بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان المفتوحة

برنامج التربية

الاهتزازات والأمواج والصوت

رمز المقرر ورقمه: فيز 302

تأليف أ . د. محمد حسن احمد سناده

بسم الله الرحمن الرحيم

التصميم التعليمي : أ. مناهل محمد بحر الدين عمر آدم

التنضيد الطباعي والتصميم الفني:

أ. مناهل محمد بحر الدين عمر آدم

منشورات جامعة السودان المفتوحة الطبعة الأولى يناير 2007م

محتويات الوحدة

مقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس,

مرحباً بك إلى الوحدة الاولي من مقرر الإهتزازات والموجات وهي بعنوان مقدمة للاهتزازات والحركة التوافقية البسيطة و تتألف من اربعة أقسام رئيسية. ونتعرف في القسم الأول على بعض أنواع الاهتزازات . أما القسمان الثاني والثالث فيتضمنان دراسة الحركة التوافقية البسيطة حيث نتعمق في معرفة و كيفية حركة الزنبرك التوافقية البسيطة.

أما في القسم الأخير فسنتناول العلاقة بين الحركة الدائرية والحركة التوافقية البسيطة , وسنقوم خلال ذلك بمراجعة للحركة الدائرية و فهم التناظر بين الحركة الدائرية والحركة التوافقية البسيطة ، ومن ثم استنتاج العلاقات الرياضية بين مقومات الحركة الأساسية: الإزاحة، والزمن، والسرعة والتسارع.

وقد ذيلنا هذه الوحدة بسرد شامل للمصطلحات العلمية التي وردت في النص الرئيسي، كما حرصنا في هذه الوحدة بوضع أسئلة تقويم ذاتي، وتدريبات كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية والتي تقدمها لمرشدك الميداني.

عزيزي الدارس،،

أهلاً بك مرة أخري إلي هذه الوحدة ونرجو أن تستمتع بدراستها وأن تستفيد منها وأن تشاركنا في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس،،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة يتوقع منك أن تكون قادراً علي أن:

١. تفهم أهمية دراسة الاهتزازات بسبب وجودها الواسع في الكون.
٢. تتعرف على نماذج للحركة التوافقية.
٣. تستطيع إجراء تجربة توضح شكل منحنى الحركة التوافقية للزنبرك مع مرور الزمن.
٤. تستطيع إجراء تجربة لإثبات أن الحركة التوافقية البسيطة هي مسقط للحركة الدائرية.
٥. تقارن بين الحركة الدائرية و الحركة التوافقية البسيطة.
٦. تستنتج بارمترات للحركة التوافقية البسيطة من نظيراتها في الحركة الدائرية.
٧. تتحصل على السرعة والتسارع في الحركة التوافقية البسيطة باستعمال التفاضل .
٨. تحل مسائل وتمارين عن حركة الزنبرك التوافقية.

١,١. الا

عزيزي الدارس،

إن الكون ملئ بالاهتزازات والموجات بصورة مذهلة مما حدا بالفيزيائيين للاهتمام بها منذ زمن بعيد. وبدون الحاجة إلي الذهاب بعيداً فلو فكرت في:

نفسك أولا

- ستجد أن قلبك ينبض بصورة متكررة أي دورية (والدورية هي الخاصية الأساسية في الحركات الاهتزازية والموجية). فنبض القلب ينتج عنه حركة الدم في الشرايين وعودته مرة اخرى عن طريق الأوردة إليه في صورة موجات متتالية.
- كذلك ستجد أنك تتنفس بالرئتين في حركة دورية حيث تكبر الرئتين وتصغر في صورة منتظمة تقريباً.
- وأنت تسمع الأصوات لأن الاهتزازات التي ولدت الصوت (في حنجرة شخص آخر مثلاً) تنتقل إليك في صورة موجات عبر الهواء فتهتز طبلتي أذنيك بنفس شكل الاهتزازة الأصلية.
- لاحظ أن لسانك عندما تتحدث يهتز في داخل فمك ويتحكم مع الشفتين في الحروف في نفس الوقت الذي تهتز فيه الحبال الصوتية لإنتاج الصوت.
- أما عندما تمشي أو تجري فإن كل رجل من رجليك تتحرك في صورة دورية حركة اهتزازية.

ما حولك ثانيا

إذا كنت تستمع إلي الراديو أو تشاهد التلفزيون فأنت تعلم أن كل من الصوت والصورة تنقل إليك من مصدرها إلي هذه الأجهزة بواسطة الموجات الكهربية المغناطيسية الاثنين معاً في مواجه واحدة) حيث تتولد هذه الموجات وتنتشر من اهتزاز الالكترونات في هوائيات الإرسال من محطات الإذاعة والتلفزيون. وعندما تصل هذه الموجات التي تسير بسرعة الضوء إلي هوائيات الراديو أوالتلفزيون تهتز فيها الالكترونات بنفس شكل الاهتزازة الأصلية عند الإرسال وتقوم أجهزة الاستقبال بعد ذلك بترجمتها إلي صوت في الراديو وصوت وصورة في جهاز التلفزيون.

الكون ثالثا

نحن نعلم أن الذرات في أجسامنا في حالة اهتزاز دائم, بل هناك نظرية فيزيائية بدأت منذ نهاية الستينات تسمى نظرية الخيوط Strings أو نظرية الخيوط الفائقة Super Strings

وتفترض النظرية أن كل المادة في الكون هي في مكوناتها (جسيماتها) الأساسية عبارة عن اهتزازات حيث يعتبر كل جسيم أساس عبارة عن اهتزازه صغيرة أو نغمة ناتجة عن حبل ذو بعد واحد طوله صغير جداً لا يزيد عن 10^{-38} م.

لهذا المقرر.

عزيزي الدارس،
الآن وبعض ذكر هذه الامثلة عرفت مدي أهمية دراسة الاهتزازات والموجات وفهم القوانين التي تحكمها.

أسئلة تقويم ذاتي

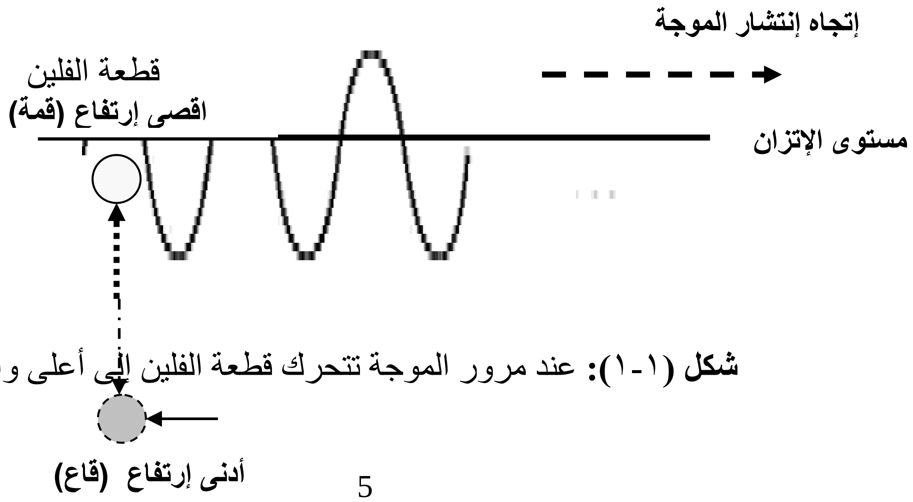
١. هنالك عدد من الاهتزازات الأخرى التي تشاهدها في حياتك اليومية. هل تستطيع ذكر ثلاثة أمثلة أو أكثر؟
٢. ما هي نظرية الخيوط Strings أو الخيوط الفائقة؟

2.1

عزيزي الدارس،،
بعد الإطلاع علي الأمثلة السابقة الآن نبدأ بدراسة وفهم وإيجاد القوانين التي تحكم أبسط هذه الحركات الاهتزازية وسنرى لاحقاً أن الاهتزازات المعقدة تتركب من هذه الاهتزازة البسيطة و تسمى هذه الاهتزازة البسيطة بالحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion أو اختصاراً من الحروف الأولى للإسم الأنجليزي (SHM).

الحركة التوافقية البسيطة(SHM): هي ابسط حركة لجسيم يتحرك في حركة اهتزازية دورية (تكرر نفسها) في خط مستقيم.

ضي
لها نجد أن كثيرا من اهتزازات بعض الأنظمة الميكانيكية يمكن اعتبارها حركة توافقية بسيطة. وسنناقش في الوحدة الثالثة بعض هذه الأنظمة. ولكن الآن وحتى ندخل علي تحليل وفهم الحركة الاهتزازية سنتطرق إلي مثالين أولهما موضح في الشكل (١-١) .



شكل (١-١): عند مرور الموجة تتحرك قطعة الفلين إلى أعلى وإلى أسفل

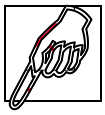
الشكل السابق, عزيزي الدارس, يمثل قطعة فلين أو أي جسم خفيف يرقد علي سطح ماء ساكن فإذا تحركت موجه (بإسقاط جسم في الماء مثلاً) علي سطح الماء فإن قطعة الفلين تبدأ في التحرك إلي أعلى وإلى أسفل حسب حركة الموجة. فالمعروف أن الموجة لها قمم وقيعان وأن الموجة تكرر نفسها فبعد مرور قمة وقاع تتكرر بأن يكون بعدها قمة وقاع آخرين وهكذا فإننا مرور قمة وقاع الموجة تتحرك قطعة الفلين إلي أعلي قمة الموجه ثم تنخفض إلي قاع الموجة ثم تعود مرتفعة وهكذا تتحرك علي حركة اهتزازية قريبة من الحركة التوافقية البسيطة.

ونلاحظ, عزيزي الدارس, هنا أنه بالرغم من أن الموجة تتحرك أفقياً فإن قطعة الفلين تتحرك رأسياً مما يعني أن انتشار الموجة (الأفقية) في الماء لا ينتقل جزئيات الماء في الاتجاه الأفقي (إلا في بعض الحالات الخاصة) وإنما يتحرك جزئيات الماء راسياً. هذا المثال يبين أن هناك ارتباط قوى بين الحركة الاهتزازية والحركة الموجية وهو نموذج واحد للموجات عندما تولد حركة اهتزازية.

والعكس أيضا صحيح فهناك الحالات التي تولد فيها الاهتزازات حركات موجية. فمثلاً:

- اهتزازات الأغشية المشدودة والأوتار المشدودة تولد موجات صوتية.
- اهتزاز الشحنات الكهربية مثلا الالكترونات في الأسلاك يولد الموجات الكهربية المغناطيسية (موجات الراديو بأنواعها). ومن المعروف أن الموجات الكهربية المغناطيسية تجعل الالكترونات الحرة في الأسلاك والمعادن عموماً تتحرك في حركة اهتزازية (أساس نظرية الهوائيات في الأجهزة اللاسلكية).

نشاط



هب انك وقفت أمام بركة تتأمل سطح الماء , وقمت بالقاء
أولا: جحر إلي الماء ثانيا: ورقة شجر إلي الماء
نافش ما يحدث

أسئ

?

١.عرف الموجة.
٢. اذكر بعض الأمثلة للأمواج التي تتحرك حركة رأسية
٣. اذكر بعض الحالات التي تولد فيها الاهتزازات حركات موجية.
٤.علل: هناك ارتباط قوى بين الحركة الاهتزازية والحركة الموجية

3.1.حر

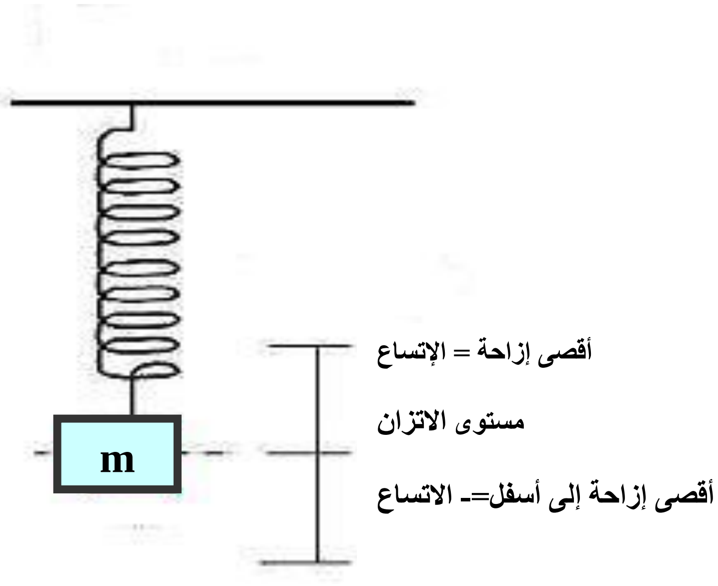
عزيزي الدارس

المثال التقليدي للحركة التوافقية البسيطة هو حركة الزنبرك (Spring) المعلق بـه جسـم كتلتة m والموضح في الشكل (٢-١). فعند تثبيت الطرف الأعلى من الزنبـرك وتعليق كتلـة m فـي طرفـه الأسفل يزيـد طـول الزنبـرك تلقائيـاً بسـبب القـوة التـي تشـده إلـي أسفل والتـي تساوي وزن الكتلة أي :

القوة = الكتلة × عجلة السقوط الحر g .

وعنـدها تصـبح المنظومـة (الزنبـرك والكتلـة معـا) فـي حالـة اتـزان ويسـمى الوضـع هـذا بمستوى الاتزان أو وضع الاتزان (انظر الشكل).

الآن عزيزي الدارس ، إذا جذبنا الكتلة إلي أسفل مسافة A سيستطيل الزنبرك تحت قوة الجذب بمقدار A وعند فك الكتلة ستتحرك إلي أعلى وستزيد سرعتها التي كانت صفراً باستمرار حيث يحاول الزنبرك العودة إلى مستوى الاتزان الأول ولكن عند
وصوله إلي ذلك المستوى تكون سرعة الكتلة قد كبرت ولذلك وحسب مبدأ القصور الذاتي لا يمكن للكتلة أن تقف هناك لأن طاقة الحركة أصبحت كبيرة ولذلك تستمر الكتلة في الحركة متجاوزة مستوى الاتزان حيث يبدأ الزنبرك في الانكماش وهذا يتطلب طاقة ولذلك تقل طاقة الحركة وبالتالي تقل السرعة حتى تصل الكتلة إلي مسافة A فوق

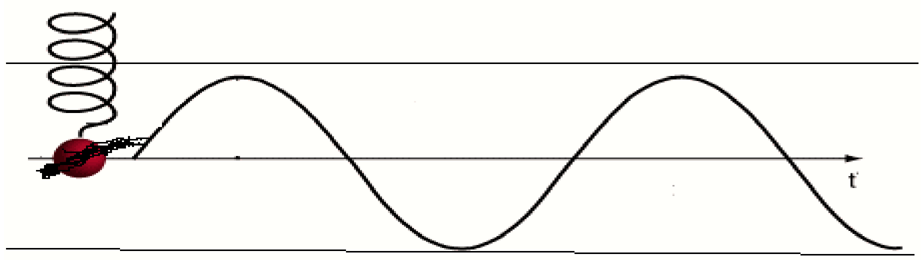


الشكل (٢-١) البندول الزنبركي

مستوى الاتزان حيث تكون كل طاقة الحركة قد إستنفذت في مقابل الطاقة اللازمة لانكماش الزنبرك وتصبح عندها السرعة تساوي صفراً.

عزيزي الدارس ، لقد أصبحت طاقة الحركة كلها طاقة وضع عند الزنبرك ويصبح الزنبرك متوتراً ويحتاج إلى التخلص من هذه الطاقة فيتحرك إلي أسفل فيصل إلى مستوى الاتزان بدون توقف بسبب طاقة الحركة العالية وهكذا تتكرر العملية حيث تصبح الكتلة بسبب الزنبرك في حالة حركة إلي أعلى وإلي أسفل اي في حالة حركة توافقية بسيطة .

واضح أن الحركة التوافقية البسيطة المذكورة أعلاه تحدث مكانياً في بعد واحد (إلي أعلي وإلي أسفل) وتكرر نفسها بمرور الزمن أي أن البعد الثاني للحركة هو الزمن. ولفهم الحركة التوافقية البسيطة في بعدين نحتاج إلي رسم يوضح علاقة هذه الحركة مع الزمن. لتوضيح هذه التجربة عزيزي الدارس نثبت قلم علي الكتلة في الشكل السابق وتمرر شريط من الورق أثناء حركة الكتلة بحيث يتمكن القلم من رسم شكل الحركة , ذلك موضحة في الشكل (٣-١).



الشكل (٣-١) رسم تقريبي لفرشة (قلم) مربوطة في كتلة معلقة في زنبرك ترسم شكل الحركة مع مرور الزمن على شريط من الورق يتحرك إلى اليمين

حيث واضح أن حركة الكتلة m المعلقة في زنبرك في حالة حركة توافقية بسيطة تماثل منحنى جيب الزاوية θ أي $\sin(\theta)$ عندما تكون θ دالة متغيره مع الزمن,أي:

$$\theta = \theta(t)$$

الجدول التالي يوضح حركة ابتداءاً من لحظة الحركة عند الزاوية θ = ٠ الي الزاوية θ =٣٦٠ درجة. أما الشكل (٤-١) ب يوضح منحني الجيب حسب الزاوية من θ = ٠ الي الزاوية θ =٣٦٠ درجة

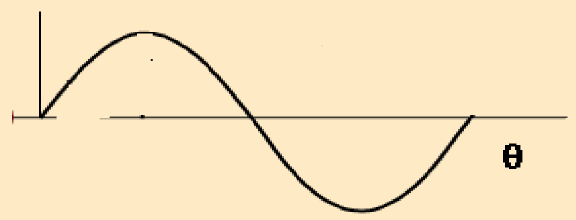
الزاوية θ	٠	٣٠	٦٠	٩٠	١٢٠	١٥٠	١٨٠

راديان	٠	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
جيب	٠	٠,٥	٠,٨٧	١,٠	٠,٨٧	٠,٥	٠

جدول (١) : جيب الزاوية θ

الزاوية θ	٢١٠	٢٤٠	٢٧٠	٣٠٠	٣٣٠	٣٦٠
راديان	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
جيب الزاوية	٠,٥-	٠,٨٧-	١,٠-	٠,٨٧-	٠,٥-	٠

الشكل (٤-١) ب: جيب الزاوية θ



بما أن الإزاحة $\theta(t)$ أي:

$$y \propto \sin\left(\theta(t)\right)$$

في الشكل (٢-١) واضح أن أقصى إزاحة تصلها الكتلة:

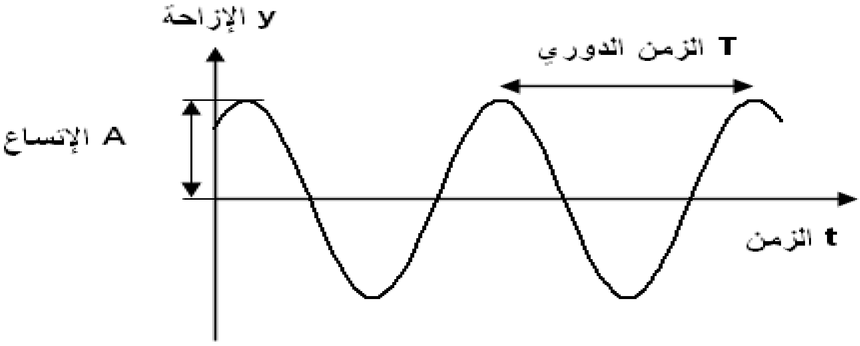
- فوق مستوى الاتزان هي +A
- وتحت مستوى الاتزان هي -A

وعليه فإن الإزاحة في الحركة التوافقية البسيطة لكتلة معلقة في زنبرك هي:

$$\boxed{y = A\sin\left(\theta(t)\right)} \quad \text{.............................. (١-١)}$$

أي تماما كما في شكل (٤-١). ونعرف الازاحة كالآتي:

الإزاحة displacement (y) : هي مسافة الجسم من مستوى الاتزان سواءً كان الجسم أسفل أو أعلى ذلك المستوى عند الزمن t.



الشكل (٤-١) أ : الإزاحة والاتساع والزمن الدوري

أما المقدار A فيسمى بالاتساع **Amplitude** (أنظر الشكل السابق) حيث:

الاتساع A : هو أقصى إزاحة يصلها الجسم المهتز فوق أوتحت مستوى الاتزان.

ما يجب أخذه في الاعتبار أن هذه الحركة الاهتزازية حسب المنحنى الجيبي تكرر نفسها كلما أكملت زاوية θ مقدارها 2π (أو 360^{o}) ولكن لأننا حتي الآن لا نعرف الكثير عن هذه الزاوية θ فسنعتمد علي الملاحظة المباشرة وهي أن حركة الكتلة من مستوى الاتزان إلي أقصى إزاحة A ثم العودة إلي مستوى الاتزان ثم إلي أسفل حتى أقصى إزاحة (A-) ثم العودة إلي مستوى الاتزان تعتبر اهتزازه كاملة (قارن مع الشكل(١- ٤) أ).

وعلي العموم فالاهتزازة الكاملة تعادل الحركة من أدنى مستوى (A-) إلي أعلى مستوى (A+) ثم العودة مرة أخرى إلي أدنى مستوى ثم إلى أعلي مستوى مرة أخرى أي هي الحركة مسافة تساوي 4 A بدايةً من أي نقطة. ومن هنا يمكن تعريف الزمن الدوري Period T

الزمن الدوري : هو الزمن الذي تستغرقه الاهتزازه الكاملة ويرمز له بالرمز T ووحدته الثانية

ولكن ... يسمى بالتردد frequency ويرمز له بالحرف الأول f . وعليه فإن التردد:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$ .... (١-٢)

ويقاس التردد بالهيرتز Hz ويساوي ($\frac{1}{\text{ية}}$) أو s^{-1}.

مثال (١)

إذا كانً الزمن الدوري لاهتزازه ما $\frac{1}{2}$ ثانية فأوجد التردد؟

الحل:

التردد $$f = \frac{1}{T}$$

$$\therefore f = \frac{1}{0.5} = 2Hz$$

عدد الاهتزازات = ٢ اهتزازة كاملة في الثانية .

مثال (٢)

اهتزازة ما ذات تردد 40 Hz ، اوجد زمنها الدوري

الحل

$$f = \frac{1}{T}$$

بما ان االزمن الدوري T = مقلوب التردد فان:

$$T = 1 \div 40 = 0.25 \text{ s}$$

عزيزي الدارس،،

اصبح الآن لديك معرفة ومعلومات مفيدة عن الحركة التوافقية البسيطة حيث تعرفت علي بعض الوسائط أو البارمترات (Parameters) والتي يمكن بواسطتها وصف سلوك أي حركة توافقية بسيطة وهي الازاحة y والاتساع A والزمن الدوري T والتردد f. غير أننا حتي الآن لا نعرف سبب وجود الزاوية θ التي جيبها يتناسب مع الإزاحة لانها في حالة حركة رأسية كحركة الزنبرك لا يظهر بوضوح وجود زوايا فيها وكل ما نعرفه عنها أنها دالة في الزمن أي $\theta(t)$. و في القسمين التاليين عزيزي سوف نتعرف علي ماهية هذه الزاوية.

نشاط :

من الارقام في الجدول (١-١) ارسم sin(θ) للزوايا المحصورة بين

$$2\pi \le \theta \le 0$$

تدريب (1)

1. اذكر البارامتران اللذان تتحرك فيهما الحركة التوافقية البسيطة
٢. إذا كان الزمن الدوري لاهتزازة ما ¾ ثانية فأوجد التردد؟
٣.اذا علم ان اهتزازة ما ذات تردد 30 Hz ، اوجد زمنها الدوري

أسئلة تقويم ذاتى

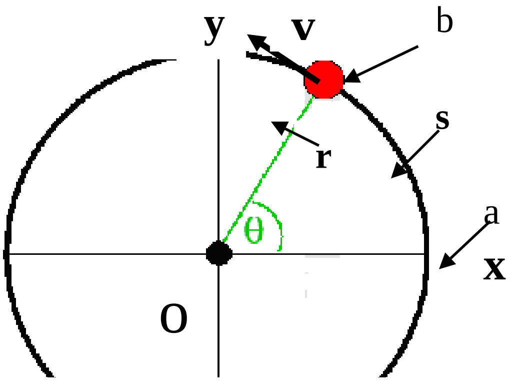
١. عرف كل من:
الاهتزازة الكاملة- الإزاحة-التردد -الزمن الدوري
٢. صف اهتزازه كاملة تبدأ من مستوى الاتزان صاعدة إلى أعلى أولا.
٣. اذكر البعدين الذين يمكن بواسطتهما تمثيل الحركة التوافقية البسيطة
٤. عرف الحركة التوافقية البسيطة باستعمال البارمترات f و T و A
٥. عزيزي الدارس هناك كثير جداً من الاهتزازات العارضة، أعط أمثلة لاهتزازات شاهدتها أو أحسست بها.

.4.1
البس

.1.4.1الحركة الدائرية

عزيزي الدارس،،

لقد مرت عليك دراسة الحركة الدائرية Circular Motion أثناء دراستك للمقرر الفيزياء العامة (٢) (فيز ١٠٢٣) . ولكن لأهمية علاقة هذه الحركة مع الحركة التوافقية البسيطة سنقوم هنا بمراجعة أساسيات هذه الحركة.



الشكل(٥-١): الحركة الدائرية

عزيزي الدارس
الحركة الدائرية

في مسار دائري في عكس اتجاه عقارب الساعة ونصف قطر هذه الدائرة (r) ونفرض أن مركز هذه الدائرة يتطابق مع المركز O للإحداثيات x, y وسنفترض أن هذه الحركة بدأت من النقطة a علي محور السينات وهي الآن في النقطة b بحيث يصنع نصف القطر(r) زاوية θ (تنطق ثيتا Theta) مع محور السينات. ولنفرض أنه مر زمن مقداره t منذ تحرك الجسم من a وحتى وصل الي b حبث من الواضح أن الزاوية θ تتغير باستمرار. فقد كانت θ = صفر عندما كان الجسم علي محور السينات وبالتالي فالزاوية المقطوعة في الثانية الواحدة تزيد كلما زادت سرعة الجسم علي محيط الدائرة وبالتالي فإن مقدار تغير الزاوية θ مع الزمن هو نوع من السرعة وسنرمز له بالرمز ω (وتنطق أو ميقا Omega) حيث :

$$\boxed{\omega = \frac{\theta}{t}} \qquad \text{(١-٣ أ)}$$

وتسمى ω بالسرعة الزاوية angular velocity ومن المعادلة السابقة نجد أن الزاوية :

$$\boxed{\theta = \omega t} \qquad \text{(١-٣ ب)}$$

وهي معادلة هامة جداً كما سنجد لاحقاً. ولأن هناك احتمال لعدم ثبات حركة الجسم بحيث يقطع زاويا متساوية في أزمنة متساوية فإن الصحيح هو

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\theta}{dt}$$

حيث $\Delta\theta$ زاوية صغيرة أو جزء صغير من الزاوية θ قطع في زمن صغير مقداره Δt ولكن السرعة الحقيقية للجسم هي v وهي مماسة لمحيط الدائرة وكلما زادت سرعة الجسم

v فإننا نتوقع زيادة السرعة الزاوية للجسم ω والعكس صحيح. ولذلك فمن البديهي أن نكتب:

$$v \propto \omega$$

وليس من الصعب ايجاد أن ثابت التناسب هو نصف القطر r وعليه

$$\boxed{v = \omega\, r}$$ ....(١-٤)

وفي (١-٤) لم نأخذ في الاعتبار أن الكميات الثلاث (v, ω, r) هي متجهات وعليه في صيغة المتجهات فإن:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$ ....(١-٥)

ذلك لأن $\vec{v}$ والتي هي مماسه للدائرة عمودية علي $\vec{r}$ (نصف القطر ويسمى أيضاً متجه الوضع) وبالتالي لابد ان تكون ω عمودية علي كليهما أي أن $\vec{\omega}$ عمودية علي مستوي الدائرة وبالتالي $\vec{\omega} \times \vec{r}$ عمودية علي $\vec{v}$

بالعودة للشكل (١-٥) للحركة الدائرية حيث الجسم يكمل دورة كاملة في زمن يسمى أيضاً بالزمن الدوري للحركة الدائرية ويرمز له بالرمز T كما في الحركة التوافقية. ولكي يكمل الجسم دورة كاملة فإنه يقطع مسافة S هي عبارة عن محيط الدائرة أي :

$$\boxed{S = 2\pi\, r}$$ .... (١-٧)

ولكن نفس هذه المسافة يقطعها الجسم في زمن يساوي الزمن الدوري T وعليه فإن هذه

المسافة = سرعة الجسم × الزمن الدوري أي :

$$\boxed{S = vT}$$ .... (١-٧)

ومن (١-٦) و (١-٧) فإن :

$$\boxed{vT = 2\pi\, r}$$ ... . (١-٨)

ولكن في (١-٤) $v = \omega\, r$

∴ (١-٨) تصبح:

$$\omega\, rT = 2\pi\, r$$

أو :

$$\omega\, T = 2\pi$$

أي:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$ .... (١-٩)

وهي متوسط السرعة الزاوية لدورة كاملة للجسم حول الدائرة

وواضح أن وحدات ω هي $\frac{1}{\text{ية}}$ أيٍ s^{-1} وهي نفس وحدات التردد في الحركة التوافقية البسيطة. المعادلة (١-١٠) تعني ايضاً أن الزمن الدوري :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

بما أن عدد دورات الجسم حول الدائرة في الثانية الواحدة هي :

$$f = \frac{1}{T}$$

أي أن عدد الدورات يقابل التردد في الحركة التوفقية البسيطة ومن (١-٩) و المعادلة اعلاها نجد أن :

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$ .... (١-١٠)

أي أن:

السرعة الزاوية = 2 π × عدد الدورات في الثانية

مثال (٣)

جسم يتحرك في مسار دائري بمعدل ٥ دورات في الثانية فاوجد سرعته الزاوية

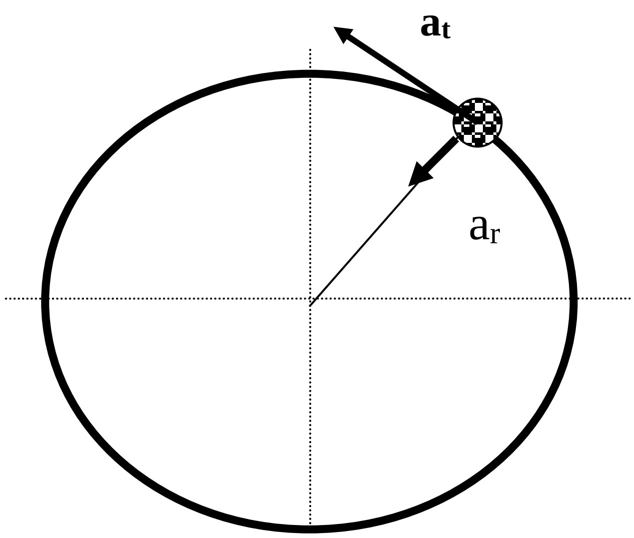
الحل :

السرعة الزاوية ω = 2 π × **عدد الدورات في الثانية**

$= 2\pi \times ٥ = 10\pi$

عزيزي الدارس:

الآن وصلنا إلي مرحلة تمكننا من التعرف علي القوى المؤثرة علي الحركة الدائرية أي تعريف العجلة أو التسارع في هذه الحركة.



الشكل(٦-١):التسارع الخطي والتسارع المركزي

سرعة الجسم مماسه للدائرة في الحركة الدائرية وهي قد تكون غير ثابتة مما يعني أن تسارع الجسم في الحركة الدائرية يكون مماساً للدائرة ويرمز لهذا التسارع بالرمز a_t (T= tangential أي مماسه) أنظر الشكل (٦-١)

لا يمكن أن تكون هناك حركة دائرية بدون وجود قوة جذب مركزية F_c (Centripetal force) وتكون هذه القوة في اتجاه مركز الدائرة وهي التي تحفظ الجسم في مساره الدائري وإذا اختفت هذه القوة يتحرك الجسم في خط مستقيم.

و نجد ان :

- القوة الجاذبية بين الأرض والقمر هي التي تحفظ القمر في مداره حول الأرض
- القوة الجاذبية بين الشمس والأرض هي التي تحفظ الأرض في مدارها حول الشمس.
- قوة الجذب الكهربية بين نواة الذرة والالكترونات هي تحفظ الالكترونات في مستويات طاقتها داخل الذرة.

ولأن القوة في أي حركة تساوي الكتلة × التسارع فإن وجود قوة الجذب المركزية في الحركة الدائرية يعني وجود تسارع نرمز له بالرمز a_r (r- radial) في نفس اتجاه القوة أي متجهة إلي مركز الدائرة (أنظر الشكل (٦-١)) هذا التسارع بالذات أي a_r يُهِمُنا هنا لارتباط وجوده بوجود الحركة الدائرية ولأن قوة الجذب المركزية :

$$F_r = m\, a_r$$

حيث التسارع $\vec{a}_r$ يمكن إيجاده من المتجهات في هذه الحركة، فمتجه السرعة الخطية $\vec{v}$ عمودي علي $\vec{a}_r$ بينما السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ عمودية علي كل من $\vec{v}$ و $\vec{a}_r$

ولذلك نستنتج أن :

$$\boxed{\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}}$$ .... (١-١١)

أو $$\boxed{a_r = \omega \times v}$$ .... (١-١٢)

ولكن من (١-٤) $v = \omega r$ نجد أن:

$$\boxed{a_r = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}}$$ .... (١-١٣)

أي أن التسارع المركزي يتناسب مع مربع السرعة الزاوية ويتناسب أيضاً مع مربع السرعة المماسة.

مثال

جسم يتحرك في مسار دائري نصف قطره ٢ متر بمعدل ٥ دورات في الثانية. فاوجد التسارع والسرعة المماسة.

الحل :

بما ان السرعة الزاوية هي

$\therefore$ $\omega = 2\pi \times$ عدد الدورات في الثانية $= 2\pi \times ٥ = 10\pi$

والتسارع هو $a_r = \omega^2 r = (10\pi)^2 \times 3 = 300\pi^2$

ولكن $a_r = \omega \times v$

وبالتعويض نحصل علي $300\pi^2 = 10\pi \times v$

$\therefore$ السرعة المماسة v تساوي $v = 30\pi$

أسئلة تقويم ذاتى

؟

١. علل ما ياتي :
   ١. السرعة الزاوية لا توجد في الحركة في خط مستقيم.
   ٢. السرعة الخطية في الحركة الدائرية مماسه للدائرة.
   ٣. اتجاه السرعة الزاوية عمودي علي سطح الدائرية.
   ٤. كلما زادت السرعة الخطية زادت السرعة الزاوية.
   ٥. إذا زاد الزمن الدوري للحركة الدائرية قلت السرعة الزاوية.
   ٦. تزيد السرعة الزاوية بزيادة عدد دورات الجسم حول الدائرة.
٢. جسم يتحرك في مسار دائري نصف قطرها ٢ متر بمعدل ٥ دورات في الثانية فاوجد السرعة الزاوية و التسارع والسرعة المماسة.

2.4.1.التناظر بين الحركة الدائرية والحركة التوافقية البسيطة

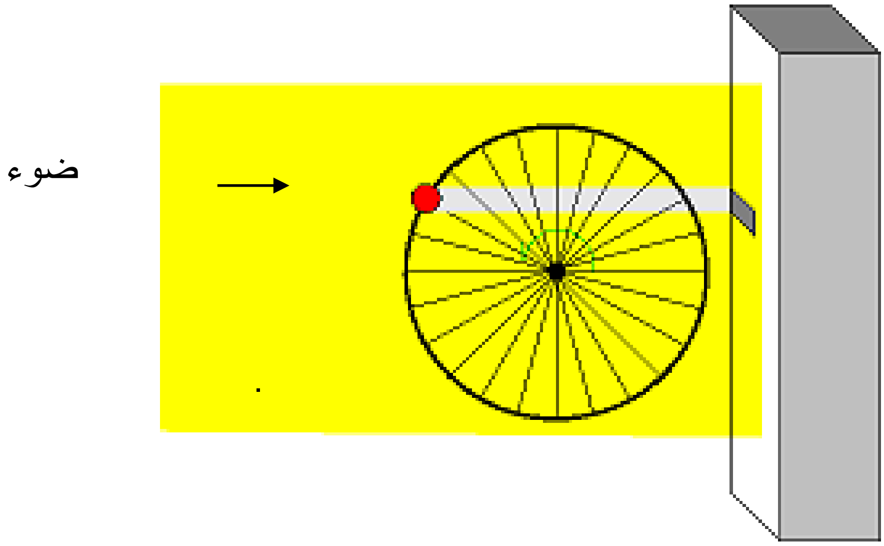
عزيزي الدارس ،،

إذا أغلقت احدى عينيك ونظرت إلي حافة الحركة الدائرية بحيث لا ترى أي جزء من الدائرة التي يتحرك حولها الجسم فإنك سترى مسقط الحركة الدائرية وسترى كأنما الجسم يتحرك في خط مستقيم. ولو تابعت بقليل من التدقيق لوجدت أن هذه الحركة في خط مستقيم هي حركة توافقية بسيطة.

و المدهش أنك إذا نظرت من أي جانب للحركة الدائرية فإنك ستشاهد حركة توافقية بسيطة.

