ هي مجموعة كل العناصر في A التي ترتبط بعنصر في F وفق الدالة f.

In other words, $f^{-1}(F)$ is the set of all elements in A that map to an element in F under the function f.





5.2.1 : Remark - ملاحظة

لدينا المفاهيم التالية

We have the following concepts

- المجموعة $f(E)$ مجموعة جزئية من المجموعة B ، $f^{-1}(F)$ مجموعة جزئية من المجموع A.
The set $f(E)$ is a subset of the set B, and $f^{-1}(F)$ is a subset of the set A.

- الصورة المباشرة للعنصر $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ هي صورة مجموعة مفردة تحتوي عنصر واحد. من ناحية أخرى ، فإن الصورة العكسية لـ $f^{-1}(\{y\})$ تعتمد على f. يمكن أن تكون مجموعة مفردة، أو مجموعة مكونة من عدة عناصر أو حتى المجموعة الفارغة (إذا لم تكن هناك صورة من f تساوي y).
The direct image of the element $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ is a singleton set containing a single element. On the other hand, the inverse image of $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ depends on the function f. It can be a singleton set, a set consisting of several elements, or even the empty set (if there is no preimage of y under f).

2.2.1 التطبيق الغامر Surjective function

25.2.1 : Definition - تعريف

نقول إن f تطبيق غامر إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من B له سابقة على الأقل في A. و نكتب:

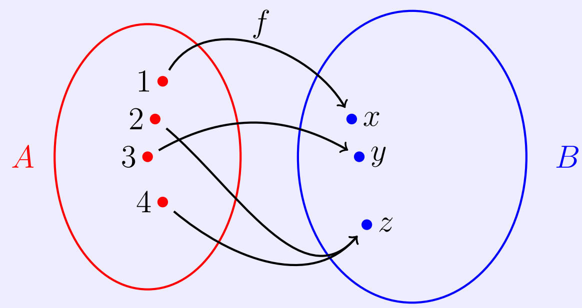
We say that f is a surjective function if and only if every element y in B has at least one pre-image in A. We can write this as:

$$\boxed{f(\textit{Surjective function},\ \text{تطبيق غامر}) \iff (\forall y \in B, \exists x \in A)\ :\ y = f(x).}$$

19.2.1 : Example - مثال

لدينا $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{x, y, z\}$.

We have $A = \{1, 2, 3, 4\}$ and $B = \{x, y, z\}$.



- لدينا $f(1) = x; f(3) = y; f(4) = \{y, z\}$.

We have $f(1) = x; f(3) = y$ *and* $f(4) = \{y, z\}$.

- f تطبيق من A نحو B كل عنصر من A له صورة وحيدة في B.

f *is a function from* A *to* B *if and only if every element of* A *has a unique image in* B.

- f تطبيق غامر من A نحو B لأن كل عنصر من B له سابقة على الأقل في A.

f *is a surjective function from* A *to* B *because every element of* B *has at least one pre-image in* A.

3.2.1 التطبيق المتباين Injective function

26.2.1 : Definition - تعريف

نقول أن التطبيق f متباين إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من B له سابقة واحدة على الأكثر في A ونكتب:

We say that the function f *is injective if and only if every element* y *in* B *has at most one pre-image in* A, *and we write:*

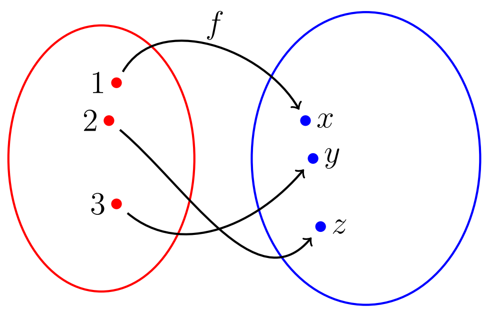
$$\boxed{f(\textit{Injective function, } \text{تطبيق متباين}) \iff \forall (x, y) \in A^2 : (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).}$$

20.2.1 : Example - مثال

خير مثال على التطبيق المتباين هو رقم الضمان الاجتماعي: فشخصان مختلفان حتما لديهما دائما رقم ضمان اجتماعي مختلف ... التطبيق الذي يربط الشخص برقم الضمان الاجتماعي الخاص به هو تطبيق متباين، من ناحية أخرى ، هناك العديد من الأشخاص الذين ولدوا مثلا في 31 من شهر مارس 1978.

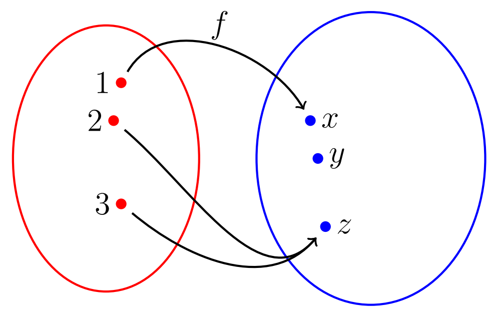
لهذا التطبيق الذي يربط الشخص بتاريخ ميلاده ليس متباين.

A good example of an application that uses unique identification is the Social Security number. Two different individuals will always have different Social Security numbers. The application that links a person to their specific Social Security number is a unique identification application. On the other hand, there are many individuals who were born, for example, on March 31, 1978. For this application that links a person to their date of birth, it is not a unique identification application.



تطبيق متباين

Injective function



تطبيق ليس متباين

Not injective function.

Properties خواص

- **التطبيق** $f : X \to Y$ **متباين إذا وفقط إذا كان** X **المجموعة الخالية أو يوجد تطبيق** $g : Y \to X$ **حيث** $g \circ f$ **يساوي التطبيق المحايد على** X.

The application $f : X \to Y$ is injective if and only if X is the empty set, or if there exists an application $g : Y \to X$ such that $g \circ f$ is equal to the identity application on X.

- **يكون التطبيق** f **تقابلي إذا وفقط إذا كان متباين وغامر معا.**

The function f is bijective if and only if it is both injective and surjective.

- **إذا كان التطبيق** $g \circ f$ **متباين فإن** f **متباين.**

If the composite function $g \circ f$ is injective, then f is injective.

- **إذا كان** f **و** g **تطبيقان متباينان فإن التركيب** $g \circ f$ **متباين.**

If f and g are injective functions, then the composite function $g \circ f$ is injective.

- $f : X \to Y$ متباين إذا وفقط إذا كان من أجل كل التطبيقات $g, h : W \to X$، إذا كان $f \circ g = f \circ h$ فإن $g = h$.

The function $f : X \to Y$ is injective if and only if, for all functions $g, h : W \to X$, if $f \circ g = f \circ h$, then $g = h$.

- إذا كان $f : X \to Y$ متباين و A مجموعة جزئية من X فإن $f^{-1}(f(A)) = A$. وبالتالي A يمكن ايجادها باستعمال الصورة العكسية لـ $f(A)$.

If $f : X \to Y$ is a surjective function and A is a subset of X, then $f^{-1}(f(A)) = A$. Therefore, A can be found using the inverse image of $f(A)$.

- إذا كان $f : X \to Y$ متباين و A و B مجموعات جزئية من X فإن $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

If $f : X \to Y$ is injective and A and B are subsets of X, then $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

- كل تطبيق $h : W \to Y$ يمكن أن يكتب على الشكل $h = f \circ g$ من أجل f متباين و g غامر.

Every function $h : W \to Y$ can be written in the form $h = f \circ g$ for a injective function f and a surjective function g.

- إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق متباين فإن Y يحتوي على عدد من العناصر على الأقل مماثل لعدد عناصر X.

If $f : X \to Y$ is a surjective function, then Y has at least as many elements as X.

4.2.1 التطبيق التقابلي Bijective function

27.2.1 : Definition - تعريف

نقول إن f تطبيق تقابلي إذا وفقط إذا كان متباينا و غامرا معا، أي إذا كان لكل عنصر y من B سابقة وحيدة في A. ونكتب:

We say that f is a bijective function if and only if it is both injective and surjective, that is, *if each element y in B has a unique predecessor in A. We write:*

$$\boxed{f\left(Bijective,\ \text{تقابلي}\right) \iff (\forall y \in B), (\exists! x \in A) : y = f(x).}$$

21.2.1 : Example - مثال

ليكن التطبيق $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بـ $f(x) = 2x + 1$. هذا التطبيق تقابلي، لأن من أجل أي عدد حقيقي y، بمكننا إيجاد حل حقيقي واحد للمعادلة $y = 2x + 1$ للمتغير x وهو $x = (y-1)/2$.

Let the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = 2x + 1$. This function is bijective because for any real number y, we can find a unique real solution to the equation $y = 2x + 1$ for the variable x, which is $x = (y-1)/2$.

5.2.1 تركيب التطبيقات Composite applications

نعتبر التطبيقين :

We consider two applications:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} g : G &\to H \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

إذا كان $g(G) \subset A$ نعرف التطبيق $f \circ g$ كما يلي :

If $g(G) \subset A$ we define the application $f \circ g$ as follows:

$$\begin{aligned} f \circ g : G &\to B \\ x &\mapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

6.2.1 : Remark - ملاحظة

نلاحظ أنه لا بمكننا أن نتكلم عن $f(g(x))$ حتى يكون $g(x) \in A$، لهذا فإن الشرط $g(G) \subset A$ يعتبر أساسيا حتى يكون للتطبيق $f \circ g$ معنى.

We note that we cannot speak about $f(g(x))$ until $g(x) \in A$, so the condition $g(G) \subset A$ is essential for the composition $f \circ g$ to have a meaning.