تجربة:

١/اقطع دائرة من الخشب أو من الكرتون أو اختار أي جسم دائري مسطح وأجعل له محوراً بارزاً مار بمركز الدائرة ثم ثبت مسماراً أو أي جسم غير طويل ودائري الشكل قرب محيط الدائرة علي احد وجهيها كما في الشكل (٧-١). عند وضع محور الدائرة علي حاملين ووضع ساتر في الخلفية ووضع مصباح بحيث يكون مواجهاً لحافة الدائرة وعند تحريك الدائرة في حركة دائرية يظهر ظل هذه الحركة علي الساتر في صورة حركة توافقية بسيطة.



شكل(٧-١):ظل الحركة الدائرية =حركة توافقية بسيطة

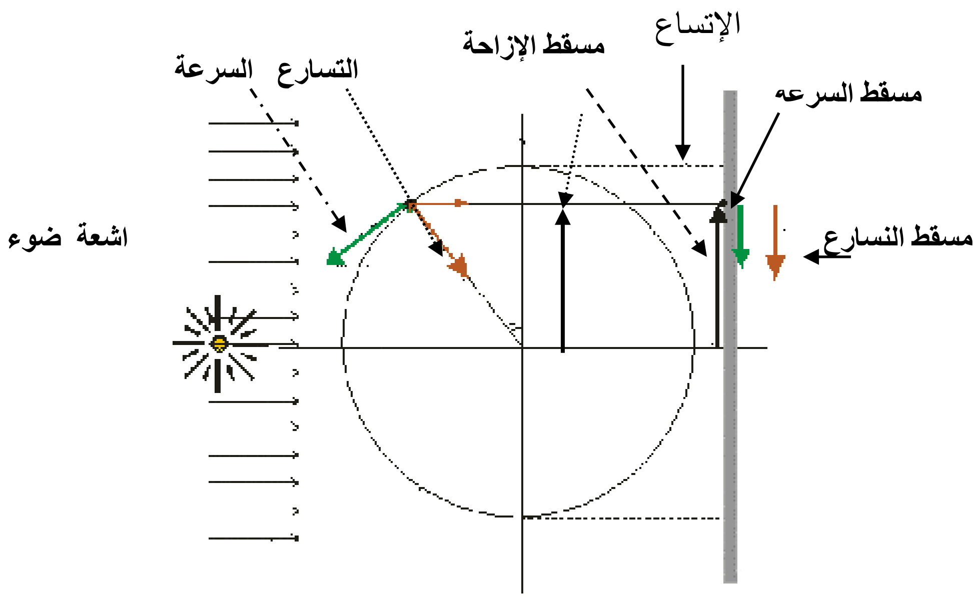
٢) ويمكن مشاهدة الحركة التوافقية من نفس الدائرة السابقة إذا جعلت الدائرة تدور في المستوى الأفقي علي نفس مستوى العينين.

عزيزي الدارس مما سبق نلاحظ أن:

الحركة التوافقية البسيطة هي مسقط لحركة دائرية ولذلك فكل الكميات الفيزيائية الأساسية في الحركة الدائرية تجد ما يقابلها في الحركة التوافقية البسيطة .

الكميات الفيزيائية الأساسية في الحركة التوافقية البسيطة وما يقابلها في الحركة الدائرية

- **اولا:** الزمن الدوري T في الحركة التوافقية البسيطة (الزمن اللازم لإكمال اهتزازة كاملة) يناظره الزمن الدوري T في الحركة الدائرية (الزمن اللازم لإكمال دورة كاملة).
- **ثانيا:**: التردد f في الحركة التوافقية البسيطة (عدد الاهتزازات الكاملة في الثانية) يناظره التردد أو عدد الدورات الكاملة في الثانية في حالة الحركة الدائرية.
- **ثالثا:** الاتساع A في الحركة التوافقية البسيطة (أقصى إزاحة) يناظره نصف قطر الدائرة r في الحركة الدائرية (أنظر الشكل (٨-١))



الشكل (١-٨):
مساقط كل من الإزاحة والسرعة والتسارع وإتجاهاتها على حاجز رأسي

أما الإزاحة y في الحركة التوافقية البسيطة فهي مسقط نصف القطر r على المحور الصادي y (انظر الشكل (١-٨)),

أي أن:

$$\boxed{y = r\sin(\theta) = A\sin(\theta)}$$ .... (١-١٤)

وهي نفس المعادلة (١-٢) والتي عند ما حصلنا عليها لم نعرف من أين جاءت الزاوية θ. هذا التناظر يسمح لنا تلقائياً باستعمال معادلة الحركة الدائرية (١-٣ ب) أي

$$\theta = \omega t$$ .... (١-٣ ب)

وكنا قد لاحظنا سابقاً عند مناقشة المنحنى الجيبي للحركة التوافقية البسيطة أن الزاوية θ لابد أن تكون دالة في الزمن أي $\theta(t)$ و المعادلة (١-٣ ب) توضح ذلك ,

حيث θ تتناسب مع الزمن t وثابت التناسب هو ω والتي تمثل السرعة الزاوية في الحركة الدائرية وتعطى حسب المعادلة (١-٩)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

حيث T هو الزمن الدوري في الحركة الدائرية وهو مساوٍ للزمن الدوري T في الحركة التوافقية البسيطة. وعليه لابد أن تكون السرعة الزاوية في الحركة التوافقية البسيطة التي زمنها الدوري T وترددها f

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (١٠-١)$$

أي أن ω تناسب مع التردد ولذلك تسمى ω في الحركة التوافقية البسيطة **التردد الزاوي Angular frequency** لتمييزها عن السرعة الزاوية في الحركة الدائرية .
وعلي ذلك تصبح الزاوية $\theta(t)$ في الحركة التوافقية البسيطة حسب المعادلة (١٤-١) هي نفس $\theta = \omega t$ وبالتالي فالإزاحة في الحركة التوافقية هي :

$$\boxed{y = A \sin (\omega t)} \qquad (١٥-١)$$

حيث ω – التردد الزاوي

عزيزي الدارس ،،

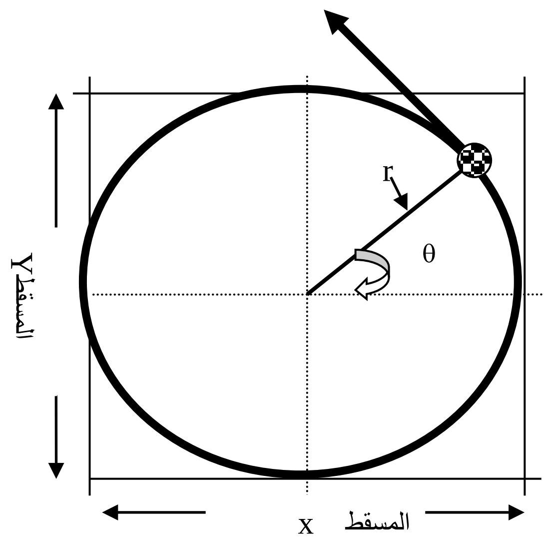
تحدثنا حتى الآن وباستفاضة عن حركة الزنبرك التوافقية البسيطة الرأسية ووضحنا أنها مسقط للحركة الدارية في الاتجاه الرأسي.غير أن كثير من الحركة التوافقية البسيطة يمكن أن تكون في الاتجاه الأفقي أو في أي إتجاه آخر. فحركة الزنبرك يمكن أن تكون في الاتجاه الافقي (المحور X) .

من الشكل (٩-١) يمكننا أن نستنتج أن مسقط نصف قطر الدائرة r علي المحور X هو:

$$x = r \cos \theta$$

ولأن نصف قطر الحركة حول الدائرة المناظرة هو اتساع الحركة التوافقية البسيطة A ولأن السرعة الزاوية ω في الحركة الدائرية المناظرة هي التردد الزاوي ω في الحركة التوافقية البسيطة فإن الإزاحة في الحركة التوافقية البسيطة الأفقية هي :

$$\boxed{x = A \cos (\omega t)} \qquad (١٦-١)$$



الشكل(٩-١): مساقط الحركة الدائرية على X و Y

عزيزي الدارس. بالمقارنة بين (١٥-١) و (١٦-١) باعتبارهما مسقطين لنفس الحركة الدائرية يتضح أنه عندما:

اولا: x = A (الجسم علي المحور X) فإن y = o

ثانيا: y = A (يكون الجسم وصل إلي المحور Y) فإن x = 0

أي أن هناك فرق في الطور phase أو زاوية بين الحركتين مقدارها $\frac{\pi}{2}$ = ٩٠ درجة. هذا الاستنتاج عن وجود الفرق في الطور بين مساقط الحركة الدائرية علي المحورين Y, X أي الحركتين الرأسية والأفقية لنفس الحركة الدائرية هام جداً وسنناقشه لاحقاً حيث سنجد رياضيا أن أي حركة توافقية رأسية أو أفقية تصاحبها حركة توافقية خيالية عمودية عليها .

مثال (٣)

كتلة معلقة في زنبرك يتحرك في حركة توافقية بسيطة رأسية ترددها ١٠Hz واتساعها 8cm، أوجد الزمن الدوري والتردد الزاوي للحركة والإزاحة بعد ٠,٥ ثانية من بداية الحركة .

الحل:

التردد f = 10Hz ، الاتساع A =8 cm ،

الزمن الدوري T = 1/f = 1÷5 = 0.2 s

التردد الزواي للحركة هو ω

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

$\therefore \quad \omega = 2\,\pi \times 10 = 20\,\pi$

الإزاحة في الحركة التوافقية هي :

$$y = A \sin(\omega t)$$

$Y = 8 \times \sin 20\pi \times 0.5 = 8 \times \sin 10 \times \pi = \quad m$

تدريب (2)

١. كتلة معلقة في زنبرك يتحرك في حركة توافقية بسيطة رأسية ترددها ٥Hz واتساعها 5cm، أوجد :
اولا: الزمن الدوري
ثانيا: التردد الزاوي للحركة
ثالثا: الإزاحة بعد ٠,٠٥ ثانية من بداية الحركة .

أسئ

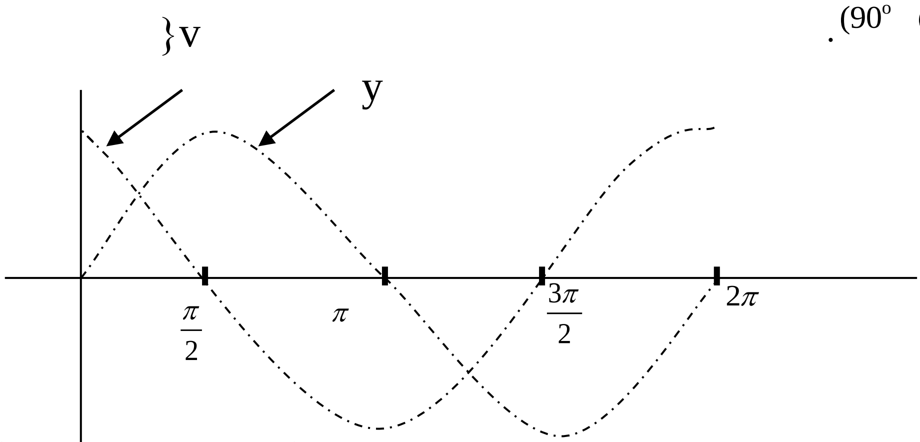
١. عرف التردد الزاوي للحركة التوافقية البسيطة
٢. قارن بين الكميات الفيزيائية الأساسية في الحركة التوافقية البسيطة وما يقابلها في الحركة الدائرية.
٣. اذكر اتجاه القوة في كل حالة :
اولا: بين الأرض والقمر
ثانيا: بين الشمس والأرض
ثالثا: بين نواة الذرة والالكترونات
٤. أثبت أن ω في الحركة الدائرية هي نفسها ω في الحركة التوافقية البسيطة المناظرة.

.3.4.1

بما أن السرعة هي معدل تغير الازاحة في الزمن فإنه يمكن الحصول علي سرعة الحركة التوافقية البسيطة مباشرة بتفاضل الإزاحة في الزمن وبالتالي وحسب المعادلة (١-١٥) تكون السرعة في الحركة التوافقية البسيطة الرأسية هي :

$$\boxed{v_y = \frac{dy}{dt} = A\,\omega \cos(\omega\, t)} \quad \text{.................... (١-١٧)}$$

عند رسم الإزاحة y حسب (١-١٦) والسرعة v (١-١٧) نحصل علي الشكل (١-10) والذي يوضح أن هناك فرقاً في الطور phase difference بينهما ومقداره $\frac{\pi}{2}$ (90^o).



فعندما تكون الإزاحة في مستوى الاتزان x = صفر تكون السرعة عند اقصى قيمة لها

V_m حيث $= \omega A$ عندما $t = 0$

الشكل (١-١٠): الإزاحة y والسرعة v

$$\omega A = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- ثانيا: سالبة عندما

$$\omega A = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

وفي كل هذه الحالات تكون $y = A \sin \omega t = 0$

وهذا ما ذكرناه سابقاً في أن سرعة الكتلة m تصبح عالية عند مستوى الاتزان ولذلك لا تتوقف لأن طاقة حركتها كبيرة وتستمر في الصعود (أو الهبوط) حتى تصل إلى أقصى إزاحة $\pm A$ والتي تتحول عندها كل طاقة الحركة إلي طاقة وضع في الزنبرك.

وعند أقصى إزاحة هذه $y = \pm A$ تصبح سرعة الكتلة صفراً فتتوقف الكتلة وتبدأ بالحركة في الاتجاه المعاكس تحت تأثير طاقة الزنبرك التي تتحول بعد ذلك بالتدريج إلى

طاقة حركة تصل قيمتها القصوى عند مستوى الاتزان مرة أخرى ولكن في الاتجاه المعاكس.

السرعة في الحركة التوافقية البسيطة واتجاهاتها يمكن الحصول عليهما مباشرة من مسقط الحركة الدائرية (الشكل (١-٨)) حيث مسقط السرعة في الحركة الدائرية هو السرعة في الحركة التوافقية.

عزيزي الدارس,,

نلاحظ في الشكل أن مسقط السرعة v عندما يكون الجسم في الحركة الدائرية علي المحور y يساوي صفراً لأن السرعة في هذه الحالة موازية للمحور x بينما مسقط السرعة يأخذ نفس قيمة السرعة في الحركة الدائرية عندما يكون الجسم في هذه الحركة علي المحور x أي أن السرعة موازية للمسقط وفي كل الأحوال فإن السرعة علي المسقط :

$$\boxed{v_y = v\cos(\theta)} \quad \text{.............................} \quad (\text{١-١٨})\text{أ}$$

حيث v السرعة في الحركة الدائرية.

ولأن السرعة في الحركة الدائرية (المعادلة (١-٤))

$$v = r\,\omega \quad (\text{١-٤})$$

بمان نصف القطر r في الحركة الدائرية يساوي الاتساع A

فإن المعادلة (١-١٨) تصبح

$$\boxed{v_y = r\,\omega\cos(\theta) = A\,\omega\cos(\omega t)} \quad \text{......}\text{ب}(\text{١-١٨})$$

وهي نفس المعادلة (١-١٧).

أسئلة تقويم ذاتى

؟

١. عرف السرعة في الحركة الحركة التوافقية البسيطة ثم اكتب معادلتها.

٢. باستعمال الشكل (١-٨) أو المعادلتين(١-١٥)و(١-١٧)اكمل التالي

عندما تكون y = A فإن قيمة ωt = ...

و عندما y = -A فان قيمة ωt =............

٢.استعمل الفعل المناسب من الفعلين (تقل/ تزيد) في الفراغات التالية:

أولا: عندما .... الازاحة .... السرعة

ثانياً: عندما تقل الإزاحة........... السرعة

4.1

عزيزي الدارس ,,

نبدأ هذه المرة من الحركة الدائرية وننظر إلي مسقط التسارع المركزي في هذه الحركة في الاتجاه الرأسي وذلك لأننا نعلم أن قوة الجذب المركزية هي القوة التي تسبب الحركة الدائرية ولذلك فإن مسقط هذه التسارع a_r هو تسارع الحركة التوافقية البسيطة المناظرة a (أنظر الشكلين (٨-١) و (٩-١)). التسارع المركزي a_r في الحركة الدائرية يتجه دائماً للمركز أي في عكس اتجاه نصف القطر r ولأن مسقط r في الاتجاه الرأسي هو الإزاحة y حيث:

$$y = r \sin(\theta)$$

فإن مسقط a_r هو التسارع a_y حيث :

$$a_y = -a_r \sin(\theta)$$

ولكن من المعادلة (١٢-١) و (٤-١) حيث :

$$a_r = \omega v = \omega^2 r$$

نجد أن:

$$\boxed{a_y = -\omega^2 r \sin(\theta) = -\omega^2 A \sin(\omega t)} \quad \text{.................. (١٩-١)}$$

وعلامة السالب تعني أن التسارع في الحركة التوافقية البسيطة الرأسية (وكذلك الأفقية) a_y دائماً في عكس اتجاه الزيادة في الإزاحة: $y = A \sin(\omega t)$ كما موضح في الشكل (٨-١).

واضح أن الزيادة في التسارع a_y في عكس اتجاه الزيادة في الإزاحة ويصل أقصى قيمة سالبة له عندما تصل الإزاحة أقصى قيمة لها موجبة والعكس صحيح. ويكون التسارع صفراً عندما تصبح الإزاحة صفر.

أيضاً المعادلة (١٩-١) والمعادلة $y = A \sin(\omega t)$ يوضحان أنه عند:

- اقصى قيمة للإزاحة تصل قيمة التسارع أقصاها, وعندها يتوقف الجسم وتصبح السرعة صفراً
- وعند أقصى قيمة للسرعة عند مستوى الاتزان يصبح التسارع صفراً والإزاحة صفرا.

معادلة التسارع (٢٠-١) يمكن الحصول عليها مباشرة من تفاضل السرعة بالنسبة الزمن وذلك من المعادلة (١٧-١) حيث :

$$\boxed{v_y = \frac{dy}{dt} = A\,\omega \cos(\omega t)}$$

وبالتفاضل مرة اخري تتحصل علي

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\,\omega^2 \sin(\omega t)$$ .... (١-٢٠)

وجود التسارع يعني وجود قوة ، و هذه القوة تؤثر علي الكتلة m في الحركة التوافقية البسيطة حيث :

$$F = m\, a_y$$ .... (١-٢١)

فالقوة في الحركة التوافقية البسيطة لكتلة معلقة في زنبرك هي ناتجة من محاولة الزنبرك المنكمش أو المشـدود للعودة إلي مستوى الاتزان الطبيعي هذه القوة تسمى **قوة الإعادة Restoring force** للزنبرك وهي القوة في المعادلة (١-٢١). ولذلك عند أقصى إزاحة فوق مستوى الاتزان (أي عند الاتساع A) يكون الزنبرك في حالة أقصى أنكماش ولذلك يأخذ التسارع اقصى قيمة له أي اقصى قيمة للقوة والتي ستعمل علي ارجاع الكتلة الي مستوى الاتزان. ونفس الشئ يحدث عندما تكون الكتلة علي مسافة الاتساع (A) أسفل مستوى الاتزان. ولذلك كان التسارع وبالتالي القوة تزيد بزيادة الإزاحة لأن زيادة الإزاحة تعني زيادة الانكماش أعلي مستوى الاتزان وزيادة الشد أسفل مستوى الاتزان .

مثال (٣)

جسم يتحرك في حركة توافقية بسيطة رأسية ترددها ٤ هيرتز (Hz). فإذا كانت سرعة الجسم v_y عند اللحظة $t = \frac{1}{8}$ s تساوي -2.5 m/s، فأوجد :

اولاً: اتساع هذه الحركة.

ثانياً: التسارع عند تلك اللحظة.

ثالثاً: اين يوجد الجسم عند تلك اللحظة.

رابعاً الاتجاه الذي يتحرك اليه الجسم عند تلك اللحظة.

الحل :

التردد $f = 4$ Hz والسرعة = -2.5 m/s

السرعة الزاوية $\therefore \omega = 2\pi f = 8\pi \quad S^{-1}$

$$\therefore \quad \omega t = 8\pi \times \frac{1}{8} = \pi$$

اولاً: بما ان السرعة هي -2.5 m/s

اذن $v_y = \omega A \cos(\omega t) = 8\pi A \cos(\pi) = -8\pi A$

$$\therefore \quad -2.5 = -8\pi A$$

$$A = \frac{8\pi}{2.5} \cong 10m$$

ومنها نحصل علي الاتساع

ثانياً: التسارع

$$a_y = -\omega^2 A \sin(\omega t) = -\omega^2 A \times 0 = 0$$

ثالثاً: يوجد الجسم علي بعد

$$y = A \sin(\omega t) = A \times 0 = 0$$

أي في مستوى الاتزان

رابعاً: بما ان السرعة سالبة وبالتالي الاتجاه إلي أسفل

تدريب (٣)

1. كتلة ٢٠٠ جرام معلقة في زنبرك تتحرك في حركة توافقية بسيطة رأسية اتساعها 15cm أوجد كل من الإزاحة y والسرعة v_y والتسارع a_y والقوة عندما تكون:

(أ) $\theta = \pi/6$ (ب) $\theta = \pi$

2. كتلة معلقة في زنبرك تتحرك في حركة توافقية بسيطة رأسية اتساعها 10cm وترددها ٢ هيرتز (Hz)، أوجد:

أولا: الزمن الدوري. ثانياً:التردد الزاوي.

ثالثاً: السرعة v_y عندما تكون الإزاحة y = 5cm .

رابعاً: التسارع a_y عند نفس الإزاحة . خامساً: الزمن t عند نفس الإزاحة .

3. إذا كان الزنبرك والكتلة في المثال السابق يتحركان في حركة توافقية بسيطة أفقية بنفس الاتساع ونفس التردد فأوجد :

السرعة v_x عند تكون الإزاحة x = 5 cm .

التسارع a_x عند نفس الإزاحة .

أسئلة تقويم ذاتى

؟

١.أكتب قوانين الإزاحة والسرعة والتسارع في الحركة التوافقية الأفقية أي a_x, v_x, x

٢. اثبت أن التسارع تعطي بالعلاقة التالية

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = - A\,\omega^2 \sin(\omega t)$$

٣. جسم يتحرك في حركة توافقية بسيطة رأسية ترددها 8 هيرتز (Hz). فإذا كانت سرعة الجسم v_y عند اللحظة $t = 5/8$ s تساوي 10m/s، فأوجد :

اولاً: اتساع هذه الحركة.
ثانياً: التسارع عند تلك اللحظة.
ثالثاً: اين يوجد الجسم عند تلك اللحظة.
رابعاً الاتجاه الذي يتحرك اليه الجسم عند تلك اللحظة

الخلاصة:

عزيزي الدارس ،،

نهنئك على إنهاء هذه الوحدة، وندعوك لمراجعة أهم النقاط التي وردت فيها:

اولا: قوانين الحركة التوافقية البسيطة في الاتجاه الراسي التردد f هو مقلوب الزمن الدوري T . التردد الزاوي ω يناظر السرعة الزاوية في الحركة الدائرية

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

الاتساع A هو اقصى إزاحة من موضع الاتزان

الإزاحة y هي المسافة من مستوى الاتزان حيث:

$y = A \sin(\omega t)$ والوحدة m

السرعة $v = A\omega \cos(\omega t)$ والوحدة m/s

التسارع $a = -A\omega^2 \sin(\omega t)$ والوحدة m/s^2

عزيزي الدارس

نرجو في ختام هذه الوحدة أن تكون حققت الأهداف الواردة في بدايتها، ونتمنى لك التوفيق دائماً.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس،

بعد أن فرغت من دراسة هذه الوحدة العلمية و اصبح لديك الآن حصيلة من المعلومات المفيدة فيما يتعلق بمفهوم الاهتزازات والحركة التوافقية البسيطة ستنتقل معنا إلى الوحدة القادمة وهي بعنوان معادلة الحركة التوافقية البسيطة وحلولها حيث سنجد الإزاحة والسرعة والتسارع و أيضا سنتناول الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة.

نرجو أن تكون وحدة مفيدة لك وان تسهم معنا في نقدها وتقييمها.

إجابة التدريبات

التدريب (١) : ٢/ f=1.33Hz ٣/ T= o.333 s

التدريب (٢)

$y = A$ m , $\omega = 10\pi$, T= 0.2 S

التدريب (٣)

١. (أ) $y = 75 \times 10^{-3} = 7.5$ cm , $v_y = 0.1\,\omega$, $a_y = -75 \times 10^{-3}\,\omega^2$

(ب) $y = 0$, $v_y = -0.15\,\omega$, $a_y = 0$

٢. (أ). $T = \frac{1}{2}$ S

(ب). $\omega = 4\pi$

(ج). عندما $y = 0.05$ فإن $\omega t = \frac{\pi}{6}$, $v_y = 0.28\pi$ m/s

(د). $a_y = 8$ m/s^2

(هـ). $t = \frac{11}{24}$ S

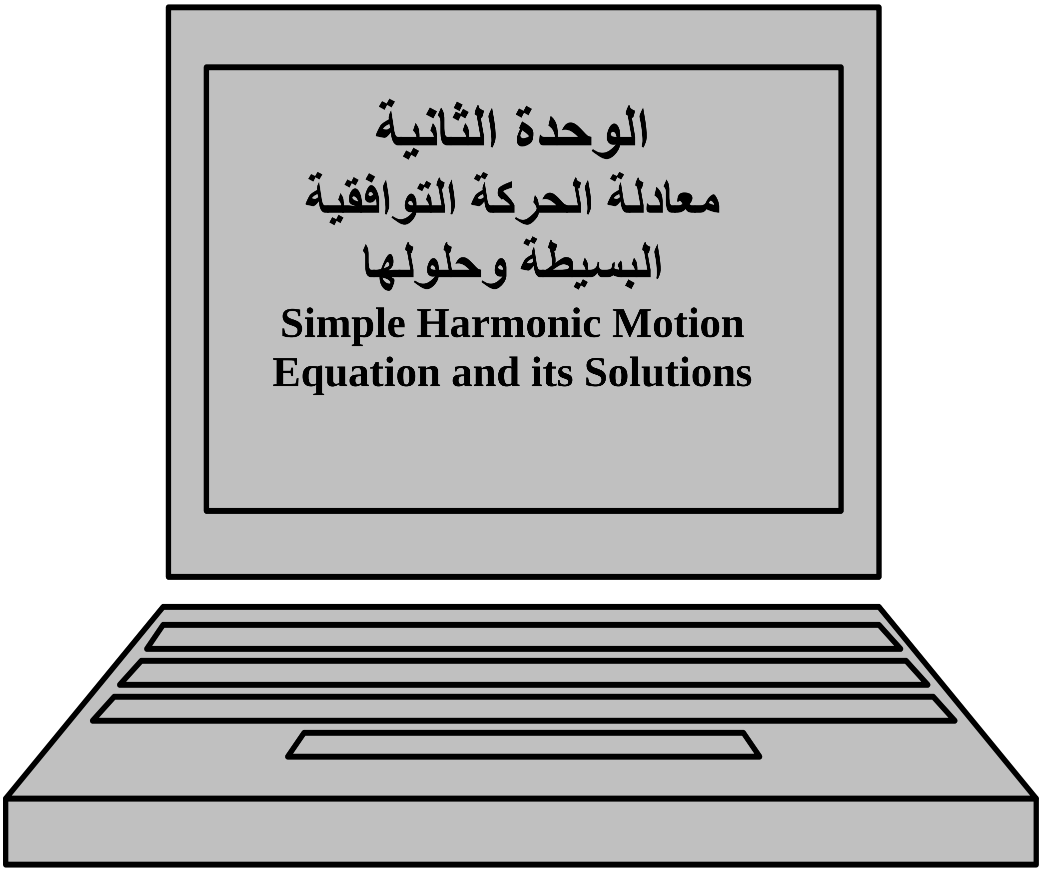
٣. (أ) $v_x = \pi/5$ (ب) $a_x = \pi^2$

مسرد المصطلحات

عزيزي الدارس،،

الان نتعمق في المصطلحات الواردة في الوحدة باللغة الإنجليزية، كي نسهل عليك الرجوع إلى أي مراجع أجنبية، أو البحث عبر شبكة الإنترنت.

الاهتزازات	Vibrations
الحركة التوافقية البسيطة	Simple Harmonic Motion (SHM)
الخيوط الفائقة	Super Strings
الزنبرك	spring
الإزاحة	displacement
الاتساع	Amplitude
التردد	frequency
الوسائط أو البارمترات	Parameters
الحركة الدائرية	Circular Motion
قوة جذب مـركزية	Centripetal force
التردد الزاوي	Angular frequency
الطور	phase
قوة الإعادة	Restoring force



محتويات الوحدة الثانية

مقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس,

مرحباً بك إلى الوحدة الثانية وهي بعنوان الحركة التوافقية البسيطة وحلولها, و تتألف من أربعة أقسام رئيسية. في القسم الأول نتعرف علي الحركة التوافقية البسيطة و كيفية إيجاد قوانين الإزاحة والسرعة والتسارع في الاتجاهين الأفقي والراسي. أما القسم الثاني فيتضمن معادلة الحركة التوافقية و قوة الإعادة في الزنبرك و كتابة معادلة الحركة التوافقية البسيطة في الاتجاهين الرأسي والأفقي .

ثم ننتقل معا إلى القسم الثالث حيث نتعمق في طرق حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة وهي:

أولا: الحل البسيط لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة باستخدام الدوال المثلثية

ثانياً: الحلول المركبة لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة باستعمال الدوال الآسية.

أما في القسم الاخير فسنتناول الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة ثم معادلات ايجاد الطاقة.

وأخيرا, فقد ذيلنا هذه الوحدة بسرد للمصطلحات العلمية التي وردت في النص الرئيسي، وقد حرصنا ايضا على معرفة العلاقات الرياضية، مع تقديم أمثلة متنوعة، وأسئلة تقويم ذاتي، وتدريبات كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية والتي تقدمها لمرشدك الميداني.

أهلاً بك مرة أخري عزيزي الدارس إلي هذه الوحدة ونرجو أن تستمتع بدراستها وأن تستفيد منها وأن تشاركنا في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس،

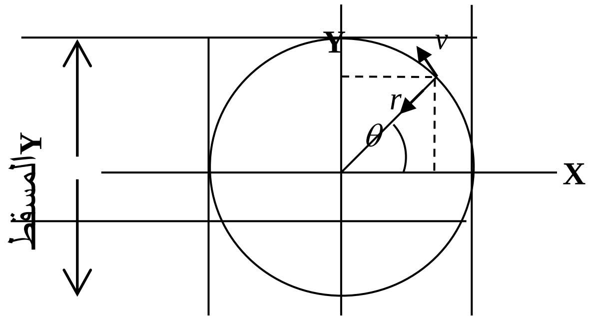
بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة يتوقع منك أن تكون قادراً علي أن:

١. تعرف الحركة التوافقية البسيطة.
٢. توجد مقدار قوة الإعادة في الزنبرك.
٣. تستنبط معادلة الحركة التوافقية البسيطة في الاتجاهين الرأسي والأفقي.
٤. تتقن طرق الحل البسيط لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة.
٥. توجد الحلول المركبة لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة.
٦. تحل مسائل وتمارين علي الحركة التوافقية البسيطة.

1.2.تعريف الحركة التوافقية البسيطة

عزيزي الدارس

عرفنا في الوحدة الأولي أن الحركة التوافقية البسيطة (الزنبرك أو غيره) تماثل تماماً مساقط الحركة الدائرية التي لها نفس الزمن الدوري T والتي لها اتساع A يساوي نصف قطر الدائرة r



الشكل(١-٢): مساقط الحركة الدائرية

وفي الواقع يمكن أخذ مسقط الحركة الدائرية في ي . ر ن جرى العرف علي أخذ المساقط علي الأحداثيين المتعامدين X , Y ، ونجد إن حركة الكتلة المثبتة في نهاية زنبرك يمكن أن تكون في أي من هذين المستويين الأفقي والرأسي، وعموماً أي حركة دائرية يكن اعتبارها مكونة من حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس الاتساع ونفس التردد وسنرى ذلك لاحقاً عند جمع الاهتزازات في (الوحدة الرابعة) حيث نحصل علي دائرة في جمع اهتزازتين متعامدتين (بينهما فرق طور مقداره ۹۰ْ). لنفس السبب فان أي حركة توافقية رأسية يمكن اعتبارها حركة توافقية افقية بإضافة فرق طور مقداره ۹۰ْ.

الجدول التالي يوضح الإزاحة والسرعة والتسارع في الحركة التوافقية البسيطة في المستويين الأفقي والرأسي والتي حصلنا علي بعضها في الوحدة الأولى ويمكن استنتاج a_x , v_x بتفاضل x , v_x بالزمن.

جدول (١-٢)

الكميــــة الفيزيائية	الحركة التوافقية البسيطة الأفقية (على المحور X)	الحركة التوافقية البسيطة الرأسية (على المحور Y)
الإزاحة	$x = A\cos(\omega t)$ (١٧-١)	$y = A\sin(\omega t)$ (١٦-١)
السرعة	$v_X = -\omega A\sin(\omega t)$ (١-٢)	$v_Y = \omega A\cos(\omega t)$ (١٨-١)
التسارع	$a_x = -\omega^2 A\cos(\omega t)$ (٢-٢)	$a_y = -\omega^2 A\sin(\omega t)$ (٢١-١)

عزيزي الدارس،،

بدأنا في الوحدة الأولى بتحليل الحركة التوافقية البسيطة الرأسية لكتلة معلقة في زنبرك لأنها الأقرب إلي الفهم ويمكن مشاهدتها في تجربة. ولكن الكتب الدراسية عن الاهتزازات عادة ما تركز علي الحركة التوافقية البسيطة الأفقية (على المحور X) لأن العادة جرت علي البدء بـ x ، كما نحن في الرموز العربية نبدأ بـالإحداثي السيني س.

ومن الجدول (١-٢) نجد أن

الازاحة في الاتجاهين الافقي والراسي هي:

$$x = A\cos(\omega t) \qquad y = A\sin(\omega t)$$

وبتفاضل الازاحة بالنسبة للزمن تحصلنا علي السرعة وهي المعادلة (١-٢)

$$v_X = -\omega A\sin(\omega t) \qquad v_Y = \omega A\cos(\omega t) \qquad (١-٢)$$

ثم وبتفاضل السرعة في المعادلات (١-٢) بالنسبة للزمن نتحصل علي التسارع:

- اولا: في الحركة التوافقية البسيطة الأفقية

$$\boxed{a_x = -\omega^2 A\cos(\omega t) = -\omega^2 x} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢-٢)$$

- ثانيا: وفي الحركة التوافقية الرأسية

$$\boxed{a_y = -\omega^2 A\sin(\omega t) = -\omega^2 y} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣-٢)$$

من المعادلتين (٢-٢) و (٣-٢) نجد أن التسارع في الحالتين الأفقية والرأسية يتناسب مع سالب الإزاحة. ومن هنا جاء التعريف المعتمد للحركة التوافقية البسيطة والذي يميزها عن كل الحركات الإهتزازية الأخرى .

الحركة التوافقية البسيطة:

هي الحركة التي يكون فيها التسارع يتناسب طردياً مع سالب الإزاحة (المسافة) من نقطة ثابتة (مستوى الإتزان مثلاً) ويكون هذا التسارع دائماً متجهاً إلي هذه النقطة .

وم... كة
توا... ت
حركة توافقية بسيطة ١٠٠%.

واضح من المعادلتين (٢-٢) و (٣-٢) أن ثابت التناسب هو مربع التردد الزاوي أي (ω^2) حيث

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = 4\pi^2 f^2$$

وعلي هذا فقيمة التسارع في أي حركة توافقية بسيطة في أي إتجاه هي (الإزاحة)

$$\boxed{a = -\omega^2 \times (\text{الإزاحة}) = -4\pi^2 f^2 \times (\text{الإزاحة})}$$ ....(٢-٤)

أي أن قيمة التسارع تتوقف فقط علي:

- اولا: مقدار الإزاحة
- ثانيا: مربع التردد

أي مقلوب مربع الزمن الدوري للحركة التوافقية البسيطة وهو قيمة ثابتة وبالتالي فالإزاحة هي المتغير الوحيد الذي يعتمد عليه التسارع

٢.٢ معادلة الحركة التوافقية البسيطة

عزيزي الدارس،،

ان القوة في الحركة التوافقية البسيطة يمكن الحصول عليها من المعادلتين (٢-٢) و (٣-٢) حيث:

القوة = الكتلة ×التسارع

$$F = m a$$

$$\boxed{F_x = m a_x = -m\omega^2 x}$$ .... (٢-٥أ)

$$\boxed{F_y = m a_y = -m\omega^2 y}$$ .... (٢-٥ب)

حيث نجد ان:

- القوة تساوي الصفر عند موضع اتزان الجسم المهتز (الإزاحة = صفر)حيث لا شد أو مط في الزنبرك
- تأخذ القوة أقصى قيمة لها عندما تكون الإزاحة مساوية للإتساع A حيث أقصى شد أو اقصى مط ولذلك فهي في عكس اتجاه الزيادة في الإزاحة (وهي طبعاً نفس خواص التسارع).

من المعادلتين (٥-٢) يمكن كتابة معادلة الحركة التوافقية البسيطة أي

$$\boxed{a_x + \omega^2 \ x = 0} \qquad \text{(٢- ٦أ)}$$

$$\boxed{a_y + \omega^2 \ y = 0} \qquad \text{(٢-٦ ب)}$$

ولكن التسارع هو تفاضل الإزاحة بالنسبة للزمن مرتين، أي:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \qquad \text{(٢-٧أ)}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \qquad \text{(٢-٧ب)}$$

المعادلتان (٢-٧) هي معادلات الحركة التوافقية البسيطة في الاتجاهين الأفقي والرأسي . وهي معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية حيث المتغيرين الوحيدين في المعادلتين هو الإزاحة x والإزاحة y فقط و في الحالتين فإن الإزاحة هي دالة متغيرة مع الزمن t فقط.