6.2.1 التطبيق العكسي Inverse application

28.2.1 : Definition - تعريف

ليكن f تطبيقا تقابليا من A نحو B

Let f be a bijective mapping from A to B

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

نعرف التطبيق العكسي لـ f كما يلي :

We define the inverse application of f as follows:

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\to A \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

ليكن $y \in B$، بما أن f تقابل من A نحو B فإنه يوجد x وحيد من A بحيث : $y = f(x)$، لدينا :

Let $y \in B$. Since f is a bijection from A to B, there exists a unique $x \in A$ such that $y = f(x)$. Therefore, we have:

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

7.2.1 : Remark - ملاحظة

إذا كان f تقابل من A نحو B فإن f^{-1} تقابل من B نحو A ولدينا:

If f is a bijection from A to B, then f^{-1} is a bijection from B to A, and we have:

$$\begin{aligned} \forall x &\in A, \quad f^{-1}(f(x)) = x, \\ \forall y &\in B, \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y. \end{aligned}$$

22.2.1 : Example - مثال

كما بينا سابقا لدينا التطبيق التالي تقابل

As we previously mentioned, we have the following bijection:

$$\begin{aligned} f:[0,+\infty[&\to [0,+\infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

and its inverse application is as follows: و تطبيقه العكسي هو التالي :

$$\begin{aligned} f^{-1}:[0,+\infty[&\to [0,+\infty[\\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

8.2.1 : Remark - ملاحظة

ليكن $y \in B$. لا يمكننا التكلم عن $f^{-1}(y)$ حتى يكون التطبيق f تقابلا من A نحو B.
Let $y \in B$. We cannot talk about $f^{-1}(y)$ unless f is a bijection from A to B. بينما إذا كان $K \subset B$ يمكننا دائما التكلم عن $f^{-1}(K)$ حتى و إن لم يكن التطبيق تقابلا .
If $K \subset B$, we can always talk about $f^{-1}(K)$ even if the function f is not invertible.

7.2.1 Equals two applications تساوي تطبيقين

Let the two applications: ليكن التطبيقين:

$$\begin{aligned} f:A &\to B \\ x &\mapsto y=f(x) \end{aligned} \quad , \qquad \begin{aligned} g:E &\to F \\ x &\mapsto y=g(x) \end{aligned}$$

نقول أن $f=g$ إذا و فقط اذا كان

We say that $f=g$ if and only if

$$f=g \iff \begin{cases} A=E, \; B=F \\ \forall x \in A \; : \; f(x)=g(x) \end{cases}$$

23.2.1 : Example - مثال

ليكن التطبيقين

Let the two applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

و *and*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

من العلاقات المثلثية نجد أن : $f = g$.

From the trigonometric relations we find that: $f = g$.

3.1 البرهان بالتراجع Retreating evidence

إن مبدأ البرهان بالتراجع يجعل من الممكن إثبات أن القضية $P(n)$ ، صحيحة اعتمادا على كل $n \in \mathbb{N}$. و تمر طريقة البرهان بالتراجع بثلاث خطوات:

The principle of proof by induction makes it possible to prove that the statement $P(n)$ is true for every $n \in \mathbb{N}$. The proof by induction proceeds in three steps: retreating evidence, base case, and inductive step.

الخطوة الأولى، نثبت $P(0)$.

First step, we set $P(0)$.

بالنسبة للخطوة الثانية، نفترض $n \geq 0$ المعطاة بـ $P(n)$ صحيحة ثم نثبت أن القضية $P(n)$ في المرتبة التي تليها صحيحة.

For the second step, we assume that the given statement $P(n)$ is true for some $n \geq 0$ and then prove that the statement $P(n+1)$ is also true.

في الأخير نكون قد برهنا بالتراجع أن القضية $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

In the end, we have proven by induction that the statement $P(n)$ is true for all $n \in \mathbb{N}$.

24.3.1 : Example - مثال

Let's prove that: لنثبت أن:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n.$$

من أجل $n \geq 0$ نضع $P(n)$ القضية التالية :

For $n \geq 0$ we set $P(n)$ the following case:

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \equiv 2^n > n.$$

سوف نثبت بالتراجع أن القضية $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \geq 0$.

We will prove backwards that the case $P(n)$ is true for all $n \geq 0$.

First step **الخطوة الأولى**

من أجل $n = 0$ لدينا $2^0 = 1 > 0$. ومنه $P(0)$ محققة.

for $n = 0$ we have $2^0 = 1 > 0$. From which $P(0)$ is realized.

Second step **الخطوة الثانية**

ليكن $n \geq 0$. نفرض أن $P(n)$ محققة ولنثبت أن $P(n+1)$ محققة.

Let $n \geq$ be0. Let's say that $P(n)$ is true and let's prove that $P(n+1)$ is true.

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n > n + 1 \quad and \quad P(n) \Longrightarrow 2^n > n.$$

From which $P(n+1)$ is realized. ومنه $P(n+1)$ محققة.

أثبتنا بالتراجع أن القضية $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \geq 0$ أي:

We have proven by induction that the statement $P(n)$ is true for all $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \equiv 2^n > n.$$