أسئلة تقويم ذاتى

؟

١. فسر لماذا يمكن اعتبار أي حركة دائرية مكونة من حركتين توافقيتين؟
٢. ما هي الحركة التوافقية البسيطة؟
٣. متي تكون القوة في الحركة التوافقية البسيطة= صفر؟
٤. برهن باستعمال المعادلتين (٢-٢) و (١-٢١) في الجدول (١-٢) لتسارع الحركتين التوافقيتين الأفقية والرأسية أنه يمكن الحصول علي التسارع المركزي a_r للحركة الدائرية (المعادلة (١-١٣)).

.2
عز

- أول هذه الحلول كنا قد حصلنا عليها في الوحدة الأولي وهما المعادلتان (١-١٦) و(١-١٧) والموجودتان أيضاً في هذه الوحدة في الجدول (١-٢)
- ولكن المعادلتين (٢-٧) هي معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية وأي معادلة في هذه الرتبة لابد أن يحتوي حلها علي ثابتين اعتباطيين **arbitrary constants** بينما

يحتوي الحل الذي حصلنا عليه سابقا علي ثابت اعتباطي واحد هو الاتساع A (لاحظ أن التردد الزاوي للحركة التوافقية ω ليس بثابت اعتباطي بينما الاتساع A يمكن أن يكون أي قيمة لأنه هو مقدار جذبنا للزنبرك من مستوى الاتزان). أي أن الثابت في الحلين (١٦-١) أو (١٧-١) واحد هو A.

من الآن فصاعداً, عزيزي الدارس, سنركز علي حل معادلة الحركة التوافقية الأفقية (X) أسوة ببقية الكتب في هذا المجال وطبعاً أي حل أو حلول نحصل عليها يمكن تعميمها علي y .

٢,٣ . ١ .حل معادل الحركة التوافقية البسيطة بإستعمال الدوال المثلثية Trigonometric functions

عزيزي الدارس،،

من المعادلة (٧-٢ أ) $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

نجد ان:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} \propto x}$$ .... (٨-٢)

واضح من هذا التناسب أن x يمكن أن تكون أي دالة في الزمن يتناسب معها تفاضلها باالنسبة للزمن مرتين:

اولاً: ا حد هذه الدوال حصلنا عليها سابقاً وهو

(ωt) x = A cos (١٧-١)

ومن (٢-٢) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t)$$

ولكن أيضاً

$$\boxed{x = B\ \sin\ (\omega t)}$$ .... (٩-٢)

هي حل للمعادلة (٧-٢أ) حيث

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 B\sin(\omega t)}$$ ....(١٠-٢)

ولكن لماذا الاتساع هنا B وليس A؟

وبناءاً على ما سبق الحل الكامل للمعادلة (٧-٢)أ التي هي من الرتبة الثانية يحتوي علي ثابتين اعتباطيين, نحصل عليه بجمع الحل (١٧-١) مع الحل (٩-٢) أي

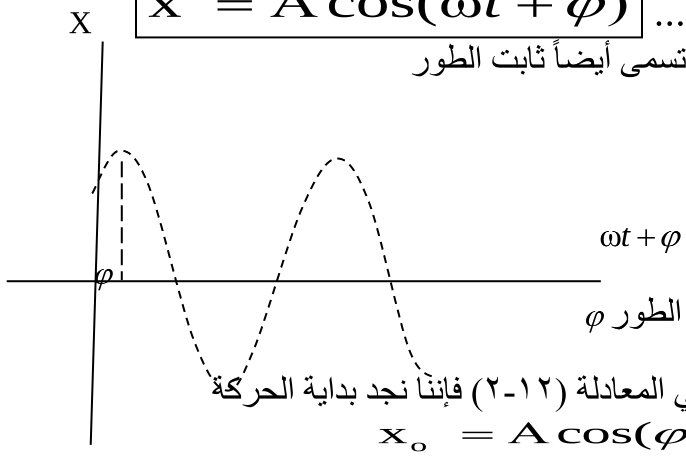
$$\boxed{x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$$ .... (١١-٢)

وهو الحل العام للمعادلة (٧-٢أ).

ثانياً: الحل الثاني الذي يستوفي وجود ثابتين اعتباطيين هو:

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)} \quad \text{..........................} \quad (١٢-٢)$$

حيث (φ) هو زاوية الطور أو تسمى أيضاً ثابت الطور



الشكل (٢-٢)زاوية الطور φ

عزيزي الدارس

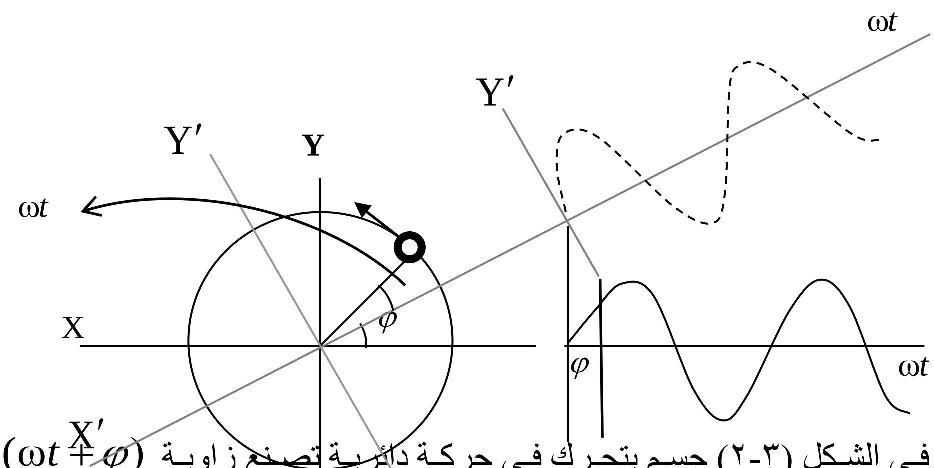
عندما تكون t = صفر في المعادلة (١٢-٢) فإننا نجد بداية الحركة

$$x_o = A\cos(\varphi)$$

وبالرغم من أن زاوية الطور (φ) هي عبارة عن زاوية يمكن اختيارها اعتباطياً أو لأسباب معينة بحيث يمكن بعدها متابعة تغير الحركة التوافقية البسيطة مع الزمن (ωt) , إلا أن أحد أسباب وجود هذه الزاوية يمكن فهمه إذا تتبعنا الحل المناسب للحركة التوافقية البسيطة الرأسية أي.

$$\boxed{y = A\sin(\omega t + \varphi)} \quad \text{..........................} \quad (١٣-٢)$$

هذا الحل موضح في الشكل (٣-٢) {هذا الحل يمكن توضيحه من خلال الرسم بصورة أكثر من رسم الحل (١٢-٢)}



في الشكل (٣-٢) جسم يتحرك في حركة دائرية تصنع زاوية ($\omega t + \varphi$) مع الإحداثي X وبالتالي مسقط الحركة الدائرية علي الإحداثي Y هو الحركة التوافقية البسيطة

الشكل (٣-٢):مساقط الحركة التوافقية البسيطة بزاوية طور φ وبدونها

حسب المعادلة (٢-١٣). ولكن في الشكل إذا أخذنا في الاعتبار الزاوية (φ) نجد أنه يمكننا رسم أحداثيات جديدة x' و y' عمودية علي بعضها وتصنع زاوية (φ) مع الإحداثيات x و y هذه العملية تلغى تلقائياً زاوية الطور (φ) في الإحداثيات الجديدة x' و y' ويصبح مسقط الحركة الدائرية في الاتجاه الراسي الجديد y' هو

$$\boxed{y' = A\sin(\omega t)} \quad \text{..................................}(٢-١٤)$$

بينما يظل المسقط y كما في المعادلة (٢-١٣) وبالتالي يمكن استنتاج أن وجود زاوية الطور (φ) يعني وجود مسقط آخر للحركة يصنع زاوية (φ) مع الإحداثيات التقليدية x و y.

عزيزي الدارس.

نعود الآن مرة أخرى للمعادلة (٢-١٢) حيث نلاحظ من حساب المثلثات أن :

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) =$$

$$= A\cos(\varphi)\cos(\omega t) - A\sin(\varphi)\sin(\omega t) =$$

$$\boxed{x = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)} \quad \text{..................................}(٢-١٥)$$

حيث a ,b كالآتي:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= A\cos(\varphi) \\ b &= A\sin(\varphi) \end{aligned}} \quad \text{..................................}(٢-١٦)$$

وهي ثوابت جديدة حيث نجد أن

$$a^2 + b^2 = A^2\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = A^2$$

أي أن:

$$\boxed{A = \sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{..................................}(٢-١٧)$$

واضح أن الثابتين الاعتباطيين الجديدين a و b تحدد قيمتهما من الثابتين الاعتباطيين A و φ وبالتالي فإن المعادلة (٢-١٥) هي حل عام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة (٢-٧)أ تماماً كالمعادلة (٢-١٢).

تدريب (1)

١. من المعادلة $y' = A\sin(\omega t)$

وضح كيف يمكن تحويل y' إلي y للحصول علي المعادلة (٢-١٣)؟

٢. أوجد الثابتين الاعتباطيين b,a للحركة التوافقية البسيطة الرأسية من المعادلة(٢-١٣).

أسئلة تقويم ذاتي

؟

١. مستعيناً بحركة دائرية حول دائرة ارسم الثابتين الجديدين b,a حيث

$$a = A\cos(\varphi)$$

$$b = A\sin(\varphi)$$

٢.برهن أن المعادلة الاتية

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

هي حل لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

٢,٣ ... الأسيه

(Exponential function)

عزيزي الدارس,

ذكرنا من قبل أن أي دالة يتناسب تفاضلها مرتين بالنسبة للزمن مع الدالة نفسها تشكل مع الثوابت الاعتباطية حلاً لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة لأن:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \propto x \qquad (٨-٢)$$

حيث معادلة الحركة التوافقية البسيطة هي :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (٢-٧ أ)$$

ووجدنا أن الدوال المثلثية cos , sin ينطبق عليها هذا الشرط وأيضاً ينطبق علي الدالة الأسية (e^t). نفرض أن

$$\boxed{x = A\, e^{pt}} \quad ....(٢-١٨)$$

حيث A= ثابت و e هي الدالة الأسية حيث $e^1 = 2.718$.

من (٢-١٨) نحصل علي

$$\frac{dx}{dt} = pA\, e^{pt}$$

وبالتفاضل مرة أخرى:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = p^2 A\, e^{pt} = p^2 x}$$ ....(٢-١٩)

وبوضع (٢-١٩) في معادلة الحركة التوافقية البسيطة (٢-٧)أ نحصل علي

$$p^2 x + \omega^2 x = 0$$

أي

$$p^2 = -\omega^2$$

ومنها نحصل على

$$p^2 = \pm i\omega$$

حيث $i = \sqrt{-1}$ ومنها ومن (٢-١٨) نحصل علي الحل:

$$\boxed{x = Ae^{\pm i\omega t}}$$ ....(٢-٢٠)

أي أن أيّ من الحلين $Ae^{+i\omega t}$ أو $Ae^{-i\omega t}$ هو حل لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة وأن مجموع الحلين هو أيضاً حل لهذه المعادلة.

لاحظ, عزيزي الدارس, أنه بالرغم من افتراضنا أن p في الحل (٢-١٨)هو عدد حقيقي، إلا أننا حصلنا في المعادلة (٢-٢٠) علي أس مركب أي $\pm i\omega t$. والسبب في ذلك أن الدالة $e^{\pm pt}$ حيث p عدد حقيقي هي دالة تزايدية أو تناقصية حسب العلامة قبلها وليست دالة دورية وهي حل للمعادلات الفيزيائية من الرتبة الأولي. أما الدالة ذات الأس المركب كما في (٢-٢٠) فهي دالة دورية لأنها مرتبطة بالدوال المثلثية بالعلاقات :

$$\boxed{e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\ \sin(\omega t)}$$ .... (٢-٢١ أ)

$$\boxed{e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\ \sin(\omega t)}$$ ....(٢-٢١ ب)

وهي علاقات يولر Euler الشهيرة التي استنتجها في عام ١٧٤٨ (أنظر الملحق) واربط بها بين الجبر والهندسة.

عزيزي الدارس، الآن نفترض أن الحل هو:

$$x = Ae^{i\omega t}$$

$$\boxed{\therefore\ x = A\cos(\omega t) + i\ A\sin(\omega t)}$$ ....(٢-٢٢)

واضح أن:

- الحل هو الجزء الحقيقي $A\cos(\omega t)$ وهو الحل (١-١٧) الذي حصلنا عليه سابقاً للحركة التوافقية البسيطة الأفقية
- أما الجزء الخيالي $A\sin(\omega t)$ (لأنه مضروب في i) فهو الحل (١-١٦) للحركة التوافقية البسيطة الرأسية أي Y.

وفـي الواقـع تمثـل المعادلـة (٢٢-٢) مسـاقط الحركـة الدائريـة الاثنـين حيـث الحركـة علـى المسقط X هي الحركة الحقيقية, ولكن تصـاحبه حركـة خياليـة علـي المسـقط y أي عموديـة علي X. ويتضح ذلك جلياً إذا علمنا أن i دائماً تشير إلـي أن هـذا الجـزء الخيـالي بينـه وبـين الجزء الحقيقي زاوية طور مقدارها $\frac{\pi}{2}$ (90^{o}) أي أن مساقط الحركـة الدائريـة لا زالـت تلقـي بظلالهـا علـي الحركـة التوافقيـة حسـب المعادلـة (٢٢-٢) ولكـن هـذه المـرة توضـح مـاهو المسقط الحقيقي وما هو الخيالي .

الحل المركب الثاني:

$$x = Ae^{-i\omega t} = A\cos(\omega t) - i\ A\sin(\omega t)$$

حيث لا زال الحل الحقيقي كما هو بينما عكس الحل الخيالي اتجاهه ولكنه يظل عمودياً علي الحقيقي. نفترض الآن أن الحل العام هو مع الأخذ في الاعتبـار ضـرورة وجـود ثـابتين اعتباطيين

$$\boxed{x = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}} \quad \text{.............................} \ (\text{٢٣-٢})$$

$$\therefore\ x = (c_1 + c_2)\cos(\omega t) + i(c_1 - c_2)\ \sin(\omega t)$$

حيث (c_1) و (c_2) ثوابت اعتباطية تمثل اتساعات فإذا كانت

$c_1 = c_2$ و $A = c_1 + c_2$ نجد أن

$$x = A\cos(\omega t)$$

وهو نفس الحل السابق حيث اختفى الجزء الخيالي ولكن الحل (٢٣-٢) هو الحل الصحيح للمعادلة لوجود الثابتين . بنفس الطريقة نجد أن الحل بوجود زاوية الطور (φ) هو :

$$\boxed{x = c_1 e^{i(\omega t+\varphi)} + c_2 e^{-i(\omega t+\varphi)}} \text{..........................} \ (\text{٢٤-٢})$$

وبنفس الطريقة السابقة سنجد أنه يؤدي إلي الحل الحقيقي

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

تدريب (٢)

باستخدام الدالة الاسية اوجد حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة.

أسئلة تقويم ذاتي

١. ماذا تعني هذه المعادلة للحركة التوافقية

$$\therefore \quad x = A\cos(\omega t) + i\ A\sin(\omega t)$$

٢. ناقش : كل حلول معادلة الحركة التوافقية البسيطة المثلثية والأسية والتي تحتوي علي زاوية الطور (φ) هي في النهاية

$$x = A\cos(\omega t)$$

٣. برهن أن $x = Ae^{i(\omega t+\varphi)} = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ شبيهةٌ بالتي في المعادلة (٢-١٦) b و a

٢ ...

ع...

أن الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة للزنبرك هي طاقة ميكانيكية أي

الطاقة الكلية = الطاقة الحركية + طاقة الوضع

$$E = E_k + E_p \qquad \text{..........................(٢-٢٥)}$$

- طاقة الوضع E_p في الزنبرك تنتج من ش... مستوى الاتزان ولذلك يكون في حالة توتر مختزناً طاقة لا يتخلص منها إلا بالعودة إلي مستوي الاتزان وهو الموضع الذي لا يكون مختزناً فيه طاقة.
- أما الطاقة الحركية فهي المعروفة لنا جيداً أي:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{.................... (٢-٢٦)}$$

أي أن الطاقة تتناسب مع مربع السرعة وثابت التناسب هو نصف الكتلة, أما السرعة فيمكن الحصول عليها من الإزاحة, حيث

$$x = A\cos(\omega t) \qquad \text{............................(١-١٧)}$$

ومنها

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\omega t \qquad \text{............................(٢-١)}$$

لقد عرفنا من قبل أن الطاقة الكلية عند أقصى إزاحة (أي الاتساع A) تكون طاقة وضع فقط لأن الزنبرك يكون في حالة شد أو في حالة ضغط وتصبح السرعة عندها صفراً حيث تغير الحركة اتجاهها تحت تأثير قوة إعادة الزنبرك, بينما تكون كل الطاقة حركية عند مستوي الاتزان أي x = صفر. وعليه فإن أقصي سرعة تحدث عند تكون $\sin(\omega t) = 1$ في المعادلة (٢-١)، أي عندما $(\omega t) = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{v_m = -\omega A}$$ .... (٢-٢٧)

إذاً أقصى طاقة حركية هي:

$$\boxed{E_{km} = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2}$$ ....(٢-٢٨)

هذه الطاقة الحركية عند مستوي الاتزان تساوي الطاقة الكلية أي :

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2}$$ .... (٢-٢٩)

وعليه بتعويض المعادلتين (٢-٢٦) و (٢-٢٩) في (٢-٢٥) نحصل علي

$$\boxed{\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + E_p}$$ .... (٢-٣٠)

ومن (٢-١)

$$\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) + E_p$$

أي أن $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \left(1 - \sin^2(\omega t)\right)$

$$\therefore \; E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t)$$

وبالتالي من (١-١٧) نحصل علي

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 \; x^2}$$ ....(٢-٣١)

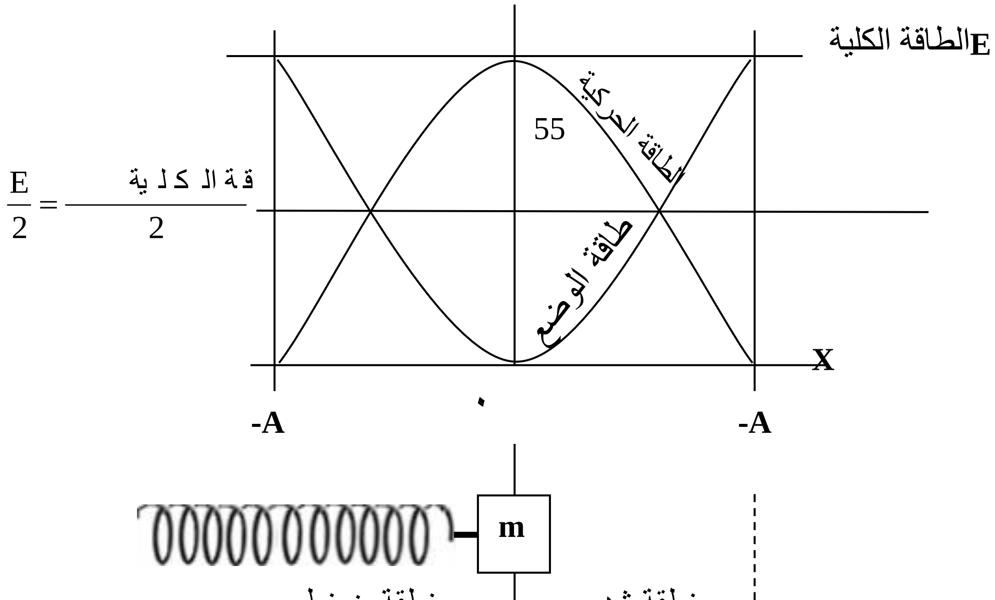
هذه المعادلة الهامة توضح أن طاقة الوضع تساوي الصفر عند مستوي الاتزان (x = صفر) كما المتوقع لأن الزمبرك لبس في حالة شد أو ضغط. أما أقصي طاقة وضع فتكون عند أقصي ازاحة x =A أي :

$$E_{pm} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

وهي تساوي الطاقة الكلية كما في (٢-٢٩). وبتعويض (٢-٣١) في (٢-٣٠) نحصل علي معادلة الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة أي :

$$\boxed{\frac{1}{2} m\omega^2 \; A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \; x^2}$$ ....(٢-٣٢)

المعادلة (٢-٣٢) موضحة في الشكل (٢-٤)



الشكل (٤-٢) يوضح أن طاقة الوضع والطاقة الحركية تتبادل عند تحرك الزنبرك فعند $x = \pm A$ تصبح الطاقة كلها طاقة وضع بينما عند X = صفر تصبح الطاقة كلها طاقة حركة

عزيزي الدارس،،

المعادلة (٢٩-٢) توضح أن الطاقة الكلية

$$E \propto \omega^2 A^2$$

ولكن $\omega = 2\pi f$ حيث f هو التردد وعليه

$$\boxed{E \propto f^2 A^2} \quad \text{............................} \quad (٣٣\text{-}٢)$$

هذا القانون هام جداً في فيزياء الاهتزازات ويوضح أن الطاقة الكلية تكبر كلما زاد التردد وكلما زاد الاتساع وهذه تميزالاهتزازات عالية التردد على الاهتزازات منخفضة التردد.

عزيزي الدارس،،

من معادلة الطاقة (٣٢-٢) نجد أن نصف الكتلة $\left(\frac{1}{2}m\right)$ مشترك ولذلك

$$\boxed{\omega^2 A^2 = v^2 + \omega^2 x^2} \quad \text{................................} \quad (٣٤\text{-}٢)$$

هذه المعادلة لا زالت هي معادلة الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة ولكنها مستقلة عن الكتلة m. من المعادلة (٣٤-٢) نحصل على السرعة :

$$\boxed{v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}} \quad \text{................................} \quad (٣٥\text{-}٢)$$

فالسرعة تتوقف فقط علي التردد الزاوي للحركة واتساعها وازاحتها. وهذه المعادلة توضح أيضا لماذا تحدث اقصى سرعة عند x = صفر بينما تصبح السرعة صفراً عندما تكون $x = \pm A$.

مثال

جسم كتلته 0.1 kg معلق في زنبرك يتحرك في حركة توافقية بسيطة ترددها 3 Hz واتساعها 0.1 m أوجد

أ} الطاقة الكلية للحركة ب} السرعة القصوى للحركة

الحل :

أ} التردد الزاوي $\omega = 2\pi f = 6\pi$

الطاقة الكلية $E = \frac{1}{2} m\omega^2 A$

$$= \frac{1}{2} \times 0.1 \times 36\pi^2 \times 0.01 = 0.17 \ \ J$$

ب} السرعة $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

السرعة القصوى (x = 0)

$$v = \omega A = 6\pi \times 0.1 = 1.88 \ m/s$$

تدريب (٣)

١. عند إزاحةٍ ما $\pm x$ تتساوي طاقة الوضع والطاقة الحركية حسب الشكل (٤-٢) وفي نفس الوقت كل منها تساوي نصف الطاقة الكلية ، حدد هذه القيمة.

٢. جسم كتلته 0.1 kg معلق في زنبرك يتحرك في حركة توافقية بسيطة ترددها 3 Hz واتساعها(الازاحة) 0.6 m أوجد

- (أ)طاقة الوضع والطاقة الحركية والطاقة الكلية عندما تكون الإزاحة (x = 0.06 m)
- ب} السرعة القصوى للحركة

أس

١. باستخدام الرسم فقط وضح تغير طاقة الوضع والطاقة الحركية مع الإزاحة x

٢. أشرح بكلماتك الخاصة كيف تتحول الطاقة الناتجة عن الحركة (القصور الذاتي) إلي طاقة وضع.

٢. جسم كتلته ٢.2 kg معلق في زنبرك يتحرك في حركة توافقية بسيطة ترددها 4 Hz واتساعها ½ m أوجد

أ} الطاقة الكلية للحركة ب} السرعة القصوى للحركة

الخلاصة

عزيزي الدارس,

في النهاية، نؤكد على ما أكدنا عليه في التمهيد عن ضرورة تقويم هذه الوحدة، وإبداء ملاحظاتك للاستفادة منها. ولكن ما الذي ناقشناه ؟

لقد بحثنا في هذه الوحدة عن الحركة التوافقية البسيطة اولا عرفنا ما هي الحركة التوافقية البسيطة بانها الحركة التي يكون فيها التسارع يتناسب تناسبا طردياً مع سالب الإزاحة (المسافة) من نقطة ثابتة (مستوى الإتزان مثلاً) ويكون هذا التسارع دائماً متجهاً إلي هذه النقطة " ، وان الإزاحة والسرعةو التسارع في الاتجاه الأفقي والراسي تعطي بالمعادلات التالية علي الترتيب

$$\mathbf{x = A\cos}\,(\omega t) \qquad \mathbf{y = A\sin}\,(\omega t)$$

$$\mathbf{v_X = -\omega A\sin}\,(\omega t) \qquad \mathbf{v_Y = \omega A\cos}\,(\omega t)$$

$$a_x = -\omega^2 A\cos(\omega t) = -\,\omega^2 x \quad ، \quad a_y = -\omega^2 A\sin(\omega t) = -\,\omega^2 y$$

ومعادلة الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة.

$$\frac{1}{2}m\omega^2\ A^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\ x^2$$

ومع نهاية هذا الجزء نكون قد انهينا هذه الوحدة، ونأمل أنها أضافت إلى معلوماتك الثرة و أتمنى لك التوفيق. وان تسعد بالوحدة القادمة إنشاء الله.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية القادمة

عزيزي الدارس،

في الوحدة القادمة سندرس الأنظمة المهتزة نتعرف خلالها علي بعض الاهتزازات الميكانيكية حيث نتعرف على القوى المسببة للحركة التوافقية للزنبرك وللبندول البسيط وللماء في أنبوب على شكل U ولجسم يطفو فوق الماء, وفي كل هذه الحالات سنستنتج التردد الزاوي والزمن الدوري

نأمل أن تكون وحدة مفيدة لك

إجابات التدريبات

التدريب (١)

١. الحل داخل الوحدة
٢. الحل داخل الوحدة

التدريب (٢)

٣. الحل داخل الوحدة

التدريب (٣)

١. الحل داخل الوحدة $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$

٢. اولا: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 0.1135\ J\ ,\ E_p = 0.06395\ J\ ,\ E_T = 0.17745\ J$

ثانيا:السرعة القصوي عند المسافة =٠

$$\omega\sqrt{A^2 - x^2} = v = ٢\pi \times ٠,٧٧٥ = ١,٥٤٠ \times ٢\pi$$

مسرد المصطلحات

عزيزي الدارس،

فيما يلي قائمة بمعاني المصطلحات الواردة في الوحدة باللغة الإنجليزية، كي نسهل عليك الرجوع إلى أي مراجع أجنبية، أو البحث عبر شبكة الإنترنت،

معادلة الحركة التوافقية البسيطة	Simple Harmonic Motion Equation
ثابت اعتباطي	arbitrary constants
الدوال المثلثية	Trigonometric functions
الدالة الأسية	Exponential function

محتويات الوحدة الثالثة

تمهيد
مقدمة

عزيزي الدارس،،

مرحباً بك إلى الوحدة الثالثة من هذا المقرر وهي بعنوان الأنظمة المهتزة و تتألف من قسمين رئيسين. القسم الأول يتالف من جزئين ، حيث نتعرف خلاله الجزء الأول علي القوة المسببة للحركة التوافقية البسيطة للزنبرك وعلاقتها بقانون هوك. ثم ننتقل الي حساب الطاقة في الزنبرك وايجاد السرعة الزاوية والزمن الدوري ، كما نتعرف على القوانين التي تحكم توصيل الزنبركات على التوالي وعلى التوازي . واخيرا نتعرف ونبحث في مفهوم الإجهاد والقص في الأسلاك والعلاقة بينهما و منها نتحصل علي معامل يونق Young.اما الجزء الثاني فنتعرف

علي حركة البندول البسيط وكيفية ايجاد القوة والتردد الزواي والزمن الدوري لهذا البندول ومقارنة ذلك بالحركة التوافقية البسيطة.

أما القسم الثاني فيتضمن اهتزازات الأجسام الطافية وكذلك اهتزازات الدائرة الكهربية المكونة من ملف ومكثف وهذه الاهتزازات لها أهمية في الدوائر الالكترونية.

وفي الختام ذيلنا هذه الوحدة بسرد شامل للمصطلحات العلمية التي وردت في النص الرئيسي، وقد حرصنا في هذه الوحدة على معرفة العلاقات الرياضية، مع تقديم أمثلة ، وأنشطة وأسئلة تقويم ذاتي، وتدريبات كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية.

عزيزي الدارس ،،

أهلاً بك مرة أخري إلي هذه الوحدة ونرجو أن تستمتع بدراستها وأن تستفيد منها وأن تشاركنا في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة

✔

عزيزي الدارس بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة يتوقع منك أن تكون قادراً علي أن:

١. تستوعب مفهوم الأنظمة المهتزة.
٢. تتعرف علي عدد من الاهتزازات الميكانيكية.
٣. تشرح القوة المسببة للحركة التوافقية البسيطة للزنبرك ثم علاقتها بقانون هوك.
٤. توضح كل من الإجهاد والقص في الأسلاك وعلاقتهما بمعامل يونق وعلاقته باهتزازة سلك معلقة به كتلة
٥. توضح حركة البندول البسيط و كيفية ايجاد القوة والتردد الزواي والزمن الدوري ومقارنتها بالحركة التوافقية البسيطة.
٦. تتعرف على اهتزازات الاجسام الطافية كالقوارب والسفن.
٧. تذكر بعض التطبيقات للأمثلة السابقة الذكر.
٨. تحل معظم التمارين.

3.الاهتزازات الميكانيكية

عزيزي الدارس،،

في هذه الوحدة سوف نستعرض بعض الاهتزازات الميكانيكية ونتعرف علي بعض المفاهيم الفيزيائية من أجل فهم أوسع لهذه الاهتزازات المتنوعة والتي كلها تعتبر حركات توافقية بسيطة .

1.3. اهتزاز الأسلاك النابضة (الزنبركية)

1.1.3.القوة المسببة للحركة التوافقية البسيطة للزنبرك

عزيزي الدارس،،

لقد عرفنا الكثير عن حركة الزنبرك التوافقية البسيطة سواء كانت الحركة رأسية أو الحركة الأفقية. وقد استنتجنا معادلة الحركة التوافقية البسيطة من مساقط الحركة الدائرية الرأسية والأفقية والتي تماثل حركة البندول الزنبركي الرأسية والأفقية. ثم تحدثنا عن الطاقة المخزونة في الزنبرك الناتجة عن مط الزنبرك مسافة من موضع الاتزان أو ضغطه مسافة عن وضع الاتزان, وقلنا أن هذه الطاقة هي طاقة وضع, وأن قانونها هو:

$$E_P = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

وان قيمتها القصوى هي الطاقة الكلية للحركة التوافقية البسيطة:

$$E = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 \ .$$

حيث x الإزاحة وA الاتساع.

عزيزي الدارس،،

لقد تحدثنا عرضاً عن القوة المؤثرة على الحركة التوافقية البسيطة للزنبرك و قد استنتجنا أن التسارع في الحركة التوافقية البسيطة يتناسب مع سالب الإزاحة وذلك في المعادلات **(٢-٢) و(٣-٢)** حيث وجدنا أن

$$a_x = -\omega^2 x$$
$$a_y = -\omega^2 y$$

حيث: a_x هي التسارع في اتجاه الافقي x و a_y هو التسارع في الاتجاه الرأسي y

هذه العلاقات هي التي استنسجنا منها تعريف الحركة التوافقية البسيطة. الآن سنبحث في القوة التي تسبب الحركة التوافقية البسيطة. فإذا افترضنا أن الحركة أفقية فان القوة تكون في اتجاه x

$\therefore$ .... $\boxed{F_x = m\ a_x}$

وعليه:

(٣-٢) .... $\boxed{F_x = -m\omega^2 x}$.

حيث علامة السالب تعني أن القوة في عكس اتجاه الحركة (عكس اتجاه الزيادة في الإزاحة) مما يؤدي إلى توقف الحركة، ثم عكس اتجاهها عندما تصبح الإزاحة x تساوي الاتساع A أي عموماً :

$F \propto -x$ ....

أسئلة تقويم ذاتي

عزيزي الدارس،

١. وضح أن التسارع في الحركة التوافقية البسيطة يتناسب مع سالب الإزاحة .

٢. اثبت المعادلات التالية:

$$a_x = -\omega^2 x$$
$$a_y = -\omega^2 y$$

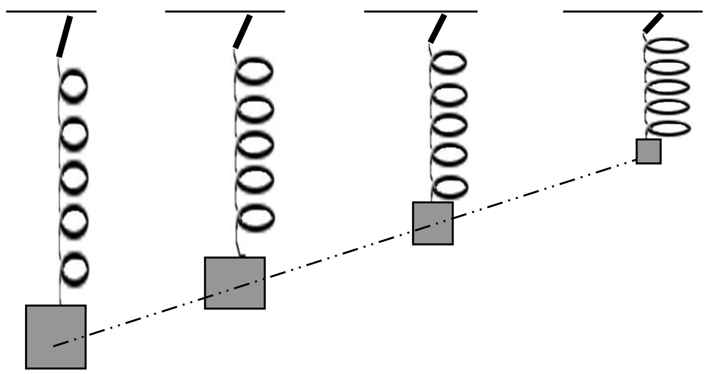
٣. اثبت ان القوة هي: $F_x = -m\omega^2 x$

3..١ ٢.ا ... ها
بقانون هوك

أولا: قانون هوك Hook's Law

عزيزي الدارس،،
لقد درسنا قانون هوك Hook's Law في الفيزياء العامة(1) وهو ينص على أن :

الزيادة في طول سلك أوزنبرك تتناسب مع القوة المسببة لهذه الزيادة



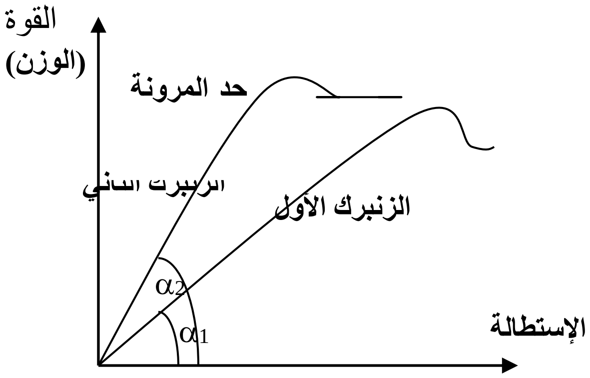
الشكل (١-٣):الزيادة في طول الزنبرك تتناسب مع مقدار الوزن المعلق به

إذا أخذنا زنبركان احدهما أكثر مرونة من الآخر وعلقنا كفة ميزان في كل زنبرك وحددنا طول كل واحد منهما بدقة, وضعنا مسطرة قياس موازية لكل واحد منهما , فسيكون كل زنبرك في طوله الطبيعي بعد إضافة كفة الميزان وسيشير المؤشر المربوط في كل منهما إلى موضع اتزان الزنبرك.

الآن, إذا بدأنا وضع أوزان معلومة في كل كفة, وسجلنا الزيادة في طول كل زنبرك, فسنجد أن هناك علاقة خطية بين الزيادة في الطول و الزيادة في الوزن لكل زنبرك، بحيث يمكننا في كل مرة أن نتوقع مقدار الزيادة إذا علمنا مقدار الوزن المضاف. ومع ذلك سنلاحظ إن مقدار الزيادة في طول الزنبرك الأول في كل مرة أكبر من الزيادة في طول الزنبرك الثاني لنفس الزيادة في الأوزان المضافة لأن الزنبرك الأول كما قلنا أكثر مرونة من الزنبرك الثاني.

ولكن هذا التناسب بين الزيادة في الطول والزيادة في الوزن لا يستمر إلى مالا نهاية وإنما سنصل إلى نقطة تصبح بعدها الزيادة في الطول لا تتناسب مع الزيادة في الوزن.

وعليه عزيزي الدارس, يمكن ببساطة رسم العلاقة بين القوة والاستطالة لكل زنبرك كما في الشكل (٢-٣). ونلاحظ أنه في حالتي الزنبركين تكون العلاقة خطية بين القوة والاستطالة حتى نقطة معينه تسمى حد التناسب proportionality limit وتسمى هذه النقطة أيضا بحد المرونة Elastic limit. بعدها تصبح العلاقة غير خطية حيث نحصل على استطالة أكبر لقوة أقل بعدها تختل العلاقة ،



شكل(٢-٣): العلاقة بين القوة والإستطالة للزنبركبن

ما يهمنا من الخط المستقيم هو ان الزيادة في الطول تتناسب مع الزيادة في القوة حيث نلاحظ أن :

ظل الزاوية α_1 < ظل الزاوية α_2

ولكن :

ظا α = المقابل للزاوية α ÷ المجاور للزاوية α

أي أن:

$$\tan \alpha_1 = \left(\frac{\Delta F}{\Delta x}\right)_1 < \tan \alpha_2 = \left(\frac{\Delta F}{\Delta x}\right)_2$$

أي أن ظل الزاوية يكون أكبر كلما كانت مرونة الزنبرك أقل. ولكن ظل الزاوية هو:

- ميل الخط المستقيم. ولذلك فهو قيمة ثابتة لكل خط مستقيم؛
- نسبة الزيادة في القوة ب للزيادة في الطول.

والواضح أن قيمة هذا الثابت $\tan(\alpha)$ تقل كلما زادت مرونة الزنبرك وهو قيمة ثابتة لكل زنبرك وسنرمز له بالرمز k بحيث يصبح:

١. للزنبرك الأول

$$k_1 = \tan \alpha_1 = \left(\frac{\Delta F}{\Delta x}\right)_1$$

٢. والزنبرك الثاني

$$k_2 = \tan \alpha_2 = \left(\frac{\Delta F}{\Delta x}\right)_2$$

أي أن:

$$k_1 < k_2$$

وعليه عموماً هذا الثابت k هو:

$$\boxed{k = \frac{F}{x}} \qquad \text{.................................(٣-٣)}$$

ويسمى هذا الثابت بـ :

> ثابت الزنبرك spring constant
> أيضاً يسمى بثابت الصلادة أو القساوة stiffness constant
> وكلما كبرت قيمته قلت مرونة الزنبرك والعكس صحيح

وحدة الثا

وحدة القوة ÷ وحدة المسافة

إذن الوحدة = $\frac{\text{نيوتن}}{\text{متر}} = \frac{N}{m} = \frac{Kg\ m}{m\ s^2} = \frac{Kg}{sec^2}$

أي وحدة الثابت = وحدة الكتلة ÷ مربع الزمن وهذه الوحدة هامة لمعرفة طبيعة k .

وعليه فالقوة المسببة لاستطالة الزنبرك أو إنكماشه هي :

$$\boxed{F = k\ x} \qquad \text{............................... (٣-٤)}$$

ولكن عزيزي الدارس،،

نتذكر أن القوة F المسببة للحركة التوافقية البسيطة هي القوة الناتجة عن مقاومة الزنبرك لمطه (استطالتة) أو لضغطه, ويكون اتجاهها عكس اتجاه الزيادة في الإزاحة .والواقع أن القوتين متساويتان. وفي قانون هوك هذه القوة هي القوة الخارجية المسببة لإستطالة الزنبرك, بينما أثناء الحركة التوافقية البسيطة نفسها تنتج القوة عن الزنبرك نفسه بسبب استطالتة أو ضغطه, مما يعني أنها في عكس اتجاه القوة المقاسة في قانون هوك. هذه القوة تسمى قوة الارجاع او الإعادة Restoring force **وهي:**

$$\boxed{F = -k\ x} \qquad \text{............................... (٣-٥)}$$

حيث k هو ثابت الصلادة او ثابت الزنبرك. وبما ان الاشارة بالسالب فإن القوة في عكس اتجاه الزيادة في طول الزنبرك أو النقاصان في طوله وهي نفسها القوة في المعادلة (٣-٢).

المعادلة (٣-٥) يمكن استخدامها لتعيين ثابت الزنبرك k وذلك حينما تكون القوة F هي الوزن.وبما أن القوة حسب قانون نيوتن الثاني هي:

$$F_x = m\ a_x$$

بمقارنة قانون نيوتن اعلاها بالمعادلة (٣-٥)

$$\therefore m\ a_x = -k\ x$$

تتحصل علي

$$\therefore m\ a_x + k\ x = 0$$

بما ان التسارع هو $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$ .... (٣-٦)

والتعويض عن وحدات الكميات الموجود ة في الايسر من المعادلة السابقة نتحصل علي

$$\frac{m}{s^2} + \left(\frac{k}{m}\right)m = 0$$

و من ذلك نجد ان وحدة الثابت $\frac{k}{m} = \frac{1}{s^2}$

المعادلة(٣-٦) هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة الأفقية للزنبرك و في صورتها العامة هي:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$ .... (٣-٧)

وعليه بمقارنة (٣-٧) مع(٣-٦) نجد ان :

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

أي أن الثابت $k = m\omega^2$

وعليه

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$ .... (٣-٨)

وبما أن وحدة الثابت k هي kg/s^2

∴ وحدة ω هي $\frac{1}{s} = \sqrt{\frac{1}{s^2}}$ أي نفس وحدة التردد .

عزيزي الدارس، نلاحظ في المعادلة (٣-٨) أن:

> التردد الزاوي للحركة التوافقية البسيطة لأي زنبرك أو لأي جسم مهتز تقل بزيادة كتلته (أو الكتلة المعلقة بة) فالأجسام الضخمة عندما تهتز يكون ترددها صغيرا .

ولأن

حيث f هو تردد الحركة التوافقية البسيطة ويمكن كتابته في صورة

$$f = \frac{1}{T}$$

حيث T الزمن الدوري للحركة التوافقية. وعليه من (٣-٨) ولأن $\omega = \frac{2\pi}{T}$, فان:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad .... (٣-٩)$$

أي أن الزمن الدوري للزنبرك يتناسب تناسبا طردياً مع الجذر للتربيعي للكتلة المعلقة بالزنبرك المعين. المعادلة (٩-٣) يمكن استعمالها لإيجاد الثابت k وذلك بقياس الزمن الدوري T للحركة التوافقية البسيطة. من البديهي عزيزي الدارس أن حلول المعادلة (٣-٦), هي نفس الحلول التي حصلنا عليها سابقاً.

مثال

زنبرك مثبت من اعلي، وضعت في الطرف الاخر كتلة مقدارها 20N فاستطال الزنبرك بمقدار 0.5 mm اوجد ثابت الزنبرك

الحل

$$F = -k\ x$$

بالتعويض نجد ان

$$20 = -k \times 0.5 \times 10^{-3}$$

$$k = \frac{20}{5\times10^{-4}} = 4\times10^{4}\,N/m = 4\times10^{4}\,kg/s^{2}$$

مثال:

كتلة مقدارها 200g معلق في زنبرك ذات مرونة 5 N/m وترك يتحرك بحرية تامة اوجد الزمن الدوري

الحل

بما ان $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\omega = \sqrt{\frac{5}{200\times10^{-3}}} = 5 rad/s$$

ومنها نتحصل علي الزمن الدوري

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{3\times3.14}{5} = 1.26 \sec$$

تدريب(١)

١. زنبرك مثبت من اعلي. علقت في الطرف الاخر كتلة مقدارها 20N فاستطال الزنبرك بمقدار 0.02 cm اوجد ثابت الزنبرك

٢. كتلة مقدارها 0.4 معلقة في زنبرك ذو مرونة تساوي 40 N/m ترك يتحرك بحرية تامة. أوجد الزمن الدوري.

١. ماذا نعني بثابت الزنبرك (ثابت الصلادة)؟
٢. ما هي علاقة ثابت الزنبرك بمرونته؟
٣. اشرح كيف يمكن إيجاد وحدة ثابت الزنبرك؟.
٤. استنتج ان القوة المسببة لاستطالة الزنبرك أو إنكماشه هي: $F = k\,x$
٥. من المعادلة (٢-٣) والمعادلة (٥-٣) استنتج أن $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$
٦. برهن أن مربع الزمن الدوري للزنبرك يتناسب تناسبا طردياً مع كتلة الزنبرك .

أس...

٣,١

عزي...

... هي

أيضا مقدرة الزنبرك على بذل شغل.

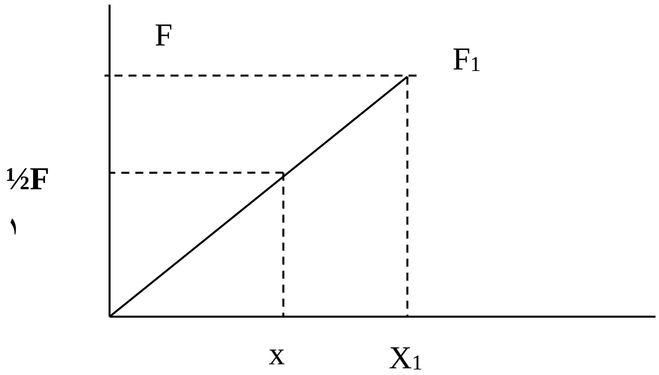
الشغل الذي يبذله الزنبرك = القوة مضروبة في الإزاحة

أي $W = F \times x$

نلاحظ عزيزي الدارس في الشكل(٣-٣) أن القوة تتغير من الصفر إلي F_1 حتى يتم قطع المسافة (الإزاحة) X_1 أي القوة الفعالة حقيقة طوال هذه الإزاحة هي متوسطها أي $\frac{1}{2}F_1$.

ونفس النتيجة بالنسبة للقوة المؤثرة حتى X_2. أي عموماً أن القوة المؤثرة حتى يستطيل الزنبرك بمقدار x هي $\frac{F}{2}$ وبالتالي يصبح هذا الشغل الذي يمكن أن يبذله الزنبرك أي الطاقة الكامنة فيه أي طاقة الوضع هي

$$E_p = \frac{1}{2}Fx \quad \text{.............................} \quad (٣-١٠)$$



الشكل(٣-3): القيمة الفعالة لقوة تبدأ من الصفر = نصف القيمة القصوى لتلك القوة

بالتعويض من (٣-١) تصبح طاقة الوضع للزنبرك هي :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$ .... (٣-١١)

ولكن من (٣-٨) نجد أن:

$$k = m\omega^2$$

وعليه تحصلنا على نفس المعادلة التي حصلنا عليها عند مناقشة الطاقة في الوحدة الثانية وهي

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}$$ .... (٣-١٢)

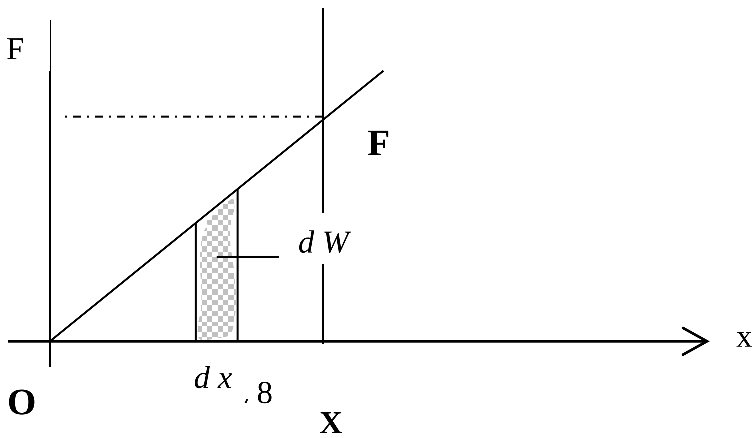
المعادلة (٣-١٢) لطاقة الوضع في الزنبرك يمكن الحصول عليها ببساطة باستعمال التكامل .

بتفاضل الشغل $W = F \times x$

منها نحصل علي

$$\boxed{dW = Fdx}$$ .... (٣-١٣)

أي يساوي المساحة $Fx\ dx$ كما موضح في الشكل (٣-٤).



الشكل(٣-٤): يوضح حساب الشغل

وبالتالي من (٣-١٣) نجد أن القوة في أي لحظة هي :

$$F = \frac{dW}{dx}$$

أما طاقة الوضع يمكن الحصول عليها بتكامل الشغل في (٣-١١) أي

$$\boxed{E_P = \int d\ W = \int_0^x Fdx = k\int_0^x xdx = k\,\frac{x^2}{2}} \quad ....\ (١٤-٣)$$

وهي نفس النتيجة أي المعادلة (٣-١١). أيضا تكامل المعادلة (٣-١٤) في الشكل (٣-٢) هو في الواقع المساحة تحت الخط المستقيم حتى المحور x وهي في الواقع مساحة المثلث OFX أي مساحة المربع مقسومة على 2 ويساوي $\frac{Fx}{2}$

أي نفس المعادلة (٣-١٤).

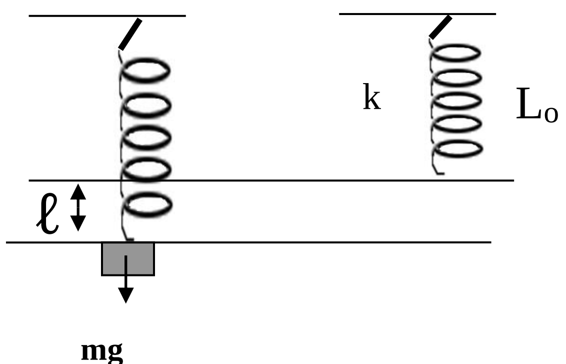
4.1.3. حساب السرعة الزاوية والزمن الدوري من استطالة الزنبرك

عزيزي الدارس،،

لو قمنا بتعلق كتلة مقدارها m في زنبرك طوله L_o فإن طوله يزيد مقدار ℓ ويصبح الزنبرك والكتلة في وضع الاتزان الذي ناقشناه سابقاً (الشكل (٣-٥)). واضح أن الاستطالة ℓ التي حدثت بواسطة قوة الوزن $F = mg$

وبالتالي ومن (٣-٤) نجد أن:

$$\boxed{mg = kl} \quad ....\ (١٥a-٣)$$



الشكل (٣-٥): الإستطالة ℓ

حيث k ثابت القساوة أو ثابت الزنبرك وg هي تسارع السقوط الحر أو ما يسمى بعجلة الجاذبية. وعليه فان

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{l}$$ .... (٣-١٥b)

من (٣-٨) و (٣- ١٥ b) نجد أن :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$ .... (٣-١٦)

ولان $\frac{2\pi}{T} = \omega = 2\pi f$

حيث f التردد و T الزمن الدوري ولذلك:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ .... (٣-١٧)

أي لا حاجة لمعرفة الكتلة أو الثابت k لتحديد التردد الزاوي أو الزمن الدوري واللذان يمكن تحديدهما الان من الزيادة في الطول الأصلي للزنبرك ℓ ومن تسارع السقوط الحر (عجلة الجاذبية) المعروف القيمة [عادة تؤخذ $9.8\ m/S^2$] .

المعادلة (٣-١٥b) توضح كيف يمكن تعيين الثابت k للزنبرك. فبتعليق الكتلة m المعروفة الفيمة وقياس الإستطالة ℓ يمكن حساب قيمة k.

أسئلة تقويم ذاتي

اثبت ان:

١. السرعة الزاوية لحركة الزنبرك تعطي بالعلاقة التالية

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

5.1.3. توصيل الزنبركات على التوالي وعلى التوازي

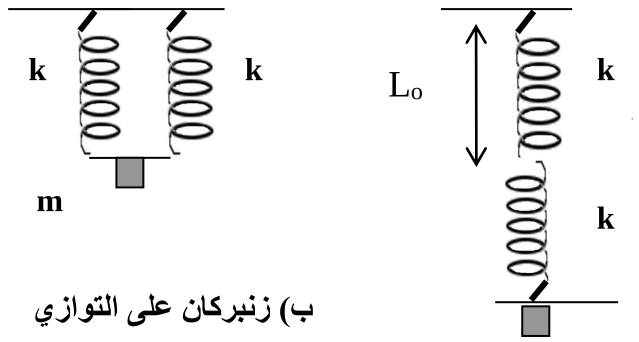
عزيزي الدارس,

لاحظ في الشكل(٣-٦) إن كل زنبرك له نفس الطول L_o ونفس الثابت k

أولا: التوصيل علي التوالي

عند توصيل الزنبركين على التوالي كما في الشكل (٣-٦(أ)) وتعليق نفس الكتلة m حيث يظل الوزن هو mg نجد أن الاستطالة تتضاعف أي تصبح 2l لأن الطول الأصلي كان قد تضاعف الى $٢L_o$ وبالتالي تصبح (٣-١٥a) كالآتي :

$$m\,g = 2kl$$



ب) زنبركان على التوازي

الشكل (٦-٣): توصيل زنبركان على التوالي وعلى التوازي

أ) زنبركان على التوالي

ويصبح التردد الزاوي في حالة توصيل زنبركين على التوالي:

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2l}}} \quad \text{..........................} \quad (١٧-٣)$$

أي أن :

$$\frac{\omega}{\sqrt{2}} = \omega_1$$

ملحوظة

يقل التردد الزاوي في حالة توصيل الزنبركين على التوالي وبالتالي يزيد الزمن الدوري لأن $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$ أي $T_1 = \sqrt{2}\ \mathrm{T}$

واضح من الم

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

حيث $k \neq k_1$ و إلا **لن** نحصل على نفس القيمة التي حصلنا عليها في (١٧-٣) والواضح أن:

$$k_1 = \frac{k}{2}$$

أي أن :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

ولو كان عدد الزنبركات الموصل على التوالي ثلاثة ومن نفس النوع فسنجد أن الثابت :

$$k_1 = \frac{k}{3}$$

وهكذا, فعند تعليق زنبركات على التوالي, فان الثابت k للمنظومة المكونة من ٣ زنبركات هو

$$\boxed{\frac{1}{k^*} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} \quad \text{.............................} \quad (١٨-٣)$$

حيث k_1 ثابت الزنبرك الأول و k_2 ثابت الزنبرك الثاني .الخ .فإذا كانت

$$k^* = k_3 = k_2 = k_1$$

فإن

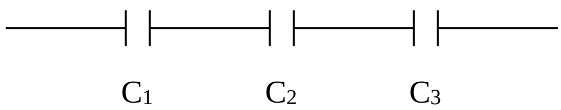
$$\frac{1}{k^*} = \frac{3}{k}$$

ومنها نتحصل علي

$$k^* = \frac{k}{3}$$

وهكذا عزيزي الدارس،،

نجد أن أي منظومة مكونة من زنبركات موصلة على التوالي يقل ثابتها *k الكلي عن قيمة k لأي من الزنبركات الموصلة علي التوالي أي تصبح المنظومة أكثر مرونة وهذا التوصيل يعادل توصيل المكثفات في الكهربية



حيث السعه الكلية للمكثفات المقلوب للقيمة

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

حيث ان : C_1 سعة المكثف الأول و C_2 سعة المكثف الثاني ...الخ.

ثانياً: التوصيل علي التوازي:

أما عند توصيل الزنبركات على التوازي (الشكل (٦-٣ ب)) فإن القوة المؤثرة على كل زنبرك $= \frac{F}{2}$ ويزيد الطول بمقدار $\frac{l}{2}$ بحيث تصبح:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

أي

$$\omega_2 = \sqrt{2}\ \omega$$

ملحوظة

يزيد التردد الزاوي في حالة التوصيل على التوازي وبالتالي يقل الزمن الدوري

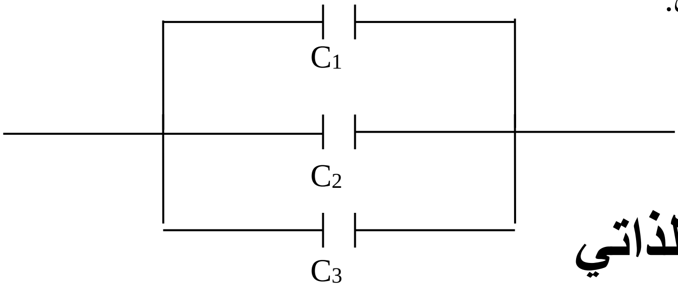
وهذا يعني أن: $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

أي أن ثابت الزنبرك في هذه المنظومة يساوي مجموع ثوابت الزنبركات. أي انه في حالة استعمال الزنبركات على التوازي فإن ثابت القساوة k لهذه المنظومة هو:

$$\boxed{k = k_1 + k_2 + k_3} \qquad (١٩-٣)$$

أي أن هذه المنظومة تصبح اقل مرونة وهي في الكهربية تقابل توصيل المكثفات على التوازي(انظر الشكل), أي:

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$



أسئلة التقويم الذاتي

اثبت ان:

١. السرعة الزاوية من استطالة الزنبرك تعطي بالعلاقة التالية

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

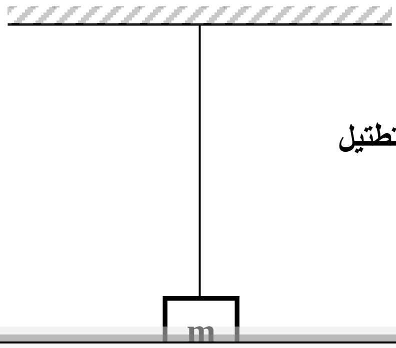
٢. . متي تصبح المنظومة الزنبركية أكثر مرونة.في حالة التوصيل علي التوالي ام علي التو زاي ولماذا؟

٣. فسر سبب وجود التشابه بين توصبل الزنبركات والمكثفات.

6.1.3 الإجهاد والمط في الأسلاك ومعامل يونق Young

عزيزي الدارس,

لو علقنا كتلة m في سلك طوله L_0 ومساحة مقطعه A فإنه سيستطيل بمقدار e كما في حالة الزنبرك ولكن الاستطالة هنا تكون صغيرة جداً ويمر السلك بنفس المرحلة التي شرحناها سابقاً في قانون هوك حيث تتناسب الاستطالة مع القوة حتى حد التناسب فقط ونجد عند هذه النقطة أن $k\,x = F$ كما في حالة الزنبرك .



الشكل(٧-٣) الكتلة المعلقة تجعل السلك يستطتيل

حيث ان: **الانفعال** Strain

الانفعال هو النسبة بين الزيادة في الطول e والطول الأصلي L_o

أي أن

(٣-٢٠)أ .... $\text{الانفعال} = \frac{e}{L_0}$

والانفعال مقدار ثابت مادامت القوة تتناسب مع الاستطالة ويعود السلك لطوله الأصلي بعد زوال القوة .لاحظ أن الاستطالة e صغيرة جداً ولا تزيد عن 1% في الطول الأصلي للسلك.

الاجهاد (Stress)

الإجهاد هو القوة المؤثرة على وحدة المساحة

أي أن

(٣-٢٠)ب.................. $\text{الإجهاد} = \frac{F}{A}$

وحدات الإجهاد هو نفس وحدات الضغط لأن تعريف الإجهاد هو نفس تعريف الضغط.

عزيزي الدارس ,

في بداية القرن التاسع عشر أي حوالي عام ١٨٠٠ وجد العالم يونق Young أن:

النسبة بين القص(الانفعال) والإجهاد هي قيمة ثابتة لأي مادة في المدى الذي ينطبق عليه قانون هوك وتسمى هذه النسبة بمعامل يونق Y Young's Modulus**.**

معامل يونق Y = الإجهاد ÷ القص(الانفعال)

(٣-٢١) .... $Y = \frac{\text{الاجهاد}}{\text{الانفعال}}$

$$Y = \frac{F/A}{e/L_o} = \frac{FL_o}{Ae}$$

ومنها نجد أن القوة

$$\boxed{F = Y\frac{Ae}{L_o}}$$ .... (٣-٢٢)

أي أن القوة تتناسب مع الاستطالة e وهو ما حصلنا عليه للزنبرك أي (٣-٤) حيث نجد أن ثابت الصلادة للسلك هو $k = \frac{YA}{L_o}$ و هذا الثابت يماثل ثابت الزنبرك k.

من الواضح عزيزي الدارس، من (٣-٢٠) أن السلك المعلق به كتله يمكن أن يهتز في حركة توافقية بسيطة وكما قلنا بأن الاستطالة e صغيرة جداً ولا تزيد عن 1% من طول السلك ولذلك فاتساع الحركة التوافقية البسيطة لهذا السلك تكون صغيرة جداً وقد لا يمكن مشاهدتها بالعين المجردة إذا كان السلك قصيراً.

وعليه فقوة إعادة السلك هي

$$\boxed{F = -Y\frac{Ae}{L_o}}$$ .... (٣-٢٣)

وتصبح معادلة الحركة التوافقية البسيطة عند مساواة هذه القوة بالقوة $F = m\,a$ ووضع الاستطالة $x = e$ هي

$$ma + Y\frac{A}{L_o}x = 0$$

أي أن:

$$k = \frac{YA}{L_o}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{YA}{mL_o}x = 0$$

وهي معادلة الحركة التوافقية البسيطة للسلك وتصبح في نفس الصيغة المعروفة لدينا إذا وضعنا

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{YA}{mL_o}} = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$ .... (٣-٢٤a)

ومنها نجد أن الزمن الدوري هو :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{mL_o}{YA}}}$$ .... (٣-٢٤ b)

أي أن الزمن الدوري للحركة يزيد بزيادة طول السلك ويقل كلما زاد سمك السلك

مثال

سلك من النحاس طوله متر وقطره 1 ملم علق فيه كتلة مقدارها 1 kg ثم أجبر على التذبذب في حركة توافقية بسيطة أوجد ترددها وزمنها الدوري واتساعها

الحل:

نصف القطر = القطر ÷ ٢ ومنها نجد ان $r = 0.5\ mm = 5 \times 10^{-5}$ m

$$r = 5\times10^{-4} m \qquad l = 1 m$$

مساحة المقطع $A = \pi r^2 = 7.85 \times 10^{-7} m^2$

معامل يونق للنحاس $Y = 12 \times 10^{10}\ N/m^2$ (انظر الجدول التالي)

القوة $F = mg = 1 \times 9.8 = 9.8\ N$

الثابت

$$k = \frac{YA}{L_o} = \frac{12\times10^2\times7.85\times10^2}{1} = 9.42\times10^2\ N/m$$

من $mg = k\ e$ نجد أن: $9.8 = 9.42\times 10^4 \times l = k$

∴ الاستطالة و تعادل الاتساع $= mm\ \ 0.104 = e = 1.04\times 10^{-4}$ (أي حوالي عُشر مليمتر فقط)

التردد الزاوي $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3.07\times10^2 = 307\ \ Hz$

التردد $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 47\ \ Hz$

الزمن الدوري $T = \frac{1}{f} \cong 0.0213\ \ sec$

لاحظ الاتساع الصغير للحركة التوافقية للسلك (حوالي $\frac{1}{10}$من المليمتر) بحيث لا يمكن ملاحظتها بالرغم من التردد الكبير لهذه الحركة (47 Hz). والواقع أن معظم الأجسام إن لم تكن كلها على ظهر الأرض وحتى داخل بيتك ولأسباب مختلفة في حالة اهتزاز وان جلها غير منتظم كما في الحركة التوافقية البسيطة, ولكن لا نحسها. ولذلك عند قياس أي نوع من الاهتزازات في مختبر الفيزياء توضع أجهزة التجربة على مناضد تحملها وسائد هوائية تمتص الاهتزازات الخارجية حتى لا تتداخل مع الاهتزازات موضوع التجربة .

جدول (٢-٣): معامل يونقYoung's Modulus Y لبعض المواد

المادة	الالمونيوم	النحاس الأصفر	النحاس	الزجاج	الفولاذ
معامل يونق Y $\left(N/m^2\right)$	6×10^{10}	9×10^{10}	12×10^{10}	6×10^{10}	20×10^{10}

تدريب(٢)

؟

سلك من معدن الالمنيوم طوله ٢ متر ونصف وقطره 2 ملم علقت فيه كتلة مقدارها 4 kg ثم أجبر على التذبذب في حركة توافقية بسيطة. أوجد ترددها وزمنها الدوري واتساعها ، علما بان معامل يونق 6×10^{10}

أسئلة تقويم ذاتي

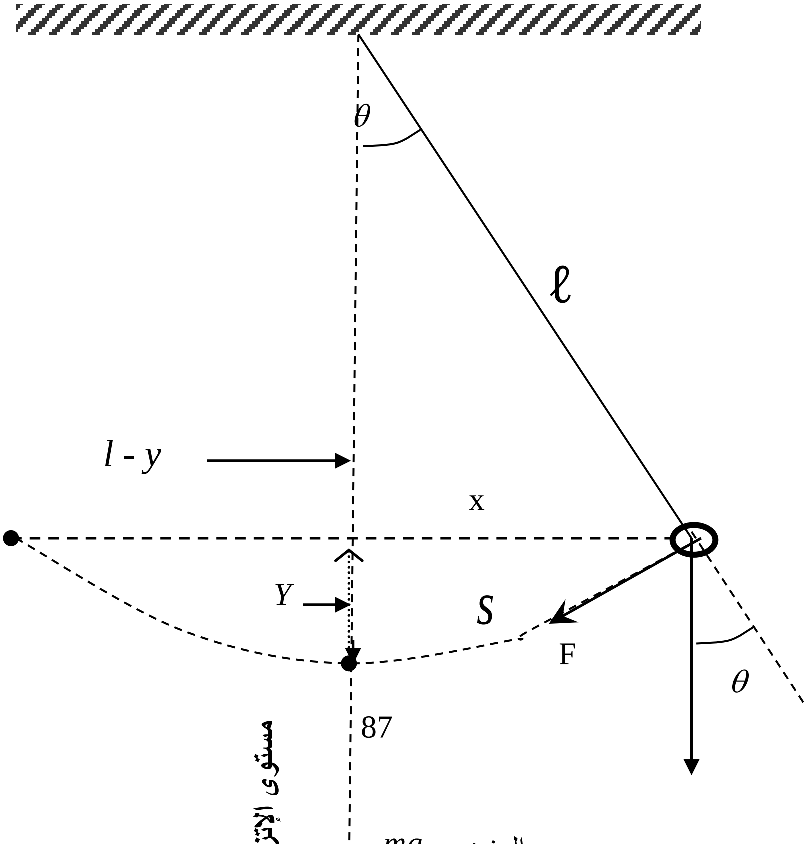
١. عرف كل من الانفعال والإجهاد
٢. عرف معامل يونق Y
٣. سلك من النحاس طوله متر وقطره $10\ mm$ ملم علق فيه كتلة مقدارها kg ٠.١٠٠ ثم أجبر على التذبذب في حركة توافقية بسيطة أوجد ترددها وزمنها الدوري واتساعها علما بان معامل يونق $Y=5\times10^{10}$

2.3.ال

عزيزي الدارس:

أي خيط أو سلك يمكن اعتباره عديم الكتلة مثبت من أعلى ومعلق بطرفه الأسفل كتلة m بحيث يمكنه التأرجح مكوناً زاوية θ مع الاتجاه الرأسي يسمى البندول البسيط ويمكن اعتبار حركته حركة أفقية.

والبندول البسيط هو الأكثر شهرة وكان يستخدم كضابط للوقت منذ عصور قديمة وذلك بحساب عدد اهتزازته لضبط فترة زمنية معنية وهو الذي مكن الناس من صنع الساعات الميكانيكية الكبيرة منذ عدة قرون خلت وظل مستخدماً في بعض هذه الساعات حتى القرن العشرين بل لازالت بعض الساعات القديمة الكبيرة تعمل به حتى الآن.



شكل (٣-٨) البندول البسيط

عزيزي الدارس, الشكل(٨-٣) يوضح أن حركة البندول البسيط ليست في خط مستقيم وإنما يتحرك على طول القوس S والذي هو جزء من دائرة كبيرة نصف قطرها طول البندول ℓ.
لاحظ أن هناك مسافة y بين موضع الجسم عندما تكون الزاوية $\theta = 0$ (أي موضع الاتزان) وبين موضع الجسم عندما يصنع الخيط زاوية θ وأن المسافة المستقيمة بين الموضعين x أقل من طول مسار الحركة S .ومن الشكل (٣-8) نجد أن :

$$x = \ell \sin(\theta)$$

بينما طول القوس هو
$$S = \ell \theta$$

طول القوس = نصف القطر (طول الخيط)× الزاوية

ومن المعروف أنه في حالة الزاويا الصغيرة [7^o أو اقل عند البعض حتى 10^o] فان:

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

وعندها نجد أن $S \approx X$ أي

$$x = \ell \theta$$

القوة التي تسبب حركة البندول ناتجة عن وزن الجسم $m\ g$ حيث g تسارع السقوط الحر أو (عجلة السقوط الحر) أو عجلة الجاذبية ، و وزن الجسم في هذه الحالة يحاول إرجاع الجسم إلى موضع الاتزان (أي θ = صفر) . وهذه القوة مماسة للإزاحة s وهي :

$$\boxed{F = -m\ g\ \sin(\theta)} \quad \text{.............................} \quad (٢٢\text{-}٣)$$

وعليه ومن قانون نيوتن الثاني

$$\boxed{m\ a = -m\ g\ \sin(\theta) = -m\ g\ \theta} \quad \text{..............................} \quad (٢٣\text{-}٣)$$

في حالة θ صغيرة ، وجدنا أن $x = \ell \theta$

$$\therefore \quad \theta = \frac{x}{l} \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{S}{l}$$

وعليه تصبح (٣-٢٣) كالآتي:

$$m\ a = -m\ \frac{g}{l}\ x$$

$$\boxed{a = -\ \frac{g}{l}\ x} \quad \text{..............................} \quad (٢٤\text{-}٣)$$

ولأن كل من g وطول الخيط ℓ ثوابت فإن التسارع يتناسب مع الإزاحة x أي أن الحركة تصبح حركة توافقية بسيطة ولكن فقط في حالة θ صغيرة حيث $\sin(\theta) \approx \theta$ وعليه نحصل على

$$a + \frac{g}{l}\, x = 0$$

ولكن التسارع $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

فإن

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}\, x = 0$$

وهي نفس معادلة الحركة التوافقية البسيطة إذا وضعنا

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

أي أن :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}} \quad \text{..............................} \quad (٣-٢٥)$$

أي أن التردد الزاوي لحركة البندول البسيط يتناسب عكسياً مع الجذر التربيعي لطول البندول وكلما كان البندول اقصر كان التردد اكبر علما بأن g = ثابت

أي

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$$

T الزمن الدوري مقلوب الزمن الدوري هو f التردد $= \dfrac{1}{T}$ منها

$$\omega = 2\pi f$$

وعليه تصبح معادلة الحركة التوافقية البسيطة للبندول البسيط هي

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{\lambda}\, x = 0} \quad \text{..............................} \quad (٣-٢٦)$$

وهي نفس معادلة الحركة التوافقية البسيطة للبندول الزنبركي ولها نفس الحل أو الحلول التي حصلنا عليها سابقاً. المعادلة (٣-٢٦) تقابل المعادلة (٣-٦) للزنبرك حيث g تقابل ثابت الزنبرك k بينما طول البندول تقابله الكتلة في حالة الزنبرك. لاحظ أن تردد البندول البسيط لا يعتمد على الكتلة إطلاقاً مهما كانت تلك الكتلة بالطبع فالبندول البسيط مثله مثل البندول الزنبركي يقل اتساعه بمرور الزمن بسبب مقاومة الهواء ومع ذلك يظل تردده ثابتاً حتى يتوقف لأنه حسب (٣-١٤) لا يتوقف التردد على الاتساع وكان أول من لاحظ ذلك العالم جاليلو الذي قاس تردد البندول بواسطة نبضه حيث لم تكن الساعات قد اختُرِعت حينئذ.

لاحظ في الشكل (٣-٣) أن هناك متغير جديد إضافة للإزاحة x أو s وهو الزاوية θ وهو متغير لم يكن موجوداً في البندول الزنبركي فمن الرسم $S = l\,\theta$

وفي حالة θ صغيرة $x = l\,\theta$

ومن (٣-٢٣)

$$m\ a = -m\ g\ \theta$$

ولكن التسارع هو

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(l\,\theta) = l\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

فإن :

$$\therefore \qquad l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\ \theta = 0$$

بما ان $\omega^2 = \frac{g}{l}$ فإن :

$$\boxed{\therefore \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\ \theta = 0} \qquad .... \quad (٣-٢٧)$$

وهي نفس معادلة الحركة التوافقية البسيطة (٣-٢٦) ولكن للمتغير θ والذي يقابل الإزاحة ويمكن افتراض اتساعه يساوي θ_m بحيث تكون $\theta_m \leq 10^o$ حتى تظل الحركة توافقية بسيطة. وقد وجد انه إذا وصلت θ حتى 15^o (أي ما مجموعة 30^o في الاتجاهين) فان الزمن الدوري للحركة التوافقية البسيطة للبندول البسيط يحدث فيه خطأ لا يتجاوز ٠,٥%.

لاحظ أن ω في حالة الإزاحة x هي نفسها في حالة الزاوية θ أي:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

وهي المعادلة (٣-٢٥) والتي أيضاً تعطي الزمن الدوري T حيث $T = \frac{1}{f}$. حيث f التردد و

ولهذا $\omega = 2\pi f$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}} \qquad .... \quad (٣-٢٨)$$

المعادلة (٣-٢٨) تستعمل لإيجاد تسارع السقوط الحر (عجلة الجاذبية) g لأن طول الخيط يمكن قياسه والزمن الدوري يمكن قياسه بساعة إيقاف stop watch وذلك مثلاً بتحديد زمن عشرة اهتزازات كاملة ثم أخذ متوسطها.

1.2.3. طاقة البندول البسيط

عزيزي الدارس،،

وجدنا للبندول الزنبركي

- القوة $F = k\ x$

- فبالتالي طاقة الوضع $$E_p = \frac{1}{2} k \; x^2$$

ولذلك للبندول البسيط.

- القوة هي: $$m \frac{g}{l} x = m \; g \; \theta$$

- وبالتالي طاقة الوضع هي $$E_p = \frac{1}{2} \frac{m \; g}{l} \; x^2$$

أقصى طاقة عندما تصبح $x = A$ الاتساع وعندها الطاقة الكلية للبندول البسيط = طاقة الحركة $\frac{1}{2} m \; v^2$.

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \cancel{m} \; v^2 + \frac{1}{2} \frac{\cancel{m} \; g}{l} x^2 = \frac{1}{2} \frac{\cancel{m} \; g}{l} A^2$$

$$v^2 = \frac{g}{l} (A^2 - x^2)$$

اذن سرعة البندول

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} (A^2 - x^2)}$$

تدريب(٣)

طاقة الوضع للبندول البسيط تساوي الوزن × الارتفاع حيث الارتفاع هو y أي أن طاقة الوضع $E_p = mgy$ وأقصى قيمة لـ y هي عندما تصل θ إلى أقصى قيمة. بالنظر الى الشكل ٣-٢ وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث الذي أضلاعه l و x و L-y نجد أن : $(l - y)^2 + x^2 = l^2$

باستعمال هذه المعادلة مع العلم بأن $y < x$ وبالتالي $y^2 << x^2$ أوجد قيمة y من المعادلة ثم أوجد طاقة الوضع وبرهن أنها هي نفس طاقة الوضع للبندول الزنبركي

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

.

١. اثبث أن التردد الزاوي لحركة البندول البسيط يتناسب عكسياً مع الجذر التربيعي لطول البندول

٢. متي يتناسب التسارع مع الإزاحة x في حالة حركة البندول البسيط

٣.ما هي العلاقة بين الزمن الدوري وطول البندول

٤.اكتب قوانين كل من القوة و طاقة الوضع ثم اثبت ان:

- القوة في البندول البسيط هي: $m \frac{g}{l} x = m \; g \; \theta$
- وايضا طاقة الوضع هي $E_p = \frac{1}{2} \frac{m \; g}{l} \; x^2$

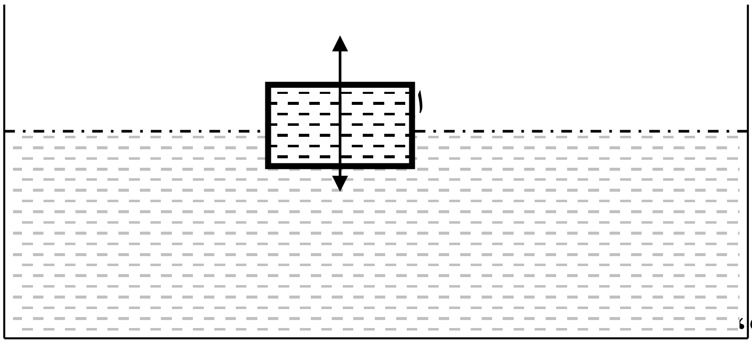
٥. برهن أن: طاقة الوضع للبندول البسيط هي $E_p = \frac{1}{2} \frac{m \; g}{l} \; x^2$

: الطاقة الكلية هي $E = \frac{1}{2} \frac{m \; g \; A^2}{l}$

السرعة للبندول البسيط هي : $v = \sqrt{\frac{g}{l} (A^2 - x^2)}$

.

٣,٣.اهتزازات الأجسام الطافية



عزيزي الدارس ،،

الشكل (٤-٣) يوضح جسم بلاستيكي صغير مساحة مقطعه الكبير A به كمية من الماء كافية لكي ينغمر جزء كبير منه في ماء الحوض ولنفرض أن ارتفاع هذا الجزء المغمور هو h وعند هذا الارتفاع يكون القارورة في حالة اتزان أي أن وزنه يساوي دفع الماء في الحوض عليه.

إذا ضغطنا على السطح العلوي للجسم بحيث تتحرك الجسم رأسياً إلى أسفل مسافة y بحيث يصبح الجزء المغمور هو h+y سنحس بأن الجسم يحاول العودة إلى وضع الاتزان. أي أن هناك قوة إعادة تولدت. فإذا تركنا الجسم فإنه يتحرك إلى أعلى حتى يصل إلى مسافة y تحت مستوى الاتزان أي أن ارتفاع الجزء المغمور يصبح h-y وهكذا يتحرك الجسم حركة سنرى أنها حركة توافقية بسيطة. في البداية عند ضغط الجسم إلى أسفل أزيحت كمية من الماء كتلتها (m) وتعطي بالعلاقة

$$m = \rho A y$$

حيث Ay هو حجم الجزء من الجسم الذي إنغمر في الماء أي هو حجم الماء المزاح و ρ كثافة الماء وعند ترك الجسم يعود متحركا إلى أعلى بسبب تولد قوة إعادة هي :

$$\mathrm{F} = m\ g = -\rho g \mathrm{A} y$$

كل الجسم يتحرك إلى أعلى وأسفل بتسارع a. هذه الكتلة تساوي كتلة الماء المزاح بواسطة الجزء المغمور الذي ارتفاعه h أي:

$$m = \rho \text{ h A}$$

وبما أن التسارع
$$a = \frac{d^2y}{dt^2}$$

اذن القوة
$$m\ a = -\rho\ g\ \text{Ay}$$

أي أن
$$\rho \text{ h A}\frac{d^2y}{dt^2} + \rho\ g\ \text{Ay} = 0$$

وعليه
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{\text{h}}\ \text{y} = 0$$

وهي معادلة الحركة التوافقية البسيطة
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2\ \text{y} = 0$$

حيث
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\text{h}}}$$

وهي نفس المعادلة (٣-٢٥) للبندول البسيط، وعليه يكون الزمن الدوري
$$\text{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{h}}{g}}$$

هذه القوانين تنطبق على كل الأجسام الطافية بما في ذلك القوارب والسفن ويمكن حسابها إذا كانت مقاطع هذه الأجسام منتظمة. ولكن يجب الانتباه إلى أن هذه الاهتزازات ليست بالأهمية الكبيرة ولا ذات الأثر الكبير على السفن مقارنة بتأثير الأمواج على هذه الأجسام الطافية.

مثال (١)

قطعة من الخشب مكعبة الشكل مساحة مقطعها $1\ \text{m}^2$ تطفو على سطح بركة. فإذا كان الجزء المغمور منها $0.5\ \text{m}$ فأوجد تردد الحركة التوافقية البسيطة لها ووزنها إذا كان تسارع السقوط الحر $9.8\ \text{m/s}^2$ وكثافة الماء $1000\ \text{kg/m}^3$ ، ثم اوجد كتلة الماء المزاح .

الحل : التردد $f = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\text{h}}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.5}} = \sqrt{1.96} \approx 4.43 \quad \text{Hz}$$

$$f = \frac{2\pi}{4.43} \cong 1.4 \quad \text{S}$$

وزن القطعة = وزن الماء المزاح

حجم الجزء المغمور = $0.5\ \text{m}^3$ = ١ × ٠,٥

كتلة الماء المزاح بواسطة الجزء المغمور

$$m = \rho \text{ v} = 1000 \times 0.5 = 500 \quad \text{kg}$$

تدريب (٤)

قطعة من الخشب مكعب الشكل مساحة مقطعها $6\ m^2$ تطفو على سطح بركة فإن كان الجزء المغمور منها $1.5\ m$ فأوجد تردد الحركة التوافقية البسيطة لها ووزنها إذا كان تسارع السقوط الحر $10\ m/s^2$ وكثافة الماء $1000\ kg/m^3$، ثم اوجد كتلة الماء المزاح .

أسئ ... ي

١. وضح ان معادلة الحركة التوافقية البسيطة لقارورة بلاستيكية صغيرة مساحة مقطعها الكبير A بها كمية من الماء كافية لكي ينغمر جزء منه طوله أي ارتفاعه h في ماء الحوض تعطى بالمعادلة التالية $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{h}\,y = 0$ حيث $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$ وما هي معادلة الزمن الدوري

٢.قطعة من الخشب مكعب الشكل مساحة مقطعها $2\ m^2$ تطفو على سطح بركة فإن كان الجزء المغمور منها $0.25\ m$ فأوجد تردد الحركة التوافقية البسيطة لها و وزنها إذا كان تسارع السقوط الحر $10\ m/s^2$ وكثافة الماء $1000\ kg/m^3$، ثم اوجد كتلة الماء المزاح .

.

٤,٣ .الحرك ... ثف وملف

عزيزي الدارس,

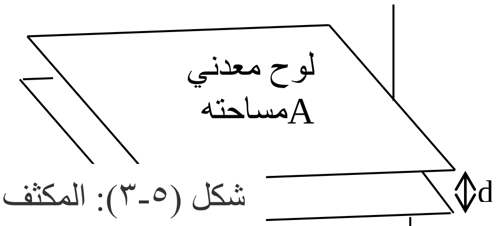
الحركة التوافقية البسيطة في الطبيعة متنوعة. ففي:

- حالة البندول البسيط تنتج عن طاقة الوضع بسبب ارتفاع الوزن $m\,g$ عن موضع الاتزان
- حالة الزنبرك تتوقف على الطاقة المخزونة في الزنبرك والناتجة عن وجود مرونة في الزنبرك بحيث يمكن مطه و ضغطه
- حالة الأجسام الطافية تنتج أيضاً عن تأثير جاذبية الأرض.

والآن عزيزي الدارس, سنناقش وجود هذه الظاهرة أيضاً في الكهربية بل أن الاستفادة من هذه الظاهرة في الكهربية كانت بصورة كبيرة جداً في مجال الاتصالات خلافاً للمجالات الأخرى في الفيزياء. ويناقش هذا الموضوع بتفصيل أكثر في مقرر الكهربية والمغناطيسية في مجال دوائر التيار المتردد و مقررات للإلكترونيات.

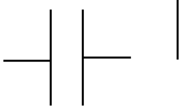
الدائرة التي سنناقشها دائرة مكونة من مكثف وملف :

المكثف capistor: هو أداه لحفظ الشحنة الكهربية, ويتكون في أبسط صُوَرِهِ من لوحين موصلين مساحة كل منهما A والمسافة بينهما d كما في الشكل أدناه وعادة يصنع في كل لوحين ملفوفين بينهما عازل في شكل اسطوانة.



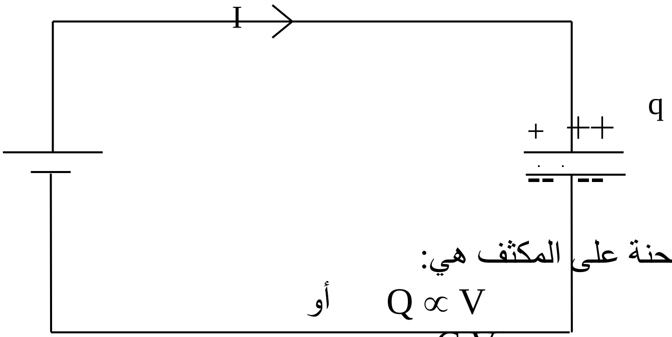
شكل (٥-٣): المكثف الكهربي

ويرمز للمكثف بالرمز



عزيزي الدارس :

عند توصيل المكثف بمصدر كهربي ثابت التيار I (بطارية) كما في الشكل فإن التيار سيسري في الدائرة حتى يتم شحن المكثف بشحنة q ويصبح اللوح المقابل للقطب الموجب للبطارية موجبا بينما يصبح الآخر سالباً وعندها يتوقف التيارI ويصبح فرق الجهد بين طرفي المكثف V



وقد وجد أن الشحنة على المكثف هي:

$Q \propto V$ أو

$q = C\,V$ .... (١)

حيث C ثابت التناسب ويسمى سعة المكثف Capacitance

ولفهم معنى هذا الثابت نلاحظ في المعادلة أعلاه أنه لنفس فرق الجهد V فإن الشحنة q على المكثف تزيد بزيادة السعة C وهي بالتالي تحمل نفس مفهوم سعة الوعاء. ونجد أن سعة المكثف (أنظر شكل المكثف أعلاه) تتوقف علي:

- مساحة الألواح اي تزيد بزيادة مساحة الألواح A
- المسافة بين اللوحين وتقل بزيادة المسافة بين اللوحين d أي أن

$$C \propto \frac{A}{d}$$

ومن (١) فإن: وحدة السعة C

- = الكولوم ÷ فرق الجهد

- الكولوم ÷ فرق الجهد = فاراد Farad

وهي وحدة كبيرة جدا ولذلك هنالك وحدات اقل وهي:

- المايكرو فاراد = واحد على مليون من الفاراد

من العلاقة السابق عزيزي الدارس نتحصل علي

$$\boxed{C = \varepsilon \frac{A}{d}} \qquad (٢)$$

حيث ε (تنطق ابسيلون epsilon) هي ثابت التناسب ويعبر عن خواص العازل الموجود بين اللوحين ومقدرته على إنفاذ المجال الكهربي بين اللوحين ويسمى سماحية العازل و قيمته للفراغ تساوي $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C/Vm^2$

من المعادلة (١) نجد أن فرق الجهد بين طرفي المكثف هو:

$$V_c = \frac{q}{C} \qquad (٣)$$

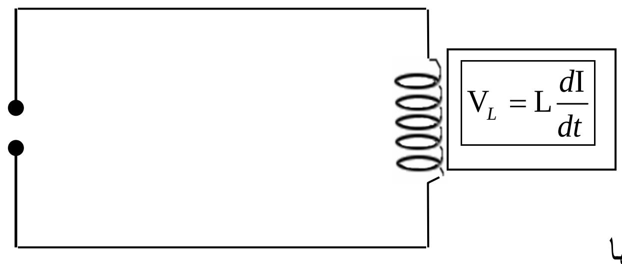
ثانياً : الملف coil

هو سلك ملفوف في شكل حلزوني. فإذا مر به تيار متردد I يتولد عن الملف مجال مغناطيسي متردد. وهذا المجال المغناطيسي تلقائياً يولد تياراً مترددا في الاتجاه المعاكس مما يولد قوة دافعة كهربية عكسية مكونة فرق جهد متردد.

م

هو التيار الذي يغير إتجاهه من الموجب إلى السالب وبالعكس بصورة متكررة اي دوريا غالبا في شكل منحنى جيبي. وتبعا لذلك يتغير فرق الجهد بين طرفي الملف مع تغير التيار بمرورالزمن , أي:

$$\boxed{V_L \alpha \frac{dI}{dt}}$$



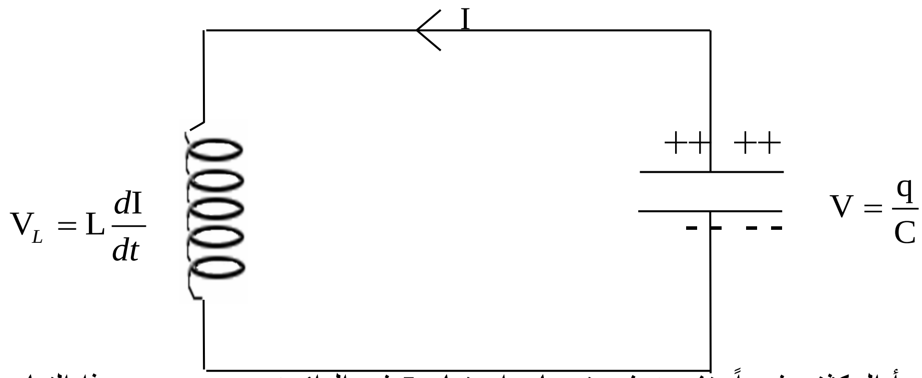
ومنها

(٤)

حيث L هو ثابت التناسب والذي تحدده خواص الملف المغناطيسية والتي تتوقف على عدد لفات الملف ومقاساته ونفاذيته المغناطيسية ويسمى المحاثة inductance

ووحدته هنري Henry وكلما زادت قيمة المحاثة L كلما كان أقل تغير في قيمة التيار (أي $\frac{dI}{dt}$) يولد فرق جهد V_L أكبر بمعنى آخر يولد مجالاً مغناطيسياً أقوى.

الآن عزيزي الدارس, إذا شحنا مكثف بشحنه q بعد توصيله الى بطارية ثم فصلنا البطارية ووصلنا المكثف المشحون الى ملف كما في الشكل الموضح:



الشكل (٦-٣): دائرة L C

يبدأ المكثف فوراً بتفريغ شحنته بامرار تيار I في الدائرة وعند مرور هذا التيار في الملف يتولد مجال مغنا[illegible]مر الأمر حتى تتفرغ الشحنة q وتتحو[illegible]ن الأمر حيث تتحول الطاقة المغناطيسية إلى طاقة كهربية فتشحن المكثف مرة أخرى في الاتجاه المعاكس للشحنة الأولى (أي يصبح اللوح الموجب سالباً والسالب موجباً) وهكذا يتكرر:

- تحول الطاقة الكهربية في المكثف التي كانت مخزونة في صورة شحنة الى طاقة مغناطيسية
- ثم تحول الطاقة المغناطيسية الى طاقة كهربية مرة أخرى وهكذا ....

عزيزي الدارس،،

هذه الدائرة تربط بين الطاقة الكهربية والطاقة المغناطيسية أو مايسمى بالكهرومغناطيسية وتحول كل منها إلى الأخرى.

من قانون كيرشوف نجد إن:

مجموع فروق الجهد في دائرة المكثف والملف تساوي الصفر

أي أن:

$$V_C = -V_L$$

و هذه من (٣) و(٤) هي:

$$\boxed{L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0} \quad .... \quad (٥)$$

ولكن بما أن التيار هو عبارة الشحنة المارة في وحدة الزمن أي :

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}} \quad .... \quad (٦)$$

فإن:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

وعليه تتحول المعادلة (٥) إلى:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

أو

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0} \quad .... \quad (٧)$$

وهي معادلة الحركة التوافقية البسيطة لدائرة LC حيث المتغير فيها هو الشحنة q والتي تناظر الإزاحة (المتغيرة) x أو y في حالة الزنبرك. وواضح من (٧) أن التردد الزاوي لدائرة LC هو:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \quad .... \quad (٨)$$

وبالتالي زمنها الدوري هو:

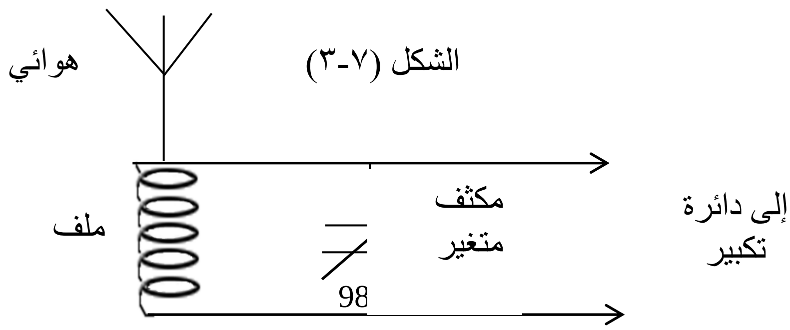
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}} \quad .... \quad (٩)$$

وعليه يكون التردد :

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}} \quad .... \quad (١٠)$$

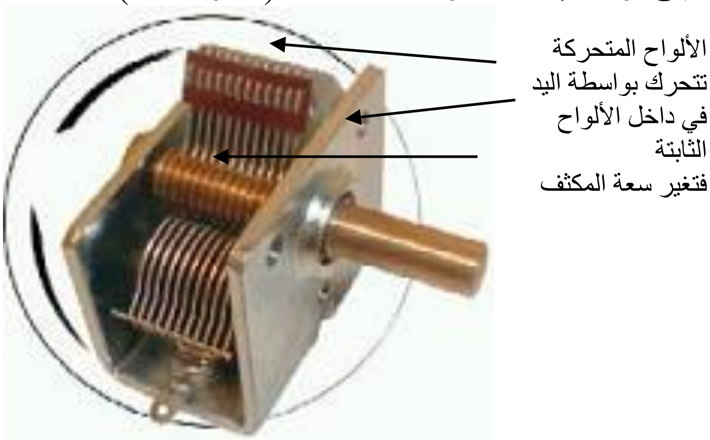
ولذلك عزيزي الدارس،،

نجد أن دائرة المكثف دائرة هامة جداً في أجهزة الراديو أو الإرسال الإذاعي حيث يمكن عن طريق هذه الدائرة والتي تسمى **بدائرة الرنين** ارسال او استقبال ترددات اذاعية مختلفة وذلك بتغير سعة المكثف و هو الأسهل تغيرا من تغير L للملف . فإذا فتحت أي جهاز راديو ستجد ملفاً ومكثفاً متغير السعة بحيث يمكن عند تحريك مؤشر الراديو تغيير سعة المكثف الموصل مع المؤشر عن طريق خيط . المهم هو اختيار الملف المناسب والمكثف المناسب بحيث يمكن استقبال الترددات المناسبة التي تذيع عليها المحطات الإذاعية (انظر الشكل أدناه)



الشكل (٧-٣)

في الشكل دائرة رنين لجهاز راديو حيث تؤثر الترددات المختلفة المنبثة من المحطات الإذاعية المختلفة على الإلكترونات الحرة في الهوائي والملف الموصل معه فتهتز الإلكترونات حسب هذه الترددات. وتقوم دائرة الرنين LC باختيار التردد الذي يتوافق مع سعة المكثف C والمحاثة L وفق المعادلة (١٠) ويمكن تغير C بواسطة المكثف المتغير السعة إلى تردد الإذاعة المرغوب سماعها (أنظر الشكل).



الشكل (٣ - ٨)المكثف متغير السعة

مثال

دائرة رنين في راديو يستقبل المحطات الإذاعية التي تذيع على الموجات المتوسطة الطول MW (Medium Wave) أي على ترددات تتراوح بين ٦×١٠^{٥}Hz و $١,٥\times١٠^{٦}$Hz [أي بين KHz ٦٠٠ كيلو هيرتز = موجة طولها 500m و بين MHz ١,٥ كيلو هيرتز =موجةطولها 200m] فإذا كانت محاثة الملف $L=10^{-4}$ Henry فأوجد مدى سعة المكثف المتغير في الدائرة التي تمكن من التقاط كل هذه المحطات في مدى الترددات المذكورة.

الحل:

بما ان :سرعة الضوء =تردد الموجة × طولها.

سرعة الضوء = ٣×١٠^{٨}m/s ومنها يتم الحصول على أطول الموجات

التردد $$f = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\mathrm{LC}}}$$

اذن $$f^2 = \frac{4\pi^2}{\mathrm{LC}}$$

أي $$\mathrm{C} = \frac{4\pi^2}{f\ \mathrm{L}}$$

وعليه السعه C_1 للتردد الأول 6×10^{5} Hz هو

$$C_1 = \frac{39.51}{36\times10^{10}\times10^{-4}} = 1.1\times10^{-6}\ F = 1.1\ \mu F$$ (مايكرو فاراد)

[μ - تُنْطَق مايكرو وتساوي واحد على مليون] [Farad = F]

$$C_2 = \frac{39.51}{2.25\times10^{12}\times10^{-4}} = 17.55\times10^{-8} = 1755\times10^{-6} = 1755\ \mu F$$

أي أن المكثف المتغير السعه المطلوب يجب أن تتراوح سعته بين

$1.1\mu F$ و $1755\mu F$

الطاقة في دائرة LC:

عزيزي الدارس،،

معادلة الحركة التوافقية البسيطة للزنبرك

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$

ولدائرة LC هي المعادلة (٧) أي:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0} \quad .... \quad .... (٧)$$

وقد ذكرنا من قبل أن : الإزاحة x في حركة الزنبرك في حركة توافقية تقابل الشحنة q في دائرة LC . وبما ان قوة الإعادة في حالة الزنبرك هي

$$F = - k\ x$$

فإن ما يقابلها في حالة دائرة LC هي $\frac{q}{C}$ وهي من (٣) تساوي فرق الجهد V بين طرفي المكثف وواضح من المقارنة أنه بينما يختزن الزنبرك عند مطه أو ضغطه طاقة الوضع E_p و التي تتحول الى طاقة حركة للحركة التوافقية البسيطة حيث $E_p = \frac{1}{2}mv^2$ v السرعة وm الكتلة فإن طاقة الوضع الكهربية يختزنها المكثف الذي شحنته q وسعته C بينما تقوم المحاثة L مقام الكتلة . وعليه فمادامت طاقة الوضع في الزنبرك

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k\ x^2} \quad .... (١١)$$

فمن التناظر بين معادلتي الحركة التوافقية البسيطة للزنبرك ودائرة LC فسنجد أن طاقة الوضع في دائرة LC في المكثف وهي

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2C}q^2} \quad .... (١٢)$$

لأن k ثابت القساوة للزنبرك والذي يتناسب عكسياً مع المرونة تقابله مقلوب سعة المكثف أي $\frac{1}{C}$. من الممكن استنتاج هذه الطاقة من تعريف الشغل حيث

$$dW = F\,dx$$

وبالتالي في حالة المكثف هي

$$dW = V\,dq$$

حيث V تقابل قوة الإعادة وعليه تكون طاقة الوضع المختزنة في المكثف

$$dE_p = V\,dq$$

وبإستعمال المعاجلة (٣)

$$dE_p = q\,dq/C$$

وعليه

$$E_p = (1/C)\int q\,dq = (1/2C)\,q^2$$

وهي نفس المعادلة (١٢).

أيضا تغير الشحنة في الملف والمكثف تقابل طاقة الحركة في الزنبرك حيث نجد أن التسارع في معادلة الحركة التوافقية البسيطة للزنبرك يقابله في المعادلة (٧) d^2q/dt^2 ومنها نجد أن ما يقابل السرعة هو

$$I = dq/dt$$

وهو معدل تغير الشحنة في الزمن وهو التيار. ايضا في المعادلة (٧) نجد أن L تناظر الكتلة m في معادلة حركة الزنبرك. وبناء على ذلك فإن طاقة الحركة

$$E_p = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

يناظرها في دائرة LC

$$E_k = \tfrac{1}{2}\,L\,I^2 \qquad (١٣)$$

ما يجب ملاحظته أن طاقة الوضع في دائرة LC هي الطاقة الكهربية (الشحنة) المخزونة في المكثف حسب المعادلة (١٢), بينما طاقة الحركة هي الطاقة المغنطيسية في الملف حسب (١٣).

أسئلة تقويم ذاتى

؟

١. عرف المكثف .
٢. ما هي العوامل التي تتوقف عليها سعة المكثف؟
٣. ماذا نعني بسماحية العازل ثم اذكر وحدتها
٤. عرف الملف ثم وضح ذلك بالرسم
٥. اكتب نص قانون كيرشوف لدائرة LC .
٦. قارن بين طاقة الوضع في حركة الزنبرك وطاقة الوضغ في دائرة LC.
٧. قارن بين طاقة الحركة في حركة الزنبرك وطاقة الحركة في دائرة LC.

الخلاصة

عزيزي الدارس،،

تعمقنا في هذه الوحدة في دارسة الأنظمة المهتزة ، واستعرضنا الاهتزازات الميكانيكية وذلك بدارسة الاهتزازت النابضة (الزنبركية) . كما ان الزنبركات يمكن توصيلها على التوالي وعلى التوازي . ثم تعرفنا ايضا علي حركة البندول البسيط وكيفية حساب القوة والتردد الزواي والزمن الدوري. كما ناقشنا السلوك الاهتزازي للأسلاك وللأجسام الطافية.

وفي الختام تأمل أن تكون هذه الوحدة قد حققن الأهداف الواردة في بدايتها.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس،،

في الوحدة القادمة سنتناول تراكب الحركات التوافقية ذات الأطوار المتساوية أو المختلفة

نرجو أن تكون وحدة مفيدة لك.

اجابات التدريبات:

التدريب الاول

(١) $k= 10^4\ kg/s^2$

(٢) $\omega=10 rad/s$, $T=6.28s$

التدريب الثاني

$$k = \frac{YA}{L_0} = \frac{6\times10^{10}\times3.14\times4^{2}\times10^{-6}}{2} =$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

التدريب الثالث

من الشكل(٨-٣) $(l-y)^2 + x^2 = l^2$ نجد ان

$\ell = x^2/2y$, $y = x^2/2\ell$

وبتعويض القيمة y في قانون الطاقة الوضعية $E = mgh$ نتحصل علي

$$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

التدريب الرابع

f =20 Hz , m =1000× 2× 0.25=500kg

مسرد المصطلحات:

Vibrating Systems	الأنظمة المهتزة
proportionality limit	حد التناسب
Elastic limit	حد المرونة
spring constant	ثابت الزنبرك
Restoring force	قوة الاعادة
stiffness constant	ثابت القساوة

Strain	الانفعال
Stress	الإجهاد
Young’s Modulus	معامل يونق Y
coil	ملف
capacitor	مكثف

محتويات الوحدة الرابعة

مقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،،

مرحباً بك إلى الوحدة الرابعة من هذا المقرر وهي بعنوان تراكب الحركات التوافقية، لأن الحركات والاهتزازات التوافقية في الطبيعية ليست ذات نغمة اي تردد واحد. فلو ركزت برهة الى الأصوات التي تسمعها لإتضح لك أنها ليست ذات تردد اي نغمة واحدة و إنما ما تسمعه هو مجموع ترددات مختلفة . و لذلك سوف سنناقش جمع الاهتزازات أو الحركات التوافقية سواءً كانت هذه الحركات في مستوى واحد أو مستويات متعامدة . وتتالف الوحدة من قسمين حيث يحتوي القسم الأول علي خمس أجزاء. في الجزئين الأول والثاني نناقش تراكب اهتزازتين لها نفس التردد الزاوي ω ثم تراكب اهتزازتين توافقيتين تردداهما مختلفين.

أما في الجزء الثالث فسنناقش تراكب حركتين توافقيتين تردد الحركة الأولى الزاوي ω_1 لا يساوي تردد الحركة الثانية الزاوي ω_2. وسنفترض أن $\omega_2 > \omega_1$. ثم نناقش تراكب عدد كبير من الاهتزازات ذات التردد الواحد ومن ثم نتقل الي الجزئين الرابع والخامس حيث سنتطرق إلى جمع الاهتزازات التوافقية البسيطة المتعامدة والمتساوية

التردد. وأخير نشرح كيفية إيجاد محصلة اهتزازتين متعامدتين بالطريقة البيانية . وفي القسم الثاني ندرس محصلة الاهتزازات التوافقية البسيطة المتعامدة ذوات الترددات و الزاويا المختلفة. ثم نناقش أشكال ليساجو.

عزيزي الدارس،، لقد ذيلنا هذه الوحدة بسرد شامل للمصطلحات العلمية التي وردت في النص الرئيسي و تدريبات وأسئلة تقويم ذاتي، مع حلول وتعليقات، وأسئلة التعيين الخاص بها والتي تقدمها لمرشدك الميداني.

مرحباً بك إلى الوحدة مرة أخرى ونرجو أن تشاركنا في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة يتوقع منك أن تكون قادراً علي أن:

١. تحسب محصلة جمع الإهتزازات لحركة التوافقية
٢. تحلل تراكب اهتزازتين لها نفس التردد الزاوي ω ثم تراكب اهتزازتين توافقيتين ترداهما مختلفين
٣. تستنتج تراكب عدد كبير من الاهتزازات ذات التردد الواحد
٤. تستنبط كيفية جمع الاهتزازات التوافقية البسيطة المتعامدة والمتساوية التردد
٥. تتقن ايجاد محصلة الاهتزازات التوافقية البسيطة المتعامدة ذوت الترددات و الزاويا المختلفة ثم دارسة أشكال ليساجو.
٦. ترسم أشكال ليساجو للاهتزازات التوافقية البسيطة .

•

٤.جمع الإهتزازات Superposition of Vibrations

1.4. تراكب الحركات التوافقية

Superposition of Harmonic Motion

عزيزي الدارس،،

إن الحركات والاهتزازات التوافقية في الطبيعية ليست ذات نغمة اي تردد واحد. فلو ركزت برهة الى الأصوات التي تسمعها لا تضح لك أنها ليست ذات تردد اي نغمة واحد وإنما ما تسمعه هو مجموع ترددات مختلفة .

وفي هذه الوحدة سوف سنناقش جمع الاهتزازات أو الحركات التوافقية سواءً كانت هذه الحركات في مستوى واحد أو مستويات متعامدة . الافتراض الأساسي هو أن:

محصلة اهتزازتين توافقيين أو أكثر هي ببساطة حاصل جمع الاهتزازات الفردية

١.١.4. تراكب اهتزازتين لها نفس التردد الزاوي ω

لنفترض وجود حركتين توافقيتين يؤثران على نفس المنظومة في اتجاه X كالآتي :

$$x_1 = A_1\, cos\, (\omega\, t + \varphi_1)$$
$$x_2 = A_2\, cos\, (\omega\, t + \varphi_2) \qquad (٤-١)$$

حيث φ_1 و φ_2 زوايا ط

عندما الزمن $t = 0$ فإن المعادلتين تصبحان :

$$x_1 = A_1\, cos\, (\varphi_1)$$
$$x_2 = A_2\, cos\, (\varphi_2) \qquad (٤-٢)$$

فلو كانت $\varphi_1 = \varphi_2 =$ ... x

$$cos\,(0) = 1$$

وبما أن: $A_1\, cos\, (\varphi_1) < A_1$ ، $A_2\, cos\, (\varphi_2) < A_2$

فإن أقصى قيم للحركتين لا تتطابق ، أنظر الشكل (٤-١) الذي يوضح (٤-١) و(٤-٢) و A_1 و A_2 وحاصل جمع $x_1 + x_2$

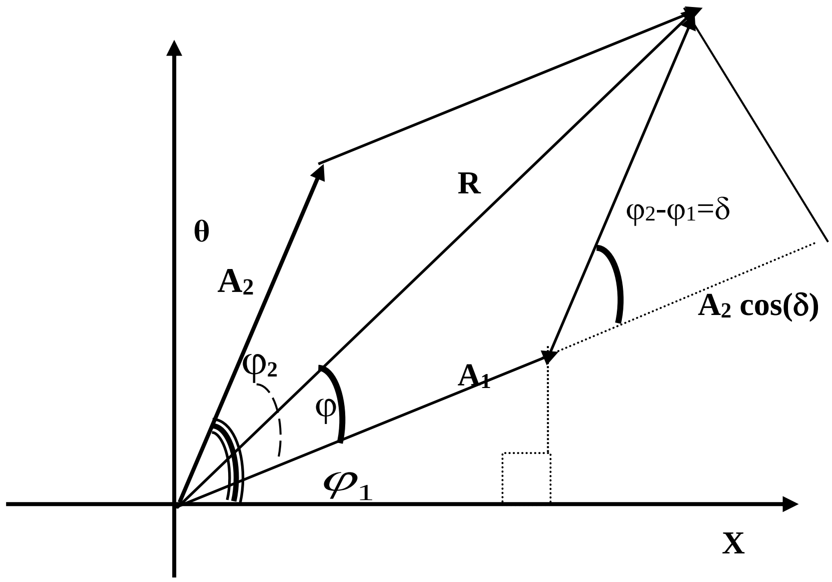
عزيزي الدارس ،،

واضح في الشكل (٤-١) أن جميع الازاحتين x_1 وx_2 هو جمع لقيم الاثنين عند كل قيم $\omega\, t$. اما من الناحية الرياضـية عزيزي الدارس سنفرض أن محصلة جميع الحركتين التوافقيتين (٤-٢) هي :

$$x = x_1 + x_2 = A_1\, cos\, (\omega\, t + \varphi_1) + A_2\, cos\, (\omega\, t + \varphi_2)$$

$$x = R\, cos\, (\omega\, t + \varphi) \qquad (٤-٣)$$

أي أن محصلة الجمع لها اتساع R ونفس التردد للاهتزازتين أي ω ولكن لها طور مختلف φ . نعود مرة أخرى للاستعانة بالمتجهات الدوارة لتوضيح المعادلة (٤-٣) وهذه المتجهات هي الاتساعات A_1 و A_2 ومحصلة الاتساع



شكل(٤-٢): جمع المتجهات الممثلة للحركات التوافقية البسيطة في اتجاه x والمحصلة هي : R

$x = \cos(\omega t + \varphi)$

$$(A_1 + A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1))^2 + A_2^2\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$= A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) + A_2^2(\cos^2(\varphi_2-\varphi_1) + \sin^2(\varphi_2-\varphi_1))$$

$$\boxed{R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \qquad \text{.....................(٤-٤)}$$

واضح أن المعادلة (٤-٤) هي معادلة وتر متوازي الأضلاع المعروفة

أيضاً من الشكل (٤-٢) نجد أن:

$$\boxed{R\cos(\varphi-\varphi_1) = A_1 + A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \qquad \text{..............................(٤-٥)}$$

حيث يمكن إيجاد المحصلة R من A_1 وA_2 و φ_1 وφ_2 معلومة. من معطيات الاهتزازتين الأساسيتين أيضاً في شكل (٤-٢) نجد أن:

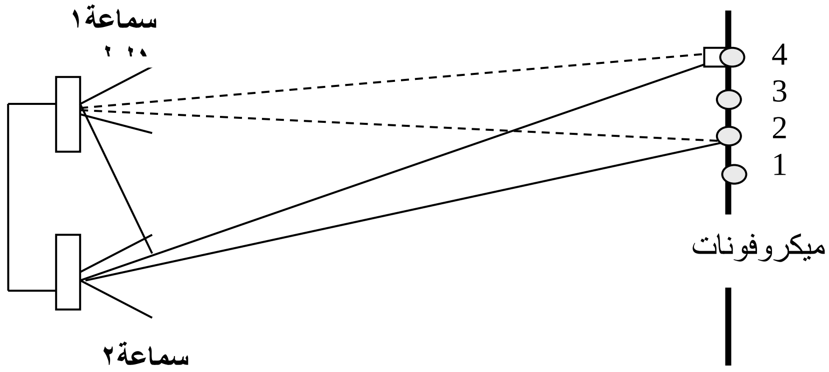
$$\boxed{R\sin(\varphi-\varphi_1) = A_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)} \qquad \text{..............................(٤-٦)}$$

حيث يمكن استخدامها بدلاً عن (٥ ... R ونجد ظل الزاوية $\tan(\varphi-\varphi_1)$. والخلاصة هي أن محصلة جمع حركتين توافقيتين بسيطتين متساويتي التردد الزاوي ω هي حركة توافقية اتساعها R وترددها الزاوي ω وطورها φ .

$$x = x_1 + x_2 = R \; cos\,(\omega\, t + \varphi)$$

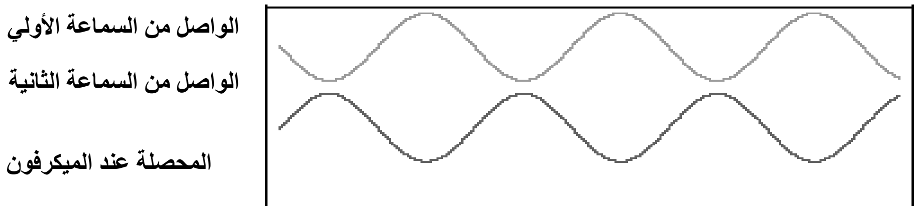
و ببساطة إذا كان ممكناً حساب x_1 وx_2 في أي لحظة فإن x هي حاصل جمع لقيمتين .

نموذج لما يحدثه فرق الطور في الشكل سماعتان كبيرتان مثل تلك التي تستعمل في الاحتفالات موصلتان إلى مصدر صوتي واحد (مثلاً جهاز تسجيل).



الشكل (٣-٤) أ الميكرفون (اللاقط)

إذا كان الميكرفون (اللاقط) يوجد عند النقطة ٢ فلا يوجد فرق في الطور بين الصوتين الواصلين إلى تلك النقطة من المصدرين لأن المسافتين من المصدرين متساويتان. أما إذا نقلنا الميكرفون إلى النقطة ٤ مثلاً فإن المسافة من السماعة ٢ تكون أطول من المسافة من السماعة ٢ وبالتالي يصل الصوت الصادر من السماعة ٤ متأخراً عن ذلك الذي يصل من السماعة الأولى ويكون هناك فرق في الطور فإذا كان مصدر الصوت يصدر تردد واحد كما في الشكل



فرق الطور π أو ٣ π أو ٥π ...إلخ فعند الميكرفون يصبح الصوت الواصل =صفر

كما سنجد أن هناك فرق بين النقطة ١والنقطة ٤ حيث يكون:

- فرق الطور ٠ أو ٢π أو ٤π
- أو ..... تكون المحصلة مضاعفة .

هـذه الظـاهرة سـتقابلك فـي الضـوء فـي حالـة الحيـود والتـداخل. و التـي تحـدث ظـاهرة الصفارة عندما يرتد الصوت من السماعة الى الميكرفون مرة اخري أو بالإنعكاس.

أسئلة تقويم ذاتي

١. متي تتساوي الإزاحة x مع الاتساع $\mathbf{A}$ في المعادلات أدناه:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

وإذا كانت $R=A_2=A_1$ أكتب معادلات R وx في هذه الحالة .

٢. إذا افترضنا أن الإزاحة للحركتين التوافقيتين مركبة حيث $Z_1 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}$ و $Z_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$

أوجد محصلة المركبة Z.

٤, مختلفان :

عزيزي الدارس،،

في هذه المرة سنناقش تراكب حركتين توافقيتين تردد الحركة الأولى الزاوي ω_1 لا يساوي تردد الحركة الثانية الزاوي ω_2 وسنفترض أن$\omega_2 > \omega_1$. فإذا كان اتساع الحركة الأولى يساوي اتساع الحركة الثانية يساوي A وذلك من أجل تبسيط المسألة وكانت زاوية الطور في البداية تساوي الصفر,فإن:

$$x_1 = A \cos(\omega_1 t)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_2 t)$$

.......................(٤-٧)

(أنظر الشكل ٣-٤).

وعليه تكون المحصلة:

$$x = A(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$$

.......................(٤-٨)

عزيزي الدارس من حساب المثلثات نجد ان :

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

.... (٤-٩)

وأيضاً :

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

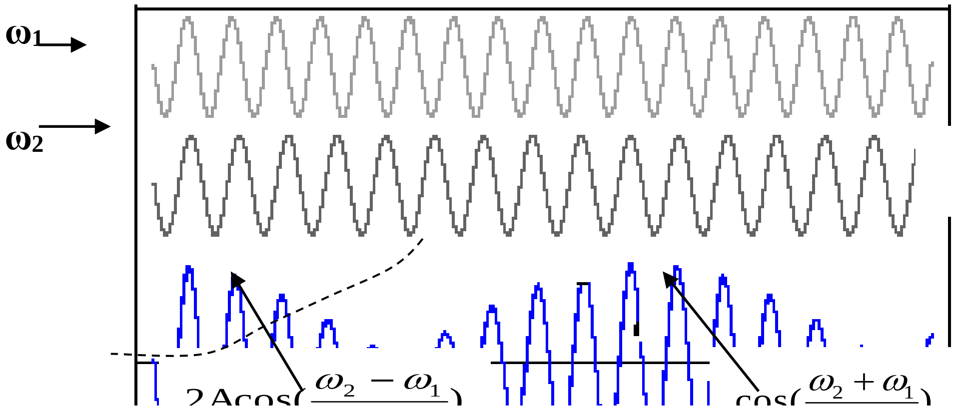
(٤-١٠)

وعليه يتضح (٤-٩) هي :

$$x = 2\,A\cos\left(\frac{(\omega_2+\omega_1)t}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right) \qquad (١١-٤)$$

واضح في المعادلة (١١-٤) أن هناك اهتزازتان متداخلتان في إهتزازة واحدة (أنظر الإهتزازة الأسفل في الشكل (٣-٤)).

اولاً: اهتزازة ترددها $\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$ وهي الإهتزازة الاسفل في الشكل التالي ذات التردد الكبير.



الشكل (٤-٤): الرسم الأسفل هو حاصل جمع الإهتزازتين مختلفتي الترددات

ثانياً: اهتزازة ترددها $\frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ وواضح أن ترددها صغير لانها حاصل طرح الترددين.

عزيزي الدارس ,

- الاهتزازة ذات التردد الأدنى $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ تقوم بتعديل اتساع الاهتزازة ذات التردد الأعلى $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$
- و لو كانت الاهتزازتان الأصليتان نغمات صوتية ذات ترددات ω_1 و ω_2 فإن النغمة المسموعة تكون هي اهتزازه ترددها متوسط ترددات الاهتزازتين أي $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ولكن في صورة ضربات (Beats) أو نبضات.
- ويكون تردد هذه النبضات هو متوسط الفرق بين الترددات الزاوية للاهتزازتين أي $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ وتحدث هذه بصورة واضحة عندما تكون ω_1 قريبة من ω_2 .

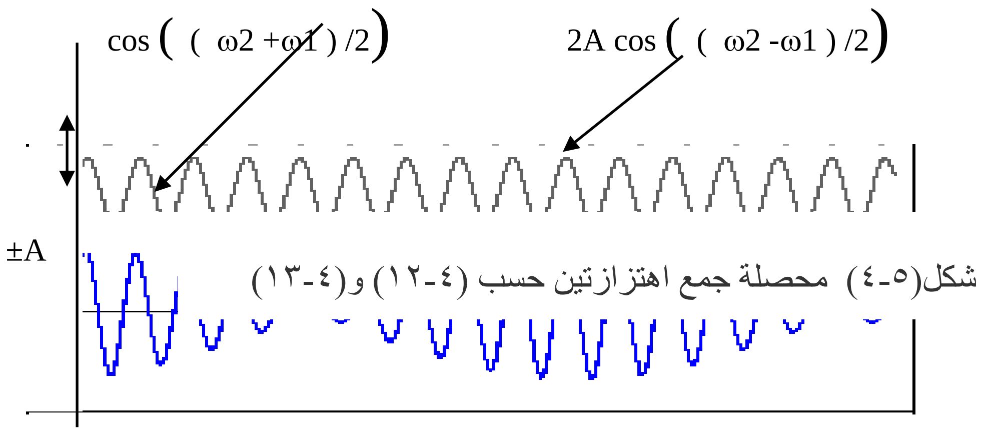
وبعبارة أخرى فإنه بالرغم من أن الاتساع الأقصى لمحصلة الاهتزازتين هو $\pm 2A$ إلا أن هذا الاتساع يتغير بواسطة اهتزازة اخرى ترددها الزاوي $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ بحيث يصبح الاتساع المتغير للنبضات هو :

$$\boxed{x_o = \pm 2A\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}} \qquad (٤-١٢)$$

ولذلك تصبح محصلة الاهتزازتين هي :

$$\boxed{x = x_o \cos\frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2}} \qquad (٤-١٣)$$

في الشكل (٤-٤) رسم الخط المتقطع الذي تميل حدوده الاتساع النظرية حسب المعادلة (٤-١٢) وهو في الواقع غير موجود ويكون الشكل الحقيقي للمحصلة (٤-١٣) كما في الشكل (٤-٥) .



شكل(٤-٥) محصلة جمع اهتزازتين حسب (٤-١٢) و(٤-١٣)

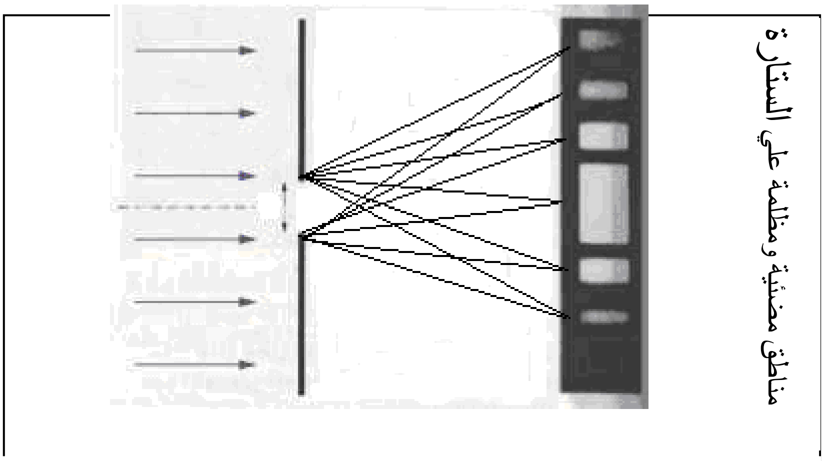
اسئلة تقويم ذاتي

١. بجمع إهتزازتين مختلفتي التردد يمكن الحصول على إهتزازة واحدة, أشرح.
٢. استنتج الزمن الدوري للضربة وقارنها بالزمن الدوري للاهتزازة إذا كانت $f_1=600\ Hz$ و $f_2=600\ Hz$ (حيث f = التردد).

٣,١,٤. تراكب عدد كبير من الاهتزازات ذات التردد الواحد :

عزيزي الدارس،،

الآن سوف ننتقل الي موضوع تراكب عدد كبير من الاهتزازات ذات التردد الواحد وهو موضوع هام جداً في البصريات حيث يحدث تداخل الضوء ذو التردد الواحد المار خلال فتحة بسبب وجود فروق طور بين شعاع وآخر مما ينتج عنه النقاط المختلفة إضاءة أو ظلام حسب محصلة التراكب .



الشكل(٦-٤)أ: حيود الضوء المار خلال فتحة واحدة ضيقة في حاجز

في الشكل(٥-٤) مصدر ضوئي أحادي التردد (لون واحد) أمامه حاجز به فتحة. المتوقع هو سقط الضوء على منطقة النقطة (أ) مادام الضوء يسير في خطوط مستقيمة ولكن من خواص الضوء المعروفة الحيود عند حواف الحواجز والفتحات كما موضح في الشكل. ولذلك نجد أن الضوء يصل الى مناطق مختلفة على الستارة (مثلا المنطقة (ب)) بعيدا عن المنطقة حول (أ) المتوقع وصوله اليها. لاحظ أن المسافات التي تقطعها الأشعة

من الفتحة الى النقاط المختلفة على الستارة تختلف من شعاع إلى آخر لذلك نجد أن هناك فروق في الطور بين الأشعة المختلفة ولذلك نجد على الستارة مناطق مضيئة هي التي يكون فيها فروق الطور بين الأشعة المختلفة الواصلة إليها هي إما صفر أو ٢π أو ٤π..... إلخ أي موجة كاملة (اهتزازة كاملة) أما المناطق المظلمة أو المعتمة فيكون فروق الطور بين الاشعة الواصلة اليها هي ٣ π ، π، . وهناك مناطق شبه مظلمة تتدرج بين المناطق المضيئة والمظلمة .

الشعاع الأول

الشعاع الثاني

محصلة جمع الشعاعين

الشعاع الأول
الشعاع الثاني

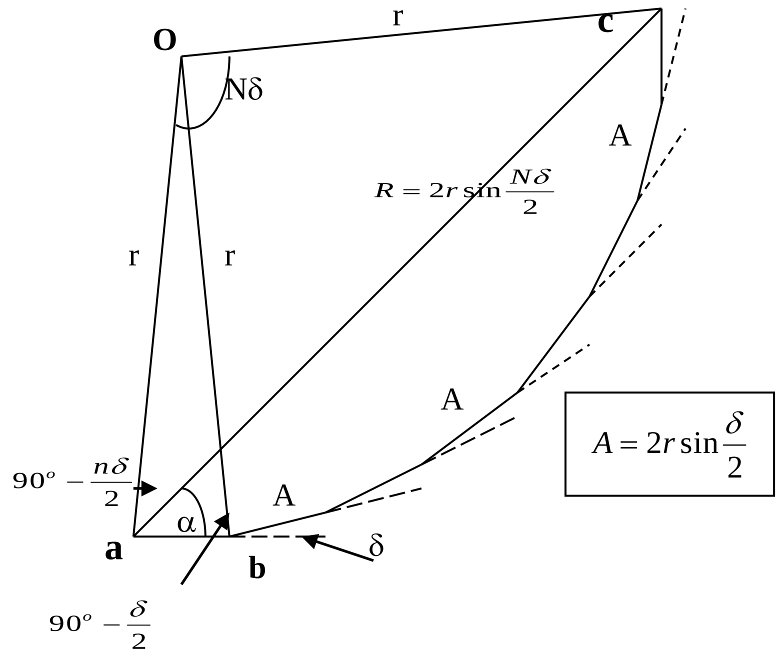
محصلة جمع الشعاعين

الشكل (٦-٤)ب :حاصل جمع إهتزازتين بينهما فرق طور :
(أ) صفر أو ٢π ....الخ (الإتساع يساوي 2A)
(ب) π أو ٣π ...الخ (الإتساع يساوي الصفر)

قد تسأل نفسك عزيزي الدارس لماذا هنا نتحدث عن الضوء أمواج بينما كنا نتحدث عن تراكب اهتزازات؟ . ونحن لاحقاً سندرس الآن سننظر الى الستارة حيث ما يصل إليها هو محصلة تراكب اهتزازات لأن الموجة في النهاية ما هي إلا إهتزازة يمكنها الانتشار في الوسط الذي يحملها.

وبناء على ذلك سنفرض أن هنالك N اهتزازة كلها ذات تردد زاوي واحد ω واتساع واحد A وان هناك فرق في الطور بين الاهتزازة والأخرى مقداره δ بحيث لاتوجد أكثر من اهتزازة لها نفس الطور. [ذلك لأن الأشعة الواصلة الى أي نقطة تقطع مسافات مختلفة .

باستخدام المتجه الدوار وفي هذه الحالة الاتساع A بحيث يكون فرق الطور بين A لاهتزازة ما والتي تليها هو δ كما في الشكل (٧-٤)



شكل (٤-٧) متجهات N حركة توافقية بسيطة متساوية الاتساع A ومتساوية فرق الطور بين الحركة والتي تليها مقداره δ والمحصلة هي R

$$\mathbf{A\ cos\ (\omega\ t) + A\ cos\ (\omega\ t+\delta) + A\ cos\ (\omega\ t+2\delta) + ... + A\ cos\ (\omega\ t+(N-1)\delta)} \quad (١٤-٤)$$

أي أن حاصل جمع N حركة توافقية بسيطة هي :

$$= R\ cos\ (\omega\ t+\alpha) =$$
$$= A(cos\ \omega\ t\ +\ cos\ (\omega\ t\ +\delta) + cos\ (\omega\ t+\delta ٢) + ...+ cos(\ \omega t+(n-1)\delta) \quad (١٥-٤)$$

يمثل جزء من دائرة مركزها O ونصف قطرها r وكل المثلثات في الشكل زاوية الرأس فيها δ والضلع المقابل لها هو اتساع الحركة التوافقية A . بإنزال عمود من رأس المثلث بحيث يقسم الزاوية δ إلى نصفين ويقسم الضلع A إلى نصفين نحصل على مثلثين قائمي الزاوية حيث نجد أن :

$$r\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{A}{2}$$

وفيها نجد أن :

$$\boxed{A = 2r\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$ .... (٤-١٦)

زاوية الرأس المقابلة لـ R في المثلث OAC هي $N\delta$. لو أنزلنا عمود يقسم هذه الزاوية نصفين فيقسم الضلع R إلى نصفين وسنجد أن :

$$\frac{R}{2} = r\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

أي أن :

$$\boxed{R = 2r\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}$$ .... (٤-١٧)

ومن(٤-١٦) وبالتعويض في(٤-١٧) عن $2r$ نجد أن :

$$\boxed{R = A\,\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}}$$ ....(٤-١٨)

من المثلث oab والمثلث oac نجد أن :

$$\alpha = o\hat{a}b - o\hat{a}c$$

ولكن الزاوية $o\hat{a}b = 90 - \frac{\delta}{2}$ مثلها مثل الزاوية $o\hat{b}a$.

بينما الزاوية $o\hat{a}c$ هي $90 - \frac{N\delta}{2}$

[لا تنسى أننا كنا نصفنا المثلث *oac* لكي نحصل على هذه القيمة]

وعليه :

$$\alpha = 90 - \frac{\delta}{2} - \left(90 - \frac{N\delta}{2}\right)$$

$$\boxed{\alpha = (N-1)\frac{\delta}{2}}$$ .... (٤-١٩)

وهي زاوية طور محصلة الحركة الت... حركة توافقية بسيطة بين كل حركة وأخرى زاوية طور δ هو :

$$X = R\cos(\omega t + \alpha)$$

بالتعويض نتحصل علي

$$\boxed{x = A\,\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\cos\left(\omega t + \frac{(N-1)\delta}{2}\right)}$$ ....(٤-٢٠)

عزيزي الدارس،،
هذه المعادلة مليئة بالمعلومات التي تحتاج منا الى وقفة لفهمها وبالذات في الجزء الخاص بمحصلة الاتساع R حيث من (٤-٢٠) نجد أن:

$$\boxed{R = A\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}} \quad \text{..............} \quad (٤\text{-}٢١)$$

هذه الأهمية ناتجة من أن R ليست قيمة واحدة لعدد N حركة توافقية بسيطة. فإذا رجعنا لمثالي الضوء المار خلال فتحة في حاجز ووصوله الى الستارة فإن R على الستارة تختلف من نقطة إلى أخري وبالتالي تختلف قيمة R حسب فروق الطور للأشعة الساقطة على النقطة المعينة.

فإذا كانت N كبيرة فإننا وبدون خطأ كبير يمكن أن نقول أن $N-1 \approx N$
وبالتالي تصبح :

$$\alpha = (N-1)\frac{\delta}{2} \approx \frac{N\delta}{2}$$

ومنها نجد أن:

$$\boxed{\delta = \frac{2\alpha}{N}} \quad \text{..} \quad (٤\text{-}٢٢)$$

ولكن كلما كبرت N تصبح زاوية الطور δ صغيرة .
وبالتالي فإن :

$$\sin\frac{\delta}{2} \to \frac{\delta}{2} = \frac{\alpha}{N}$$

ومنها تصبح معادلة محصلة الاتساع هي :

$$\boxed{R = A\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} = A\frac{\sin(\alpha)}{\frac{\alpha}{N}} = NA\frac{\sin\alpha}{\alpha}} \quad \text{.............} \quad (٤\text{-}٢٣)$$

لاحظ عزيزي الدارس،،
وجود القيمة NA في المعادلة (٤-٢٣) وهي تساوي مجموع اتساعات الحركات التوافقية البسيطة كلها. نعود مرة أخرى الى ظاهرة حيود الضوء أحادي

التردد الموضح في الشكل (٤-٦)أ نلاحظ أن فروق الطور بين الأشعة المتجمعة حول النقطة (أ) إما صغيرة جداً أو تساوي الصفر وفي هذه الحالة وحسب المعادلة (٤-٢٣) ستصبح قيمة $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ غير محددة، لأن $sin\ 0 = 0$ وهي مقسومة على $\alpha = 0$ ولكن بأخذ النهاية لهذه الكمية ولأن α صغيرة نجد أن :

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

($sin(\alpha) \approx \alpha$ عندما تكون α صغيرة جداً)

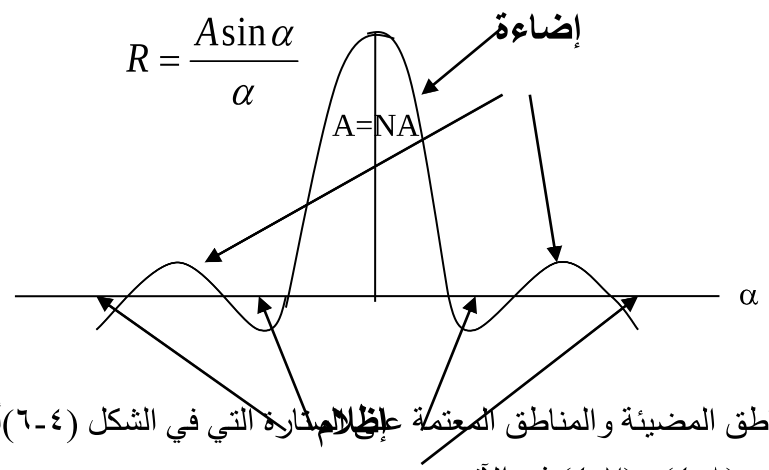
وعليه عند $\alpha = 0$ وبالتالي $\delta = 0$ تكون:

$$R = N\ A$$

وهي أقصى قيمة للاتساع لمجموع الحركات التوافقية البسيطة وتكون المحصلة

$$X = N\ A \cos(\omega\ t) \text{ .... } (24\text{-}4)$$

وبما أن ω للضوء كبيرة جداً (في نطاق 10^{12} Hz) فإن النقطة (أ) في الشكل (٤-٦)أ ستكون مضيئة وكذلك كل المنطقة حولها المقابلة للفتحة على الحاجز والتي يمر من خلالها الضوء . وبنفس الطريقة يمكن حساب R في المعادلة (٤-٢٣) لقيم α المختلفة بدلاً من $\alpha = 0$ في الاتجاهين كما هو موضح في الشكل (٤-٨) .



أعلى :المناطق المضيئة والمناطق المعتمة على الستارة التي في الشكل (٤-٦)أ

قارن بين الشكلين (٤-٨) و(٤-٧) في الآتي :

شكل (٤-٨): منحنى تغير $R = \frac{A\sin\alpha}{\alpha}$ مع تغير α

عندما تصبح $R = NA$ فإن $\alpha = 0$ ولأن $\alpha = N\delta$ ٢ أي أن $\delta = 0$ وبالتالي نحصل على خط مستقيم في اتجاه X في الشكل (٤-7) . أما عندما تكون $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ففي شكل (٤-٧) نحصل على نصف دائرة ومن المعادلة (٢٣-٤) نحصل على $R = \frac{2\,NA}{\pi}$ كما موضح في شكل (٨-٤) أما عندما تكون $\alpha = \pi$ في شكل (٨-٤) ففي شكل (٧-٤) ومن المعادلة $\alpha = N\delta$ ٢ لابد أن نحصل على دائرة وبالتالي تصبح $R = 0$
[طبعاً من المعادلة (٢٣-٤) فإن $\sin \pi = 0$ وهي النتيجة التي بني عليها الشكل(٤-٨)] .

أسئلة تقويم ذاتي

؟

١. ناقش تراكب عدد كبير من الاهتزازات ذات التردد الواحد، موضحا التفاصيل المهمة بالرسم

4.1.4. جمع الاهتزازات التوافقية البسيطة المتعامدة والمتساوية التردد

عزيزي الدارس ,,,

في هذا القسم سننظر في حالة اهتزازتين متعامدين (واحده في المستوىالأفقي X والأخرى في المستوى الرأسي Y) . مادمنا سنتحدث عن جمع إهتزازتين فمعنى هذا أننا سنوجد محصلة هاتين الاهتزازتين المتعامدتين وبالتالي فنحن سنتحدث عن حركة توافقية بسيطة **ثنائية الأبعاد** وليس كما كنا نتحدث في السابق عن حركات في خط مستقيم أي في بعد واحد.

و هذه الحركة ثنائية الأبعاد والتي يمكن تطويرها ببساطة الى حركة ثلاثية الأبعاد هي :

- هامه جداً في دراسة اهتزازات الذرات في البلورات .
- كذلك ذات أهمية خاصة في فهم ظاهرة الاستقطاب Polarization في الضوء و الذي يدرس بتفصيل أكثر في مقرر البصريات الفيزيائية.

نفترض أن هناك اهتزازتان لهما نفس التردد ω أحداهما أفقية والأخرى رأسية أي :

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

حيث A_1 اتساع الاهتزازة الأولى وA_2 اتساع الاهتزازة الثانية وφ_1 وφ_2 زوايا طور.
وفي الواقع يمكننا تبسيط الأمر لاحقاً لو افترضنا أن فرق الطور موجود في الاهتزازة yفقط بدون أن نرتكب خطأ كبيرا. أي أن :

$$x = A_1 \cos(\omega t)$$
$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$
...................(٤-٢٥)

حيث φ هي زاوية الطور للاهتزازة

طبعاً الجمع هنا لن يكون جمعاً مباشراً كما كان في حالة الاهتزازات التوافقية كما في المعادلة (٣-٤) و(٤-١٤) لأن الاهتزازتين متعامدتين ولكن هنا ولربط الاهتزازتين معاً في معادلة واحدة سنعوض عن قيم في الاهتزازة الثانية (y) من قيم مساوية لها نحصل عليها من الاهتزازة الأولى ونعود مرة أخرى للمعادلات (٤-٢٥) حيث نجد أن:

$$\boxed{\frac{x}{A_1} = \cos \omega t} \quad \text{......................................} \; (٤\text{-}٢٦)$$

بينما

$$\boxed{\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \; \cos \varphi - \sin \omega t \; \sin \varphi} \quad .... \; (٤\text{-}٢٧)$$

نبسط المعادلة (٤-٢٧) إذا تخلصنا من أيّ ارتباط للمعادلة بالزمن أي بالتعويض عن $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ بما يقابلها في (٤-٢٦) علماً بأن:

$$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$$

وبالتالي نجد أن:

$$\sin(\omega t) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)}$$

ومن (٤-٢٥) نجد أن :

$$\sin(\omega t) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^{\,2}}}$$

وباستعمال هذه العلاقة والمعادلة (٤-٢٦) في المعادلة (٤-٢٧) نحصل على :

$$\boxed{\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^{\,2}}}} \quad \text{...............} \; (٤\text{-}٢٨)$$

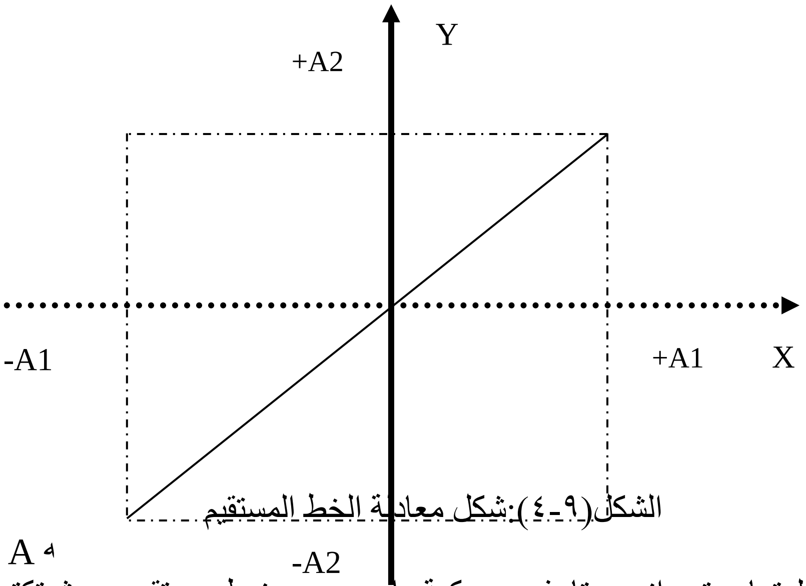
وهي معادلة تربط بين الحركة الرأسية والحركة الأفقية في معادلة واحدة. وهذه المعادلة لا تحتوي على ωt مباشرة وغير مرتبطة بالزمن إلا من خلال قيم y وx وبالتالي يمكن إيجاد قيمة y لأيّ قيمة x ولأي قيمة للطور φ. مثلاً إذا كانت $\varphi = 0$ أي لا يوجد فرق طور بين الاهتزازتين فإن :

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1}$$

وبالتالي :

$$\boxed{y = \frac{A_2}{A_1} x} \quad .... (٤-٢٩)$$

المعادلـة (٤-٢٩) هـي معادلـة خط مستقيم. ولأن y موجبـة عنـدما تكـون x موجبـة و y سالبة عندما تكون x سالبة فإن هذا الخط يمر بمركز الإحداثيات x y كما موضح في الشكل (٤-٩).



الشكل (٤-٩):شكل معادلة الخط المستقيم

أ ه A أي

أن الحـركتين المتعامـدتين انـدمجتا فـي حركـة واحـ ي خـط مسـتقيم حيـث تكتمـل الاهتـــزازة الكاملـــة مـــروراً علـــى هـــذا الخـــط مـــرتين ايابـــا وذهابـــاً حينمـــا $0 \le \omega t \le 2\pi$ وذلك بأخذ قيمة لكل من x و y عند قيمة كل ωt .

المعادلـة (٤-٢٨) معادلـة بسيطة و مباشـرة إذا علمنـا مقدار فـرق الطـور φ ولكـن هناك الكثير الذي لا يظهر لنا في صورتها تلك فمثلاً إذا افترضنا أن $\varphi = \frac{\pi}{2}$ فسنجد أن :

$$\frac{y}{A_2} = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}$$

وللتخلص من الجذر التربيعي نربع الجانبين فنحصل على:

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1} \quad .... (٤-٣٠)$$

وهي معادلة شكل إهليلجي ellipse (انظر التالي) فإذا كانت الاتساعات $A = A_2 =$ A_1 فإنها تصبح $x^2 + y^2 = A^2$ وهي معادلة دائرة نصف قطرها A . أي أن محصلة حركتين متعامدتين فرق الطور بينهما $\alpha = \frac{\pi}{2}$ تبدو كشكل اهليلجي خلال تغير ωt بين الصفر و π٢ وذلك بسبب تغير قيم x و y مع ωt حسب المعادلة (٢٨-٤) .

وعلى ذلك وللحصول على شكل أعم للمعادلة (٢٨-٤) سنقوم بتربيع جانبي المعادلة ولكن قبل ذك سنقوم بإعادة كتابتها كالآتي :

$$\boxed{\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\cos\varphi = -\sin\varphi\sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}}} \quad .... (٣١-٤)$$

وبالتربيع:

$$\frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\varphi + \frac{x^2}{A_1^2}\cos^2\varphi = \sin^2\varphi\left(1-\frac{x^2}{A_1^2}\right)$$

منها نتحصل علي

$$\frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\varphi + \frac{x^2}{A_1^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \sin^2\varphi$$

وفي النهاية نجد ان

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\varphi = \sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi} \quad (٣٢-٤)$$

واضح أن المعادلة (٣٢-٤) هي معادلة عامة للشكل الاهليلجي ellipse وهو شكل بيضاوي أخذ اسمه من اسم شجرة لها ثمرة بهذا الشكل (أشبه بثمرة الهجليج - انظر الشكل (٤-١٠)) .

من المفترض أن نحصل على المعادلة (٢٩-٤) إذا وضعنا ٠ = φ في (٢٩-٤) . حيث نجد :

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = \frac{2xy}{A_1 A_2}$$

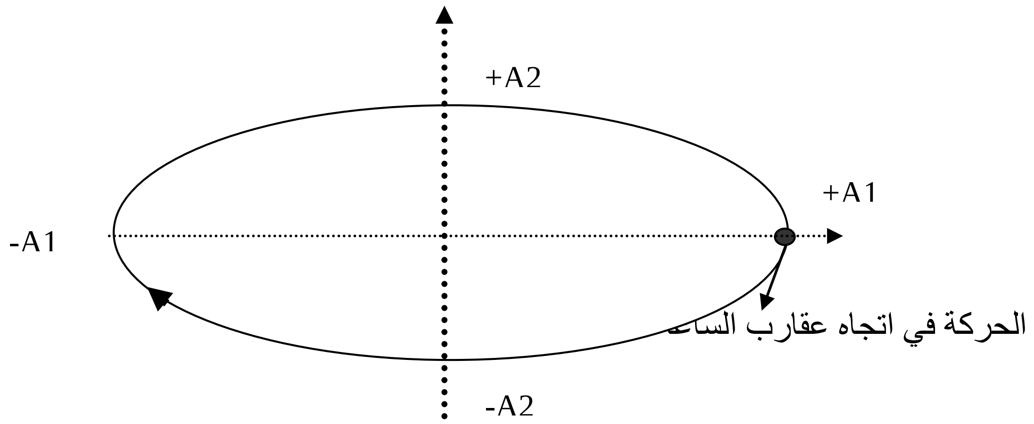
والواقع أنها لازالت في شكلها معادلة شكل اهليلجي وهي معادلة من الدرجة الثانية وحلها هو :

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

ومنه نجد أن :
$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1}$$

أي أن قيمة :
$$y = \frac{A_2}{A_1}x$$

أي نفس المعادلة (٤-٢٩) كما هو مفترض



الشكل(٤-١٠): الحركة في مسار اهليلجي (في اتجاه حركة الساعة ويمكن عكسها)

أما إذا كانت $\varphi = \frac{\pi}{2}$ فإننا نحصل مباشرة على المعادلة (٤-٣٠), أي معادلة شكل اهليلجي بسيط كما في الشكل إذا افترضنا أن $A_1 > A_2$. أما إذا كانت $A_1 < A_2$ فان الشكل سيكون أطول في المستوى الرأسي. ولكن إذا كانت $A = A_2 = A_1$ فأننا نحصل على دائرة. وعليه فعندما يكون فرق الطور ا بين الاهتزازتين التوافقيين المتعامدتين °٩٠ و إذا كانت هاتان الاهتزازتان المتعامدتان تؤثران على جسم واحد فإنه سيدور في مسار إهليجي بحيث يكمل دوره كاملة كلما زادت ωt بمقدار π٢ . وهذا يعني أن حركة الجسم هذه ستكون لها اتجاه إما مع عقارب الساعة أو في عكس اتجاه عقارب الساعة, فكيف نحدد الاتجاه؟. في المعادلة (٤-٢٥):

$x = A_1 \cos(\omega t)$

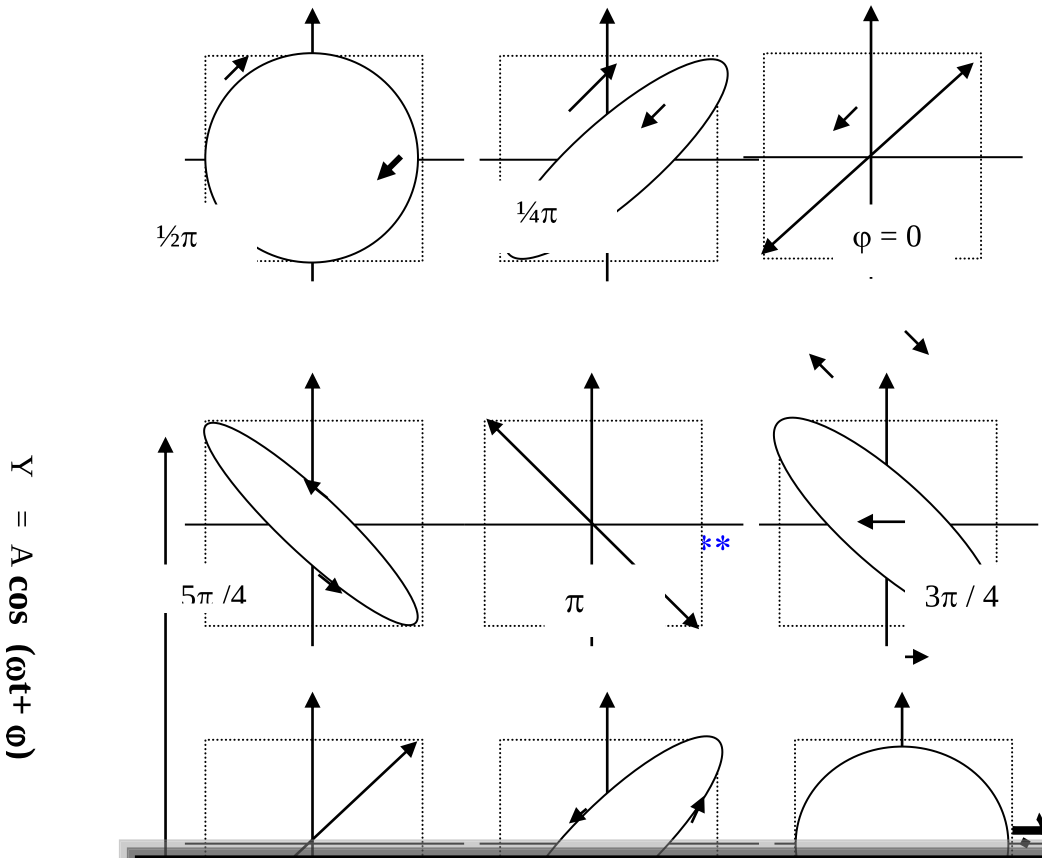
وكذلك نجد أن:

$$\boxed{y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -A_2 \sin(\omega t) \quad ....(٤\text{-}٣٣)}$$

فعدما [illegible]

ωt > صفر فإن x تقل (لأن أقصى قيمة لـِ $\cos(\omega t)$ هي ١ عندما

ωt = صفر), وعندها تكون y بالسالب. وهذا لا يكون إلا إذا كان الجسم يتحرك في اتجاه عقارب الساعة (انظر الشكل الاهليجي) .
المعـادلات (٤-٢٨) أو(٤-٣١) وكـذلك (٤-٣٢) يمكـن اسـتخدامها لإيجـاد محصـلة اهتزازتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد الزاوي ωعند أي فرق طور φ. الشكل التالي يوضح مسارات (الإزاحة) لتلك المحصلة لفروق الطور φ بين الصفر و ٢π .



شكل (١١ ... ة .

تدريب

استعمل معـادلات x و y في (٤-٣٢) لبرهـان علـى أن محصـلة الاهتزازتين المتعامدتين عندما تكون $\phi = \frac{\pi}{2}$ هي المعادلة

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

تقويم ذاتي

1. الحركـة الاهتزازيـة ثنائيـة الأبعـاد والتـي يمكـن تطويرهـا ببسـاطة الـى حركــة ....وهـــي مهمـــه جـــداً فـــي دراسـة ....البلـورات و أيضـا ذات أهميـة خاصة في فهم ظاهرة ....

٢. استخدم المعادلات (٤-٢٨) أو(٤-٣١) وكذالك (٤-٣٢) لإيجاد محصلة اهتزازتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد الزاوي ω عند أي فرق طور φ.

5.1.4 إيجـــاد محصـــلة اهتـــزازتين تـــوافقين متعامـــدتين بالطريقة البيانية

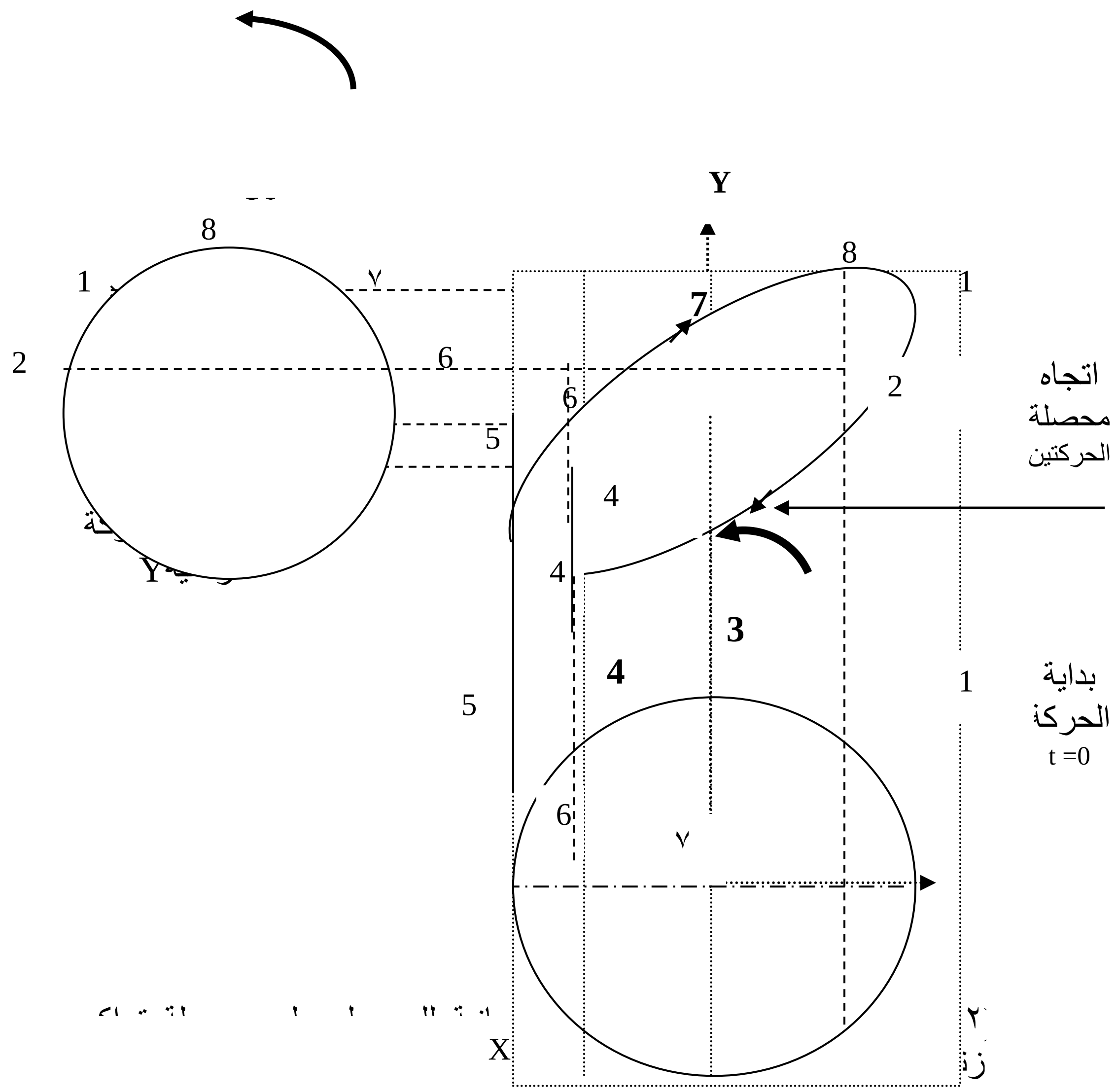
عزيزي الدارس ،،

الاهتزازتان المتعامدتان هنا لهما نفس التردد الزاوي ω .

هذه الطريقة طريقة توضيحية لا تغني عن المعادلات الرياضية (٢٨-٤) و(٤-٣٢) ولكنها مفيدة في توضيح ما يجري عند تراكب الاهتزازتين المتعامدتين ابتداء من t = صفر وحتى ωt = ٢π أي اهتزازة كاملة. والطريقة تعتمد على ما درسناه سابقا من أن الحركات التوافقية البسيطة هي مساقط لحركات دائرية. ولذلك فللاهتزازتين المتعامدتين :

$$x = A_1 \cos(\omega t)$$
$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi) \qquad (٤\text{-}٢٤)$$

نمثل كل اهتزازه بحركة دائرية منفصلة, وستشكل المساقط محصلة هاتين الحركتين. نصف قطر الدائرة الممثلة للحركة x هو اتساعها A_1 وللدائرة الممثلة للحركة y هو A_2 [شكل (١١-٤)].سنفرض أن فرق الطور φ وهو الزاوية بين موقع الحركة على محيط الدائرة المحتلة للحركة الرأسية (y) وبين المحور y . سنفرض أن الحركتين حول الدائرتين تسير في اتجاه عكس دوران عقارب الساعة .



الشكل(٤- ١٢): التمثيل البياني لتراكب حركتين توافقيتين متعامدتين .

الشكل).

نقطة من

وطبعاً يمكن اختيار أي عدد من النقاط ولكن هذا الاختيار سببه أن فرق الطور $\varphi = \frac{\pi}{4}$ وبالتالي نحتاج إلى ٨ نقاط . النقطة رقم ١ على الدائرتين هي لحظة $t = 0$ أو ٢π= ωt ..... الخ .

و بما أن التردد الزاوي للحركتين متساو فعند انتقال الحركة في الدائرة الممثلة للحركة الأفقية إلى النقطة ٢ تنتقل الحركة الرأسية أيضاً إلى النقطة ٢ وهكذا حتى تكتمل الدورة.

نقطة التقاء المساقط من النقطتين اللتين لهما نفس الرقم على الدائرتين هي محصلة تراكب الحركتين في تلك اللحظة.
الواضح الآن أن هذه الطريقة البيانية ابسط في الحصول على الشكل النهائي للحركة التوافقية البسيطة الناتجة عن تراكب حركتين توافقيتين ذوات تردد واحد ومتعامدتين وبينهما فرق طور φ وهي طريقة لا تخلو من شيء من التسلية.
ويوضح الشكل (٤-١١) تسعة أشكال لقيم φ بين الصفر و٢π والفرق في الطور بين الشكل والآخر هو $\frac{\pi}{4}$. وواضح من الأشكال التسعة أن محصلة الحركة التوافقية البسيطة لجسم ما تؤثر عليه اهتزازتان توافقيتان متعامدتان لكليهما نفس التردد ω سيكون لها نفس التردد الزاوي. وتتحرك في اتجاه حركة عقارب الساعة حينما يكون فرق الطور بين الحركتين المتعامدتين φ بين الصفر وπ بينما ينعكس اتجاه الحركة ليصبح عكس اتجاه حركة الساعة حينما يكون فرق الطور φ بين π و ٢π أي عندما تصبح $sin\ \varphi$ سالبة .
لاحظ من المعادلة (٤-٣١) أن المحصلة هي خط مستقيم عندما φ = صفر كما في الشكل (٤-١١) وذلك لأن :

$$y = \frac{A_2}{A_1} x$$

أي بميلان $\frac{A_2}{A_1}$.

ولكن عندما تكون φ = π فإن:

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x$$

أي بميلان $-\frac{A_2}{A_1}$.

وكذلك ميل كل الأشكال بين φ = $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ هو $\frac{A_2}{A_1}$ بينما تميل بمقدار $-\frac{A_2}{A_1}$ لزوايا الطور بين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{4}$. أي أن فرق الطور φ = $\frac{\pi}{2}$ و φ = $\frac{3\pi}{4}$ هي حدود فاصلة بين الميلان $\frac{A_2}{A_1}$ و $-\frac{A_2}{A_1}$ للأشكال المختلفة .
لاحظ أن الشكل العام هو شكل اهليلجى حسب المعادلة (٤-٣٢) وان الخطوط المستقيمة المائلة هي حالات خاصة عندما تكون φ = ٠ ، π ، ٢π ، .... الخ. وهى يمكن اعتبارها أشكال اهليليجية تقع على سطح عمودي على سطح yx. ولذلك لا نرى

إلا حافة هذا السطح المقابل لنا وتظهر الحركة الاهليليجية في صورة خط مستقيم يتحرك عليه الجسم ايابا وذهاباً .

ويقال هنا أن هذه الحركة مستقطبة خطياً plane polarized.

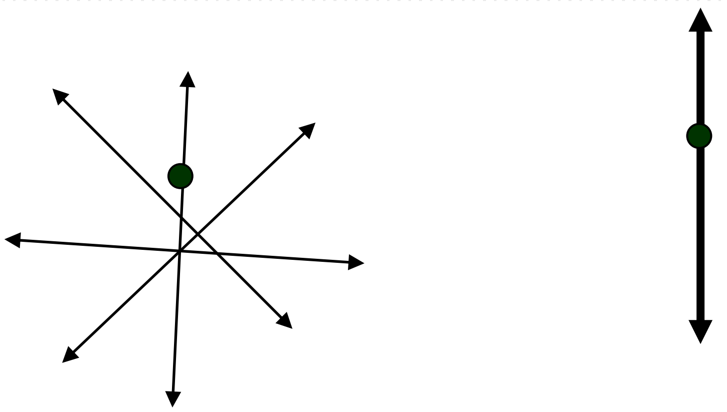
والواقع أن ظهور الأشكال الاهليليجية ناتج من وجود زاوية الطور φ بين الاهتزازتين المتعامدتين فإذا كانت :

$$x= A_1 \cos \omega t$$
$$y= A_2 \cos \omega t$$

فانه من المعادلة (٣٢-٤) لن نحصل من تراكب الاهتزازتين إلا على الخط المستقيم المائل الذي حصلنا عليه عندما كانت φ = ٠ ولن نحصل على أي أشكال أخرى . وجود فروق الطور φ بين الاهتزازتين المتعامدتين ينتج ما يسمى بالاستقطاب الاهليليجى elliptic polarization.

أما إذا كانت $A_1 = A_2$ فينتج الاستقطاب الدائري circular polarization وتسمى استقطاب لأننا نتحدث عن حركة على سطح واحد .

عزيزي الدارس ،،،
ان استقطاب الضوء موضوع هام يناقش في البصريات الفيزيائية. والضوء عموماً غير محصور في سطوح معينة. ولكن هناك بعض المواد عند مرور الضوء من خلالها تستقطبه في سطح معين, يمكن أن يكون أفقياً أو رأسياً ولا تسمح بمروره في السطوح الأخرى (الشكل (١٢-٤)).



عزي

المت

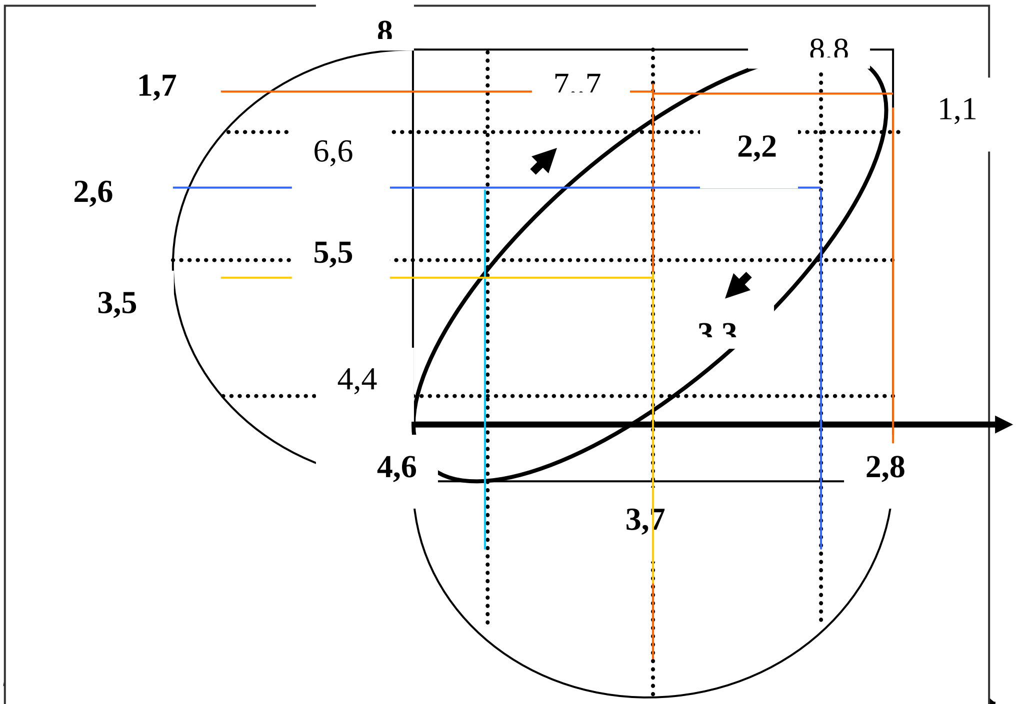
المرة بالاستعانة بنصف دائرة فقط لكل اهتزازة. أما حالة $\varphi = \frac{\pi}{4}$ فإننا يمكن

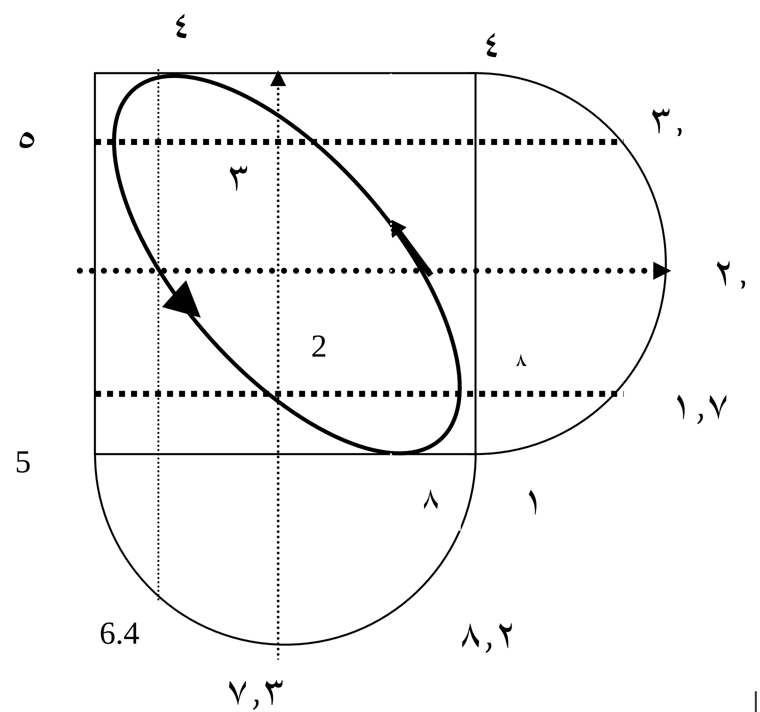
إختصارها كما في الشكل (٤-١٣) حيث تحمل كل نقطة رقمين بدلاً من رقم واحد مع الحاجة للحذر في متابعة ترتيب النقاط .

لاحظ أن في الدائرة السفلى أن النقاط ٢، ٣، ٤ تتبع للنصف الأعلى للدائرة وهو النصف غير الموجود في الرسم وهذا لا يسبب مشكلة مادام النصف الموجود للدائرة الممثلة للحركة التوافقية الرأسية y به النقاط الأصلية ١، ٢، ٣، ٤. كذلك لاحظ أن اتجاه الحركة هو اتجاه تنفيذ الرسم (راجع ذلك على الشكل) .

في الشكل يظهر نصف الدائرة الأيسر الذي به فرق الطور φ وبالتالي الرقم ١ أما إذا كان فرق الطور $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ فان الجزء الأيمن هو الذي يحتوى على النقطة ١ .

والشكل (٤-١٤) يوضح ذلك. أي أن أيّ من النصفين يمكن استخدامه إذا





الشكل (٤-١٤)

٢,٤ محصلة الاهتزازات التوافقية البسيطة المتعامدة ذات الترددات الزاويه المختلفة و أشكال ليساجو

عزيزي الدارس ،،

هذا الموضوع في الواقع هو تعميم للحالة الخاصة التي ناقشناها في القسم السابق حينما كانت الترددات الزاوية متساوية ولذلك فهو أكثر تعقيداً من الناحية الرياضية ونحن لن نتطرق للحلول الرياضية هنا ولكن سنستعين بالطريقة البيانية الأبسط . في هذه الحالة معادلات الإزاحة للحركتين x و y هي:

$$x= A_1 \cos(\omega_x t)$$

$$y= A_2 \cos(\omega_y t+\varphi)$$

حيث السرعات الزاوية الآن هي ω_x و ω_y . وسنحصل على نفس النتائج التي حصلنا عليها في القسم السابق إذا كانت $\omega_y= \omega_x$.

الآن نفرض أن : $\omega_y=٢ \ \omega_x$

ولأن

$$\omega_x = 2\pi f_x = \frac{2\pi}{T_x}$$

$$\omega_y = 2\pi f_y = \frac{2\pi}{T_y}$$

حيث f هو التردد و T هو الزمن الدوري للاهتزازة. فإن:

$$\frac{2\pi}{T_y} = 2\frac{2\pi}{T_x}$$

أي أن :

$$T_y = \frac{1}{2}T_x$$

أي أن الاهتزازة التوافقية البسيطة الرأسية (y) تكمل اهتزازة كاملة في الوقت الذي تكمل الاهتزازة التوافقية البسيطة الأفقية (x) نصف اهتزازة. وبعبارة أخرى فإن الاهتزازة الرأسية تكمل دورتان كاملتان حول الدائرة الممثلة لها في التمثيل البياني في

الوقت الذي تكمل فيه الاهتزازة الأفقية دورة واحدة فقط حول الدائرة الممثلة لها . ولهذا في الطريقة البيانية إذا أخذنا ٨ نقاط على الدائرة الممثلة للحركة الرأسية (y) فإننا نحتاج الى ١٦ نقطة على الدائرة الممثلة للحركة الأفقية(x) بحيث تقابل دورة كاملة حولها دورتان حوله دائرة (y) .

الشكل (٤-١٣) يوضح المحصلة التي حصلنا عليها بيانياً عندما يكون فرق الطور $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

أي أنه إذا كان هناك جسم ما تؤثر عليه اهتزازتان متعامدتان فيهما $\omega_y = ٢\ \omega_x$

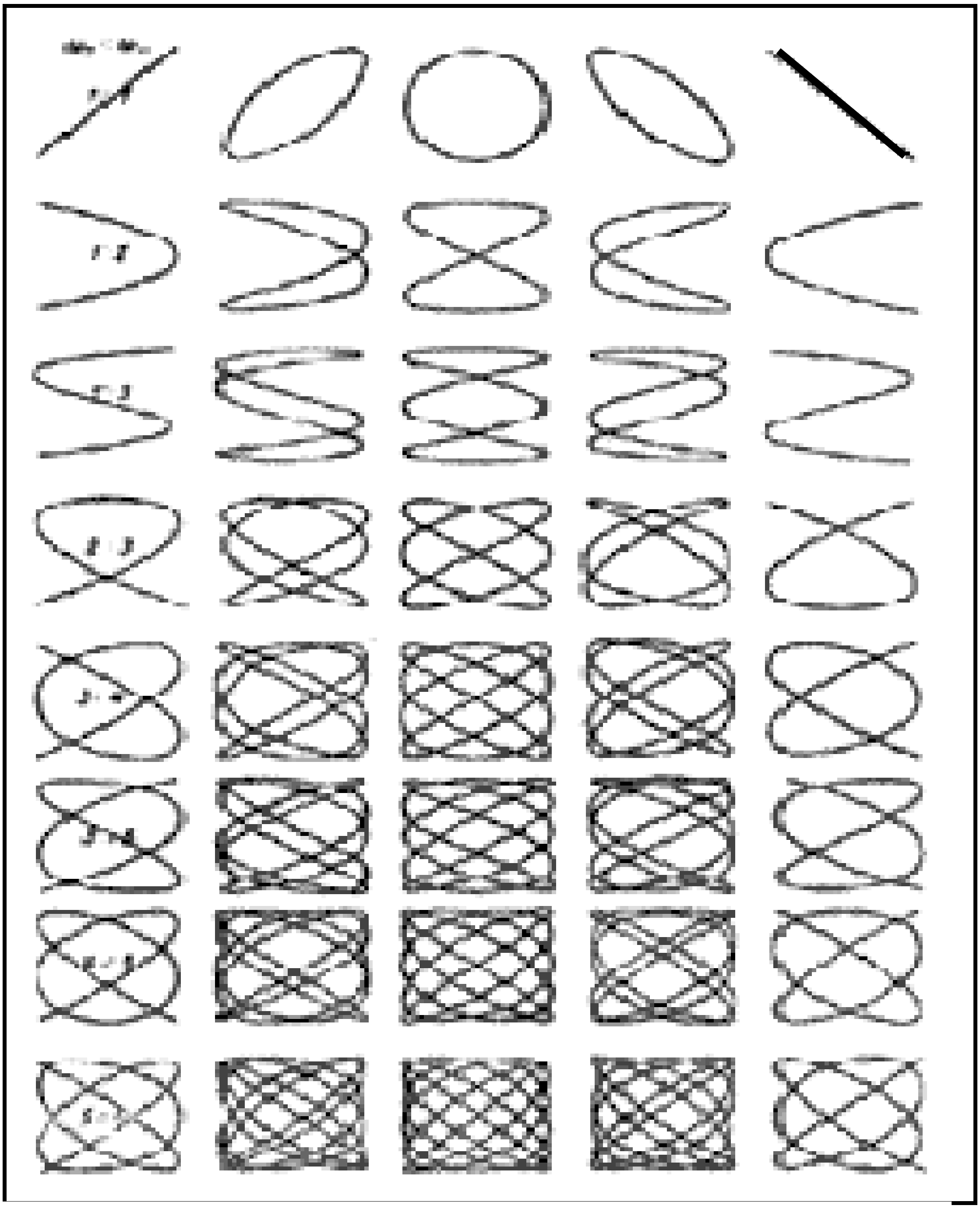
وفرق الطور $\varphi = \frac{\pi}{4}$ فإن مساره سيكون كما في هذا الشكل حسب الاتجاهات الموضحة عليه وكأنه يحاول رسم علامة ∞ (مالا نهاية) . [لاحظ أنه فعلاً يرسم هذه العلامة عندما $\varphi = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $\omega_y = ٢\ \omega_x$] .

لاحظ عزيزي الدارس ،،

أن المحصلة للاهتزازتين المتعامدتين عندما تكون $\omega_y = \omega_x$ و $\varphi = \frac{\pi}{4}$ تكون عبارة عن شكل اهليلجي مائل بمقدار $\frac{A_2}{A_1}$ وعندما يتضاعف التردد الزاوي يتحول الشكل الى ما يشبه شكل اهليلجي معقوف أو إلى ما يشبه شكلين اهليليجيين غير مكتملين .

الشكل (٤-١٥) يوضح بعض الأشكال التي أمكن الحصول عليها عندما تكون $\omega_y = \omega_x$ مع قيم مختلفة لفرق الطور φ والتي استعرضناها من قبل لمقارنتها مع الأشكال التي يمكن الحصول عليها عندما تكون $\omega_y = ٢\ \omega_x$ عند نفس فروق الطور. وكذلك عندما نعكس الحالة بحيث تكون $\omega_y = \omega_x$ ٢ وذلك من أجل المقارنة.

هذه الأشكال تسمى أشكال ليساجو Lissajous figures باسم العالم J.A. Lissajous (١٨٢٢-١٨٨٠) والذي قام بدراسة مكثفة لتراكب الاهتزازات المتعامدة .حيث نلاحظ أن الأشكال بعد أن كانت خطاً واحداً أو شكل اهليلجي عندما كانت $\omega_y = \omega_x$ تضاعفت في الاتجاه الأفقي عندما أصبحت $\omega_y = ٢\ \omega_x$ وتضاعفت في الاتجاه الرأسي عندما أصبحت $\omega_y = \omega_x$ ٢ . يجب أن لا ننسى مع تعقيدات هذه الأشكال أن المنحنيات المرسومة هي المسارات التي يتبعها جسم ما تؤثر عليه اهتزازتان متعامدتان حسب فرق الطور φ بينهما وحسب النسبة بين تردداتهما الزاوية .



π ¾ $\pi/2$ π ¼π

شكل (٤-١٨) : أشكال ليساجو

إذا زادت النسبة بين الترددات أو أصبحت كسوراً فمثلاً $٣\omega_x=٤\ \omega_y$ فإن هذه الأشكال تتعقد جداً كما في الجزء الاخير من الشكل السابق . وفي كل الأحوال فإن أفضل طريقة لمشاهدة أشكال ليساجو أو استعمالها للمقارنة بين ترددات مختلفة فهو باستخدام راسم الذبذبات Oscilloscope والذي هو جهاز الكتروني يرسم تلك الأشكال على شاشته إذا أوصلنا أحد الترددين الكهربائيين إلى مدخله x (مثلاً للاهتزازة الأفقية) والأخرى إلى مدخله y (الاهتزازة الرأسية), وستظهر تلك الأشكال حسب النسبة بين الترددين وفرق الطور بينهما.

تدريب (٢)

١. باستخدام الطريقة البيانية اوجد محصلة تراكب اهتزازتين بينهما فرق الطور $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

٢. بالرسم وضح محصلة الاهتزازات التوافقية البسيطة المتعامدتين زاوية الطور بينهم $\varphi= \frac{\pi}{4}$ والتردد الزواي $\omega_y= \omega_x$.

١.استخدم الطريقة البيانية لايجاد محصلة اهتزازتين توافقين متعامدتين.

٢.عرف الاستقطاب.

٣. أوجد محصلة اهتزازتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين زاوية الطور بينهما $\varphi= \frac{\pi}{4}$ والترددت الزوايه هي $\omega_y.=٢\ \omega_x$

الخلاصة

عزيزي الدارس,

في النهاية، نؤكد على ما أكدناه في البداية عن ضرورة تقويم هذه الوحدة، وإبداء ملاحظاتك للاستفادة منها. ولكن ما الذي ناقشناه ؟

عرفنا تراكب الحركات التوافقية، حيث وجدنا إن الحركات والاهتزازات التوافقية في الطبيعية ليست ذات تردد واحد. فلو ركزت برهة الى الأصوات التي تسمعها لا تضح لك أنها ليست ذات تردد اي نغمة واحد و إنما ما تسمعه هو مجموع ترددات مختلفة . وعرفنا جمع الاهتزازات أو الحركات التوافقية سواءً كانت هذه الحركات في مستو واحد أو في مستويات متعامدة .

وقد تمكنا من إيجاد محصلة اهتزازتين متعامدتين بالطريقتين التحليلية و البيانية. كما تمكنا من إيجاد محصلة الاهتزازات التوافقية البسيطة المتعامدة و تعرفنا على أشكال ليساجو.

ومع نهاية هذا القسم نكون قد انهينا هذه الوحدة، ونأمل أن تكون قد أضافت الكثير إلى معلوماتك الثرة وان تسعد بالوحدة القادمة إنشاء الله.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس، بعد أن فرغت من دراسة هذه الوحدة الآن، أصبح لديك حصيلة كبيرة من المعلومات المفيدة عن تراكب الحركات التوافقية. الآن ننتقل معا إلى الوحدة الخامسة وهي بعنوان الاهتزازات المضمحلة حيث نتعرف علي اضمحلال الحركات التوافقية وأنواعه والمعادلات التي تحكمه.

نرجو إن تكون وحدة مفيدة لك وان تساهم معنا في نقدها وتقييمها.

إجابات التدريبات

التدريب(1)

الاجابة بالوحدة

التدريب(2)

١. الإجابة بالوحدة
٢. الاجابة بالوحدة
٣. الاجابة بالوحدة

مسرد المصطلحات

جمع الإهتزازات	Superposition of Vibrations
تراكب الحركات التوافقية	Superposition of Harmonic Motion
مستقطبة سطحياًً	Plane polarized
الاستقطاب الاهليلجي	Elliptic polarization
الاستقطاب الدائري	Circular polarization
أشكال ليساجو	Lissajous figures
راسم الذبذبات	Oscilloscope

محتويات الوحدة الخامسة

مقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس,

مرحباً بك إلى الوحدة الخامسة و هي بعنوان الاهتزازات المضمحلة, وفيها سنعرف أن أي جسم يتحرك في حركة توافقية بسيطة أو غير بسيطة ستضمحل حركته بمرور الزمن حتى يتوقف بسبب وجود مقاومة للحركة.

تتألف هذه الوحدة من خمسة أقسام رئيسية . القسما ن الأول واالثاني يتضمنان اضمحلال الحركات التوافقية واستنتاج و حل معادلة الحركة المضمحلة . أما في القسم الثالث فنتعرف علي أنواع اضمحلال الحركات التوافقية وهي ثلاثة أنواع من الاضمحلال: الاضمحلال الشديد - الاضمحلال الحرج – والاضمحلال الخفيف.

بعد ذلك ندلف إلي القسم الرابع حيث نتعمق في دراسة طاقة الحركة التوافقية المضمحلة وأخيرا سنتناول نموذج حركة توافقية مضمحلة في دائرة كهربية هي دائرة LCR.

ثم ذيلنا هذه الوحدة بسرد شامل للمصطلحات العلمية التي وردت في النص الرئيسي، وقد حرصنا في هذه الوحدة على معرفة العلاقات الرياضية، مع تقديم أمثلة متنوعة، و أنشطة وأسئلة تقويم ذاتي، وتدريبات كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية والتي تقدمها لمرشدك الميداني.

أهلاً بك مرة أخري إلي هذه الوحدة ونرجو أن تستمتع بدراستها وأن تستفيد منها وأن تشاركنا في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة يتوقع منك أن تكون قادراً علي أن:

١. تشرح مفهوم الاهتزازات المضمحلة.
٢. تستنتج معادلة الجركة التوافقية المضمحلة.
٣. تستطيع حل معادلة الحركة المضمحلة
٤. توضح أنواع اضمحلال الحركات التوافقية
٥. تفرق بين كل من الاضمحلال الشديد والحرج والخفيف
٦. تبين كيفية يتغير اتساع الحركة التوافقية المضمحلة
٧. تستنتج نردد الحركة المضمحلة
٨. تحسب طاقة الحركة التوافقية المضمحلة
٩. تطبق نموذج الحركة التوافقية المضمحلة على دائرة LCR
١٠. تذكر بعض التطبيقات للأمثلة السابقة الذكر.
١١. تحل تمارين على الحركة التوافقية المضمحلة.

٥.الاهتزازات المضمحلة Damping Oscillations

عزيزي الدارس ،،

ناقشنا في الوحدات السابقة الحركة التوافقية البسيطة وتراكب الحركات التوافقية وتنوع الأنظمة المهتزة. وفي كل نقاشاتنا السابقة اعتبرنا أن كل الحركات التوافقية البسيطة إذا ما بدأت تستمر الى ما لا نهاية، وهو افتراض بعيد جداً عن الواقع .

فإذا قمت, عزيزي الدارس, بصنع بندول بسيط وتركته يتحرك حركة توافقية بسيطة (اتساع صغير) أو غير بسيطة (اتساع كبير), فستجد أن حركته تضمحل بمرور الزمن حتى يتوقف تماماً. وهذا ينطبق على أي حركة اهتزازية توافقية بسيطة أو غير بسيطة مادامت لا تعتمد على مصدر يمدها بالطاقة اللازمة للاستمرار. لقد وقعنا في هذا الخطأ بسبب حاجتنا حينها لتبسيط الظاهرة حتى نتمكن من فهمها. لذلك إفترضنا حينها أن طاقة الحركة التوافقية البسيطة هي كمية ثابتة تتحول من طاقة وضع الى طاقة حركة وهكذا دواليك, ولم نضع في الاعتبار أن هناك استنزاف للطاقة أثناء الحركة بسبب وجود مقاومة للحركة. فمثلاً في الأنظمة الميكانيكية نجد أن الهواء يقاوم حركة كل من:

- البندول الزنبركي
- البندول البسيط.

أيضا تتسبب مقاومة الأسلاك لسريان التيار في دائرة كهربية مثل دائرة الملف والمكثف LC التي درسناها سابقاً في اضمحلال الاهتزازة في الدائرة. وكنا هنا أيضا قد إفترضنا أن هذه المقاومة غير موجودة وهي في الواقع موجودة حتى ولو كانت صغيرة.

1.5 إضمحلال الحركات التوافقية

عزيزي الدارس ،،

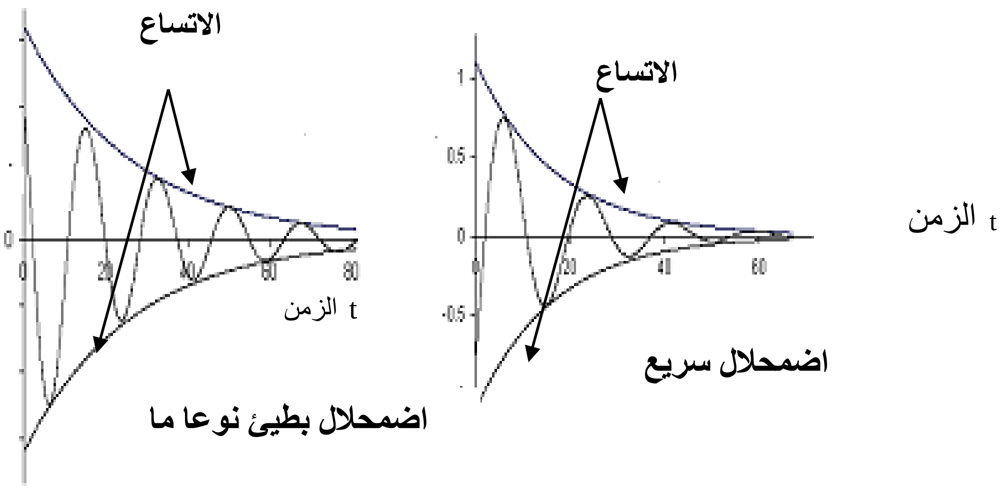
لقد حصلنا من قبل علي معادلة الحركة التوافقية البسيطة في صوره :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

وقلنا أن الحركة التوافقية البسيطة هي التي يتناسب فيها التسارع $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ مع سالب الإزاحة (×). وقد وجدنا أن حل هذه المعادلة يمكن أن يكون :

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

وهذا الحل يعطينا ازاحة للحركة التوافقية البسيطة x في أي لحظة t عندما يكون اتساع الحركة A و ترددها الزاوي ω ثابتان. ولكن إذا تابعنا الحركة التوافقية البسيطة مع مرور الزمن فسنلاحظ أن الاتساع A ليس ثابتاً وإنما يقل بمرور الزمن كما في الشكل التالي:



شكل (١-٥): الحركة التوافقية الحقيقية مضمحلة ويقل اتساعها بمرور الزمن

ولأن الاتساع يقل فإن الإزاحة x تقل بمرور الزمن, بسبب وجود مقاومة ما للحركة تتسبب في استنفاد جزء من الطاقة. فإذا كان الاتساع في بداية الحركة A_o فإن قيمته في كل اللحظات التالية تتوقف علي الزمن، أي يصبح داله في الزمن A(t)، وتقل A(t) كلما كبرت t .

ولقد عرفنا, عزيزي الدارس، سابقاً أن قوة الإعادة والتي تعمل طول الوقت علي إعادة المنظومة إلي حالة الاتزان أو الاستقرار, هي القوة الأساسية في الحركة التوافقية البسيطة. وهذه القوة في كل الأحول تعمل في حالة:

- الأنظمة الميكانيكية في عكس اتجاه الزيادة في الإزاحة x
- وفي عكس اتجاه الزيادة في الشحنة q في دائرة LC .

فمثلا في حالة البندول الزنبركي وجدنا من قيل أن قوة الإعادة هي:

$$F = m\frac{d^2x}{dt} = -k\,x \qquad \text{.............................(٥-١)}$$

حيث k ثابت الزنبرك.

ولذلك فنحن نتوقع انه إذا كانت هناك قوة مقاومة للحركة التوافقية البسيطة, فلابد أن تعمل في عكس اتجاه الحركة, أي في عكس اتجاه الزيادة في الإزاحة x. بل وتعمل علي إنقاص الإزاحة طول الوقت, وبالتالي فهي قوة سالبة. كذلك نتوقع أن تتناسب هذه القوة مع سرعة حركة الجسم أو معدل تغير الإزاحة x (أو الشحنة q) في الزمن وبالتالي تزيد قوة المقاومة بزيادة هذا المعدل (للدقة وبدون الدخول في تفاصيل حالياً فان هذا الاقتراض ينطبق علي معدلات التغير البطيئة أي السرعات الصغيرة). فإذا رمزنا لهذه القوة بالرمز F_r فان:

$$F_r \propto -\frac{dx}{dt}$$

أي أن:

$$F_r = -R\,\frac{dx}{dt}$$

حيث R ثابت التناسب ويسمى ثابت المقاومة.

وبما أن :

- وحدة القوة هي النيوتن = $1N = kg\ m/s^2$.
- وحدة السرعة هي m/s فان وحدة R هي kg/s

لاحظ أن وحدة k ثابت الزنبرك هي kg/s^2، أي أن R لها علاقة ما بالتردد مضروبا في الكتلة حسب تلك الوحدات وعليه فان:

$$F_r = -R\,v \qquad \text{.........................(٥-٢)}$$

حيث v السرعة للحركات التوافقية الميكانيكية وأي كميات مقابله للسرعة في الأنظمة الأخرى, مثل $\frac{dq}{dt}$ لدائرة LC الكهربية.

وبأخذ قوة المقاومة للحركة التوافقية البسيطة F_r في الاعتبار وهي التي تسبب اضمحلال تلك الحركة, فان معادلة الحركة التوافقية والتي سنسميها من الآن فصاعداً **الحركة التوافقية المضمحلة** هي:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{dt} - k\,x$$

أو

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{R}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$ .... (٥-٣)

وبما أن وحدة $\frac{k}{m}$ هي $\frac{1}{s^2}$ أي وحدة مربع التردد الزاوي للحركة التوافقية البسيطة الأصلية, قبل إضافة قوة المقاومة فسنرمز لهذا التردد الزاوي بالرمز ω_o لتمييزه عن أي تردد زاوي آخر من المتوقع ظهوره لاحقاً بسبب الاضمحلال. وعليه يكون التردد الزاوي للحركة التوافقية البسيطة الأصلية هو:

$$\omega_o=\sqrt{\frac{k}{m}}$$ ....(٥-٤)

وبالتالي يكون تردد الحركة التوافقية البسيطة هو

$$f_o=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

وزمنها الدوري

$$T_o=\frac{1}{f_o}$$

أي

$$T_o=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

أما وحدة اللكمية $\frac{R}{m}$ في المعادلة (٥-٣) فهي $\frac{1}{s}$ أي وحدة التردد وسنرمز لهذه الكمية بالرمز γ (تنطق قاما Gamma)

$$\gamma=\frac{R}{m}$$ .... (٥-٥)

ويسمى بثابت الاضمحلال damping constant وبوضع (٥-٤) و (٥-٥) في (٥-٣) نحصل علي معادلة الحركة التوافقية البسيطة المضمحلة وهي :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_o^2x=0$$ ....(٥-٦)

واضح من تحليل الأبعاد أن هناك ترددان في هذا المعادلة وهما ω_o -التردد الزاوي للحركة التوافقية البسيطة و γ يمثل ثابت الاضمحلال.

2.5 حل معادلة الحركة المضمحلة

عزيزي الدارس،

كنا قد برهنّا في الوحدة الثانية أن حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة يحتوي علي دالة أسية مركبة الأس مثلاً $e^{i\omega t}$, وأن الأس عندما يكون مركباً فانه يعني وجود حركة اهتزازية دورية لان:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

ولأن كلاً من الجيب وجيب التمام دوال دورية.

وكنا ذكرنا كذلك, عزيزي الدارس, انه إذا كان أس الدالة الأسية كمية حقيقية مثل $e^{\pm pt}$, فان الحل يكون دالة غير دورية. فإذا كان الأس موجباً ($+kt$) تتصاعد قيمتها بصورة أسية بمرور الزمن, بينما يحدث العكس عندما يكون الأس سالباً ($-kt$) حيث يكون الحل تناقصياً.

وقد إتضح لنا في الوحدة الثانية انه حتى لو افترضنا أن حل معادلة الحركة التوافقية هو عبارة عن دالة أسية أسها حقيقي مثل e^{pt} , فإن الحل تحول تلقائيا إلي حل مركب ، لأنه حل لمعادلة حركة توافقية بسيطة، أي حركة اهتزازية دورية.

وبما أن المعادلة (٥-٦) هي معادلة حركة توافقية مضمحلة لوجود قوة مقاومة مضافة لمعادلة الحركة التوافقية الأصلية، وكذلك نلاحظ في الشكل (٥-١) وجود السلوك التناقصي للاتساع كما نلاحظ وجود الحركة الدورية أيضا، فإننا نتوقع أن أي من الحَلّين سواء كان أس الدالة الأسية حقيقي أو مركب يوصلنا إلي النتيجة النهائية إذا طبق بالصورة الصحيحة.

وعلى ذلك فالحل إما أن يكون هو:

$$\mathrm{x} = \mathrm{A_o} e^{(\alpha t + \varphi)}$$

أو أن يكون هو الدالة المركبة:

$$\boxed{\mathrm{z} = \mathrm{A_o} e^{i(\alpha t + \varphi)}} \quad .... \text{(٥-٧)}$$

حيث $\mathrm{z} = \mathrm{x} + i\,\mathrm{y}$. والواقع أن لكل من الحلين مميزاته ويعطيان نفس النتيجة. غير أن الحل الأول أبسط في البداية, ولذلك سنفترض أن حل المعادلة (٥-٦) هو:

$$\boxed{x = A_o e^{(\alpha t+\varphi)}} \quad ....(٥-٨)$$

حيث لابد أن تكون وحدة α هي وحدة التردد ($\frac{1}{s}$) وذلك لكي يصبح الأس بدون تميز وهو المطلوب. أما φ فهي زاوية الطور أو ثابت الطور. ولان المعادلة (٥-٦) هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية, فحلها لا بد أن يحتوي على ثابتين هما في هذه الحالة A_o و φ. وقد رمزنا للاتساع بالرمز A_o علي اعتبار أن A_o هو الاتساع في بداية الحركة (أي هو اتساع الحركة التوافقية البسيطة الاصلية) لأنه من المتوقع أن يتغير الاتساع بمرور الزمن t كما لاحظنا في الشكل (٥-١) .

وعليه من (٥-٨) نجد أن السرعة :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha A e^{(\alpha t+\varphi)} = \alpha x$$

وإن التسارع هو:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 A e^{(\alpha t+\varphi)} = \alpha^2 x$$

بالتعويض في (٥-٦) تصبح المعادلة هي :

$$\boxed{(\alpha^2 + \alpha\gamma + \omega_o^2)\, x = 0} \quad ....(٥-٩)$$

احد حلول هذه المعادلة هو x (الإزاحة) = الصفر, وهو حل لا قيمة له لأنه لا يحل لنا المعادلة حقيقة. الحل الثاني هو:

$$\boxed{\alpha^2 + \alpha\gamma + \omega_o^2 = 0} \quad ....(٥-١٠)$$

وهذا الحل عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية جذورها هي:

$$\boxed{\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_o^2}} \quad ....(٥-١١)$$

وبالرغم من أن هذه المعادلة تحتوي علي جذرين فقط إلا أن هناك مجموعة من الاحتمالات وذلك لسبب وجود الكمية $\frac{\gamma^2}{4} - \omega_o^2$ داخل الجذر التربيعي حيث $\gamma = \frac{R}{m}$ التي تمثل المقاومة للحركة التوافقية البسيطة. فإذا كانت :

$$\frac{\gamma^2}{4} > \omega_o{}^2 \quad \text{.........................(١٢-٥)}$$

فإن المقاومة تكون كبيرة ويكون هناك **اضمحلال شديد**. أما إذا كانت

$$\frac{\gamma}{2} = \omega_o \quad \text{..................................(١٣-٥)}$$

حيث يختفي الجذر التربيعي وتكون $\alpha = -\frac{\gamma}{2}$. وهذه الحالة تسمى بحالة **الاضمحلال الحرج**, لأنه يقع بين الاضمحلال الشديد السابق ذكره والحالة التالية وهي:

$$\frac{\gamma}{2} < \omega_o \quad \text{................................(١٤-٥)}$$

حيث يصبح ما بداخل الجذر التربيعي سالباً . وفي هذه الحالة نحصل علي حل مركب وتكون الحركة بالتالي اهتزازية دورية . وهي الحالة الوحيدة التي نحصل فيها علي حل مركب من الحل الحقيقي الذي افترضناه في البداية .

سنناقش فيما يلي كل حالة علي حدة مع التركيز علي الحالة الأخيرة وهي التي تهمنا أكثر من غيرها كفيزيائيين. أما الحالتين الأولى والثانية فهي أكثر أهمية للمهندسين .

تدريب (1)

١. استنبط معادلة الحركة التوافقية المضمحلة التالية :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o{}^2 \mathrm{x} = 0$$

٢. باستخدام حل المعادلة أعلاه وضح متي يكون الاضمحلال شديداً؟

أسئلة تقويم ذاتي

١. ما هي القوة التي تعمل طول الوقت علي إعادة المنظومة إلي حالة الاتزان أو الاستقرار؟.
٢. ناقش الحلول المحتملة لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة (٦-٥).
٣. متي يسمى الاضمحلال بالاضمحلال الاضمحلال الحرج؟.

3.5. أنواع اضمحلال الحركات التوافقية

1.3.5. الاضمحلال الشديد Heavy Damping

نعود مرة أخرى لمناقشة المعادلة (٥-١١) وهي:

$$\boxed{\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_o^{\ 2}}}$$

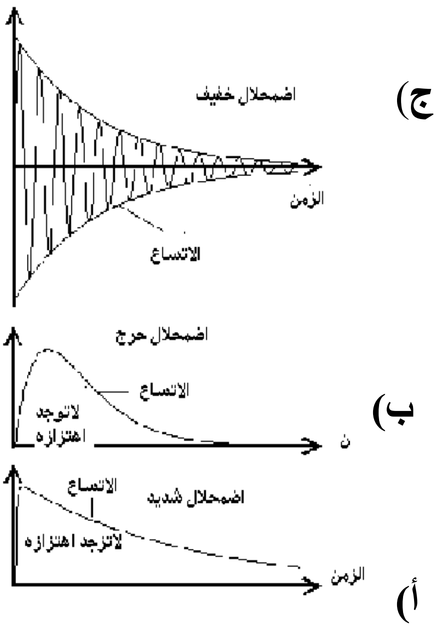
فعندما يكون ما تحت الجذر التربيعي اكبر من الصفر من (٥-١٢)

فان:
$$\frac{\gamma^2}{4} > \omega_o^{\ 2}$$

أيْ
$$\frac{R^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$$

أو
$$\frac{R^2}{4m} > k$$

وهذا يعني حسب (٥-٢) أن قوة المقاومة أكبر من قوة الإعادة في (٥-١)، أي أن قوة المقاومة للحركة التوافقية هي التي تسيطر علي الوضع. وفي هذه الحالة فإن α في المعادلة (٥-٨) في هذه الحالة عدد حقيقي, وبالتالي فالكمية $e^{(\alpha t+\varphi)}$ في المعادلة (٥-٨) هي كمية حقيقية, ولذلك لا تتوقع أي سلوك اهتزازي. وعليه فالحركة في هذه الحالة ليست مضمحلة بالتدريج وإنما هي في الحقيقة حركة **مخمدة**, بسبب سيطرة المقاومة. وحركة مثل هذه تصل إلى قيمتها القصوى بسرعة شديدة ثم تتناقص حتى تخمد (الشكل (٥-٢) أ)).



الشكل (٢-٥): حل المعادلة (٥-١١) ينتج ثلاثة أنواع من الاضمحلال هي من الأسفل إلى الأعلى:
أ) اضمحلال شديد حيث تخمد الاهتزازة؛
ب) اضمحلال حرج؛
ج) اضمحلال خفيف وتكون هناك فعلا اهتزازة مضمحلة

2.3.5. الاضمحلال الحرج Critical Damping

وهذه الحالة تحدث عندما تكون :

$$\frac{\gamma^2}{4} = \omega_o^{\,2} \qquad \text{.........................(٥-١٣)}$$

تحت الجذر التربيعي في المعادلة (٥-١١), أي ان

$$\omega_o = \frac{\gamma}{2}$$

وبالتالي من (٥-١١) تكون : $\alpha = -\frac{\gamma}{2}$

أيْ ان

$$\alpha = -\frac{R}{2\,m}$$

وبالتالي يكون الحل هو :

$$x = A_o e^{(\frac{-\alpha\, t}{2}+\varphi)}$$

ولان أس الدالة الأسية حقيقي، فلا نتوقع حركة اهتزازية ولأنه بالسالب فان الدالة هي دالة أسية تناقصية مع مرور الزمنt. ويسمى الاضمحلال هنا **بالاضمحلال الحرج** لأنه الحد الفاصل بين حالة الاضمحلال الشديد والحالة التي تصبح فيها المنظومة مهتزة وان كانت في حالة اضمحلال, كما نرى (الشكل (٢-٥) ب)).

هناك بعض التطبيقات الهندسية التي تضبط فيها قيمة γ بحيث تكون $\gamma \leq 2\ \omega_o$ حتى لا تحدث اهتزازه كما في أجهزة القياس, حيث من غير المرغوب فيه اهتزاز مؤشر الجهاز في حركة اهتزازية لان المطلوب هو ثبات المؤشر.

3.3.5.الحركة الاهتزازية المضمحلة

هي الحركة التي تهمنا أكثر كفيزيائيين لأنها تمكننا من فهم هذه الظاهرة الهامة وهي اضمحلال الاهتزازة. وفي الواقع كما أن هناك حالات يحتاج فيها المهندسون الى إخماد الاهتزازات لما تسببه من أضرار كما في حالات الارتجاجات الميكانيكية عموماً, فهناك حالات أيضا ًتحتاج فيها إلى المحافظة علي استمرارية الظاهرة الاهتزازية لحاجتنا إليها كما في حالة الاستعمالات الالكترونية.

وكنا قد إفترضنا أن حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة المضمحلة (٥-٦) هو

المعادلة (٥-٨) $x = A_o e^{(\alpha t+\varphi)}$

حيث

$$\boxed{\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_o{}^2}} \quad \text{.........................} \ (٥\text{-}١١)$$

وناقشنا سابقا

- حالة الإخماد أو الاضمحلال الشديد عندما تكون $\omega_o < \frac{\gamma}{4}$
- وحالة الاضمحلال الحرج عندما تكون $\omega_o = \frac{\gamma}{2}$.

الآن ننظر في الحالة التي يكون فيها التردد الزاوي للحركة التوافقية البسيطة غير المخمدة:

$$\frac{\gamma}{2} < \omega_o \quad \text{....................}(٥\text{-}١٤)$$

أي $\omega_o < \dfrac{R}{2m}$ وعليه تصبح الكمية داخل الجذر التربيعي في (٥-١١) سالبه أي:

$$\sqrt{-\left(\omega_o^{\,2}-\frac{\gamma^2}{4}\right)}=\sqrt{-1}\sqrt{\omega_o^{\,2}-\frac{\gamma^2}{4}}=i\sqrt{\omega_o^{\,2}-\frac{\gamma^2}{4}}$$

أي انه في حالة $\omega_o > \dfrac{\gamma}{2}$ فإن (٥-١١) تصبح:

$$\boxed{\alpha=-\frac{\gamma}{2}\pm i\sqrt{\omega_o^{\,2}-\frac{\gamma^2}{4}}} \quad ....(٥-١٥)$$

أي أن الكمية α والتي لها نفس وحدات التردد أصبحت عدداً مركباً مما يعني وجود حركة اهتزازية. وبما أن الكمية:

$$\boxed{\omega_o^{\,2}-\frac{\gamma^2}{4}} \quad ....(٥-١٦)$$

لها وحدات التردد حيث ω_o أصلا هي تردد زاوي و γ وحدتها $\dfrac{1}{s}$ وبالتالي فالكمية (٥-١٦) عبارة عن مربع تردد زاوي جديد لنفرض أنه $\omega_1^{\,2}$ أي:

$$\boxed{\omega_1=\sqrt{\omega_o^{\,2}-\frac{\gamma^2}{4}}} \quad ....(٥-١٧)$$

$$\boxed{\alpha=-\frac{\gamma}{2}\pm i\,\omega_1} \quad .... (٥-١٨)$$

حيث من الواضح أن ω_1 **هي التردد الزاوي للحركة التوافقية المضمحلة**. وعليه يصبح **حل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة (٥-٦)** هو:

$$\boxed{x=A_o e^{\left[-\frac{\gamma}{2}\pm i\,\omega_1 t+i\varphi\right]}}$$

$$\boxed{x=A_o e^{-\frac{\gamma}{2}}\,e^{\pm(i\,\omega_1 t)+i\varphi}} \quad .... (٥-١٩)$$

لاحظ عزيزي الدارس أن φ في (٥-٨) أصبحت $i\varphi$ لأن الحل أصبح مركباً كما هو متوقع.

عزيزي الدارس ،،

واضح من المعادلة (٥-١٩) أن السلوك الاهتزازي للإزاحة x تمثله الدالة الأسية ذات الأس المركب $e^{\pm i\omega t + i\varphi}$ و أن الدالة الأسية ذات الأس الحقيقي $e^{-\frac{\gamma}{2}}$ هي دالة تناقصية حيث تقوم هذه الدالة ولأنها مضروبة في الاتساع الابتدائي بإنقاص قيمة هذا الاتساع مع مرور الزمن. أي أن الاتساع دالة متغيره مع الزمن كالآتي:

$$\boxed{A(t) = A_o\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}} \quad .... (٥-٢٠)$$

وعليه تصبح الإزاحة (٥-١٩) كالآتي :

$$\boxed{x = A(t)\ e^{\pm(i\omega_1 t) + i\varphi}} \quad ....(٥-٢١)$$

وعليه يكون الحل في الحالتين (±) هو:

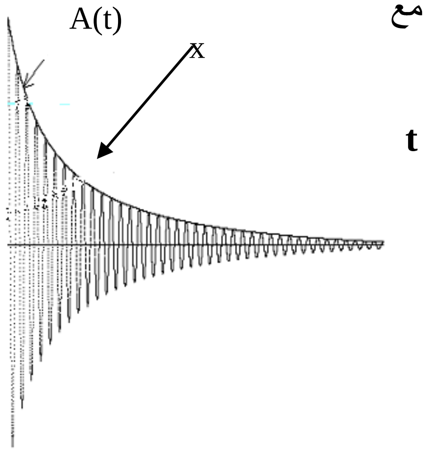
$$x = A(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi) \pm i\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

[راجع الوحدة الثانية]

والجزء الحقيقي للحل هو :

$$\boxed{x = A(t)\cos(\omega_1 t + \varphi)} \quad ....(٥-٢٢)$$

الشكل (٥-٣) يوضح شكل الحركة التوافقية المضمحلة حسب المعادلة (٥-١٥) مع المعادلة (٥-١٣) علما بان اختيار قيمة التردد الزاوي للحركة التوافقية المضمحلة ω_1 في الشكل كان اختياراً عشوائياً وليس قيمة حقيقية والغرض هو وضوح شكل الاهتزازة. كما تم اختيار قيمة φ = صفر للتبسيط.



الشكل (٥-٣): تغير الاتساع A(t) والإزاحة x مع الزمن t في الحركة التوافقية المضمحلة.

بعد كتابة المعادلة (٥-١٧) يصبح للتردد الزاوي للحركة التوافقية البسيطة المضمحلة كالتالي :

$$\boxed{\omega_1{}^2 = \omega_o{}^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \qquad \text{(٥-٢٣)}$$

يصبح أكثر وضوحا **أن التردد الزاوي للحركة المضمحلة دائما اقل من التردد الزاوي للحركة التوافقية البسيطة غير المضمحلة** ω_o, حيث أن قوة المقاومة المسببة للاضمحلال تقلل التردد الزاوي ω_o للحركة التوافقية البسيطة. الفرق بين الترددين يزيد كلما كان قوة المقاومة اكبر لان $\gamma = \frac{R}{m}$.

المعادلة (٥-٢٣) أيضا ًتوضح أن تردد الحركة المضمحلة يصبح صفراً, أي تصبح الحركة غير مترددة إذا كانت $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$, ويصبح التردد ω_1 سالبا إذا كانت $\frac{\gamma}{2} > \omega_o$, وهما الحالتان اللتان ناقشناهما سابقاً, أي حالة الاضمحلال الحرج ($\omega_o = \frac{\gamma}{2}$) وحالة الاضمحلال الشديد حيث تصبح الحركة غير ترددية, وتخمد إزاحة x قبل أن تصل إلي مرحلة الاهتزاز أو تكرار نفسها.

تدريب (٢)

زنبرك معلقة به كتلة مقدارها ١٠ g تبدأ في حركة توافقية بسيطة إتساعها الابتدائي 0.1 m وترددها ١٠ Hz. فإذا كانت تؤثر عليها قوة ثابت إضمحلالها 10/s , فأوجد:

أ) ثابت الزنبرك ب) ثابت المقاومة

ج) تردد الحركة التوافقية المضمحلة د) اتساع الحركة التوافقية المضمحلة بعد خُمس ثانية من بدايتها.

هـ) كم يكون ثابت الاضمحلال لكي تصبح الاهتزازة مخمدة ؟

أسئلة تقويم ذاتي

١. ما الفرق بين الاضمحلال الشديد و الاضمحلال الحرج؟
٢. علل: يحتاج المهندسون في بعض الحالات إلى إخماد الاهتزازات وهناك حالات أخري تحتاج إلى المحافظة علي استمرارية الاهتزازة

.4.5

في الو [illegible] ان:

الطاقة الكلية للحركة التوافقية البسيطة = طاقة الوضع + طاقة الحركة.

فللبندول الزنبركي أو البندول البسيط وفي حالة الاهتزازات الميكانيكية عموما وجدنا أن :

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2} \quad \text{..........} \quad (٥-٢٤)$$

وهذه المعادلة تبين أن الطاقة الكلية تتناسب مع اتساع الحركة التوافقية. أي $E \propto A^2$.

وبما أن اتساع الحركة التوافقية المضمحلة يتناقص بمرور الزمن, أي:

$$\boxed{A(t) = A_o e^{-\frac{\gamma}{2} t}} \quad \text{.................} (٥-٢٥)$$

فان الطاقة الكلية E ستضمحل بصورة أسرع لأنها تتناسب مع مربع الاتساع, حيث أن:

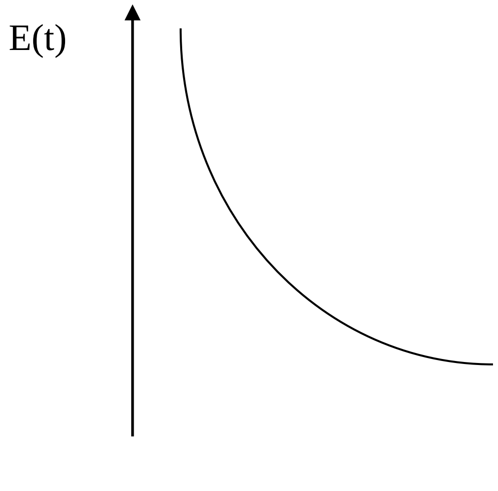
$$\boxed{E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A_o^2 \; e^{-\gamma t}} \quad \text{..................} (٥-٢٦)$$

والوضح منها أن الطاقة الكلية للحركة التوافقية البسيطة بدون اضمحلال هي:

$$E_o = \frac{1}{2} m \omega^2 A_o^2$$

حيث ω هنا هي التردد الزاوي للحركة التوافقية المضمحلة أي أن الطاقة الكلية للحركة التوافقية المضمحلة بعد مرور أي زمن t هي :

$$\boxed{\mathbf{E(t) = E_o \; e^{-\gamma t}}} \quad \text{................} (٥-٢٧)$$



t

شكل (   ): اضمحلال الطاقة الكلية للحركة التوافقية المضمحلة بمرور الزمن.

المعادلـة (٥-٢٧) لاضـمحلال الطاقة ليست قاصـرة علي الأنظمـة الميكانيكيـة المهتـزة فقـط وإنمــا تنطبـق علــي الأنظمــة المهتــزة الكهربيــة المغناطيسـية. بـل أن كثيـر مـن التفـاعلات الذريـة والنوويـة تتحلـل فيهـا الطاقـة بـنفس القـانون ويسـمى بالتحلـل الأسـي exponential decay نسبة للكمية $e^{-\gamma t}$.

مـن المعادلـة (٥-٢٧) والشـكل المرافـق, واضـح جـدا أن هنـاك حاجـة إلـى مقيـاس محدد موحد يسهل استعماله لمعرفة مدى الاضـمحلال الحـادث فـي أي منظومـة مهتـزة. وقـد اتفـق أن هـذا القيـاس يمكـن أن يكـون هـو مقـدار الطاقـة E بعـد اضـمحلال الطاقـة الابتدائية E_o بمقدار $\frac{1}{e}$ أي أن:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_o} \; e^{-1} \quad \text{......................(٥-٢٨)}$$

وهذا يعني من المعادلة (٥-٢٧) أن $\gamma t = 1$, أي أن الاضـمحلال فـي (٥-٢٨) يحـدث بعد مرور زمن $t = \frac{1}{\gamma}$ أي كلمـا كـان معامـل المقاومـة $\frac{R}{m}$ كبيـراً كـان الـزمن الـلازم للاضمحلال قصيراً.

في الوحدة الأولى قلنا أن : التردد الزاوي × الزمن = الزاوية بالراديان

أي أن : $\omega t = \theta$. وبما أن التردد الزاوي عموما هو:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{rad}{s}\right)$$

حيث f التردد وT الزمن الدوري وهو الزمن اللازم لإكمال اهتزازه كاملـة, أي زاويـة تساوي 2π, لذلك فان

$$\theta = \frac{2\pi t}{T} = \omega t$$

حيث تصـبح $2\pi = \theta$ عنـدما يصـبح الـزمن T = t. وعليـه فـان ωt هـي الزاويـة بالراديـان التـي يقطعهـا الجسـم المهتـز بعـد زمـن مقـداره t. وعليـه بمـا أن الـزمن الـلازم

لاضمحلال الطاقة E بمقدار $\frac{1}{e}$ هو $t = \frac{1}{\gamma}$ وبالتالي ولهذه الحالة بالذات نجد أن :

$$\omega_1 \, t = \frac{\omega_1}{\gamma}$$

وهذه الكمية $\frac{\omega_1}{\gamma}$ (وهي عدد لا وحدة له) اعتبرت مقياساً لاضمحلال الاهتزازات المضمحلة وقد أعطيت الرمز **Q** أي أن:

$$\boxed{Q = \frac{\omega_1}{\gamma}} \qquad \text{.................(٥-٢٩)}$$

وتسمى **معامل النوعية أو معامل الجودة** **Quality factor** للنظام المهتز المضمحل .

معامل الجودة النوعية للنظام المهتز المضمحل

هو النسبة بين التردد الزاوي لذلك النظام مقسوماً علي ثابت الاضمحلال γ ويساوي مقدار الزاوية بالراديان التي يقطعها الجسم المهتز حتى تصبح طاقته e^{-1} من قيمتها الابتدائية أي : $\frac{E}{E_o} = e^{-1}$

والمعامل
صغيراً ل
الزاوي للاهتزازة المضمحلة.

$$\omega_1 \approx \omega_o$$

وهذه العلاقة مفيدة في حالة الاضمحلال البطيء

فمن (٥-٢٩) $\qquad \gamma = \frac{\omega_1}{Q}$

أي أن :

$$A = A_O \, e^{-\frac{\omega_1 t}{2Q}}$$

وكذلك الطاقة :

$$\boxed{E = E_O \, e^{-\frac{\omega_1 t}{2Q}}} \qquad \text{........................ (٥-٣٠)}$$

أي كلما كانت قيمة Q كبيرة كان الاضمحلال بطيئاً. وفي هذه الحالة يمكن استعمال ω_0 للحركة التوافقية البسيطة بدلاً ω_1 للحركة المضمحلة لان حسابها مباشر.
وملاحظة أخيرة هنا هو أننا عند مناقشتنا للحركة التوافقية البسيطة اعتبرناها بدون اضمحلال ولكن الواقع منذ الآن فصاعداً يقتضي الأخذ في الاعتبار وجود اضمحلال ما لم ينص صراحة على غير ذلك.

مثال

في تجربة لحركة توافقية بسيطة ترددها 10 Hz وجد بعد زمن t قدره 100 s أن اتساع هذه الحركة انخفض إلى $\frac{1}{e}$ من قيمته الابتدائية أوجد :

أ) ثابت الاضمحلال γ .

ب) تردد الحركة التوافقية المضمحلة .

ج) معامل الجودة Q .

د) أوجد النسبة $\frac{E}{E_o}$ بعد الزمن t .

الحل:

أ) $A_o = 0.1\, m$ ، $f = 10\ Hz$

$$\omega_o = 2\pi f = 6.2839 \times 10 = 62.839$$

من المعادلة : $A(t) = A_o e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

نجد أن:

$$\frac{1}{e} A_o = A_o e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

أي أن : $-\frac{\gamma}{2} t = -1$

وبالتالي : $\gamma = \frac{2}{t} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \frac{1}{s}$

$$= 0.02 \quad s^{-1}$$

ب) ومن المعادلة: $\omega_1^2 = \omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{4}$

$$\omega_1^2 = 3947.74 - 0.0001 \approx \omega_o^2$$

ج) معامل الجودة : $Q = \frac{\omega_1}{\gamma} = \frac{3948.74}{0.02} = 197387$

وهي قيمة كبيرة جداً كما توقعنا للحركة المضمحلة اضمحلالاً حقيقياً حيث $\gamma = 0.02$.

د) $\frac{E}{E_o} = e^{-\gamma t} = e^{-\frac{100}{50}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} = 0.1354$

أي أن اضمحلال الطاقة أسرع من اضمحلال الاتساع وهو المتوقع لان $E \propto A^2$.

تدريب (٣)

حركة توافقية مضمحلة ثابت اضمحلالها 10/s وترددها 60 Hz, أوجد :

أ) معامل الجودة

ب) تردد الحركة التوافقية البسيطة الأصلية

ج) الزمن اللازم لكي تصبح $E/E_o=e^{-1}$.

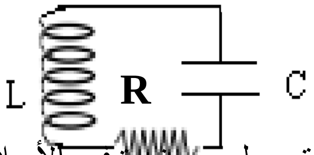
أسئـ

١. برهن أن الطاقة الكلية تتناسب مع مربع اتساع الحركة التوافقية.
٢. ناقش هذه العبارة: اتساع الحركة التوافقية المضمحلة يتناقص بمرور الزمن
٣. عرف معامل النوعية أو معامل الجودة للنظام المهتز المضمحل, ووضح فائدة هذا المعامل؟

5.5.نمــــوذج لحركـــــة توافقيـــــة مضـــــمحلة كهرومغناطيسية

عزيزي الدارس,

قد ناقشنا في الوحدة الرابعة الحركة التوافقية البسيطة الكهربية المغناطيسية المتولدة من وجود مكثف مشحون سعته C وشحنته q موصل معه في دائرة مغلقة ملف عديم المقاومة محاثته L, علماً بأن الدائرة كلها اعتبرت عديمة المقاومة. ولذلك فان الحركة التوافقية البسيطة عبر تلك الدائرة اعتبرت حركة غير مضمحلة.



الشكل (٥-٥): دائرة ملف ومكثف ومقاومة **LCR**

غير أن الواقع هو وجود مقاومة حتى ولو صغيرة في الأسلاك الموصلة وفي الملف مما يتسبب في استنزاف الطاقة علي هيئة حرارة, علماً بان الطاقة المستنزفة تتناسب مع مربع التيار أي $R I^2 =$ حيث R المقاومة. ولذلك سنضع الدائرة في صورتها الحقيقية بوجود المقاومة R كما في الشكل (٥-٥).

وبينما في الأنظمة الميكانيكية نحصل علي معادلة الحركة من مجموع القوى المؤثرة علي النظام ففي النظام الكهربي تحل محل القوى فروق الجهد. ففرق الجهد بين طرفي المكثف

$$\frac{q}{C} = V_c \quad .... (٥-٣١)$$

حيث q شحنة المكثف وC سعته. فرق الجهد بين طرفي المقاومة ومن قانون أوم

$$RI = V_R \quad .... (٥-٣٢)$$

حيث R المقاومة وI التيار. أما فرق الجهد بين طرفي الملف فهو

$$\boxed{L\frac{dI}{dt} = V_c} \quad .... (٥-٣٣)$$

حيث L المحاثة .

ومن قاعدة كيرتشوف كما فعلنا في الوحدة الرابعة لدائرة LC نجد أن:

$$\boxed{L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{c} = 0} \quad .... (٥-٣٤)$$

(مجموع فرق الجهد = صفر) . وهنا أيضا ًتماما كما في حالة أي دائرة كهربية فان التيار:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

أي أن التيار هو معدل تغير الشحنة التي تمر في الموصل في الزمن .فإذا لم يكن هناك تغير في الشحنة بمرور الزمن فلا يوجد تيار . وعليه تصبح المعادلة هي:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0$$

أو

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0} \qquad (٣٥-٥)$$

أو

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma\frac{dq}{dt} + \omega_o^{\,2}q = 0} \qquad (٣٦-٥)$$

حيث $\omega_o^{\,2} = \frac{1}{LC}$ هو التردد الزاوي لدائرة LC بدون مقاومة والذي حصلنا عليه في الوحدة الرابعة. المعادلة (٣٦-٥) هي نفس معادلة الحركة التوافقية المضمحلة ولكن للشحنة بدلاً عن الإزاحة. وهي بالتالي لها نفس الحلول التي وجدناها سابقا أي أن :

$$q = q_o e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_1 + \varphi)$$

حيث $\omega_1^{\,2} = \omega_o^{\,2} - \frac{\gamma^2}{4}$. أي أن :

$$\boxed{\omega_1^{\,2} = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad (٣٧-٥)$$

حيث يقل التردد لأي حركة مضمحلة عن التردد الطبيعي لدائرة LC أي $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ بمقدار يتوقف على مقاومة المنظومة الكهربية لمرور التيار الكهربي R. فإذا كانت الكمية $\frac{\gamma^2}{4} << \omega_o$ فإن الاهتزازة الكهرومغناطيسية ستخمد في الدائرة.

وبالتالي فهناك اضمحلال شديد مثلها مثل الأنظمة الميكانيكية. أما الاضمحلال الحرج والاضمحلال الخفيف فيكون بدرجات متفاوتة حسب قيمة R للدائرة.

تدريب (٤)

دائرة كهربية مكونة من ملف محاثته L=10 H ومكثف سعته F $C=10^{-9}$ ومقاومته R=500 kΩ , أوجد:

أ) التردد الطبيعي ω_o للدائرة ب) تردد الاهتزازة المضمحلة

أس

؟

١. ما هو سبب استنزاف الطاقة في الحركة التوافقية الكهربية المغناطيسية ؟

٢. قارن بين الحركة التوافقية المضمحلة الكهرومغناطيسية وبين الحركة التوافقية المضمحلة الميكانيكية.

الـ

عز

ما الذي ناقشناه في هذه الوحدة ؟

أنها مفاهيم كثيرة ومهمة جدا : هل يمكنك أن تلخص ذلك بإيجاز؟ لقد تعرفنا أولاً على معادلة الحركة التوافقية البسيطة للأنظمة المهتزة وهي :

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o \mathrm{x} = 0$ حيث ω_o هو التردد الزاوي للحركة التوافقية البسيطة ويسمى بالتردد الطبيعي لتلك الحركة.

الحركة التوافقية المضمحلة : الشيء الطبيعي هو وجود قوة مقاومة للحركة الاهتزازية وهي $\mathrm{F} = R\,v = R\frac{dx}{dt}$ حيث R ثابت التناسب و v السرعة. ولذلك فمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة بسبب قوة المقاومة هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o{}^2\mathrm{x} = 0$$

حيث γ يسمى ثابت الاضمحلال ووحدته وحده التردد (s^{-1}) يساوي $\frac{R}{m}$.

حل معادلة الحركة المضمحلة هو:

$$\mathrm{x} = \mathrm{A}\ e^{\alpha t + \varphi}$$

حيث $\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_o^2}$

وهناك ثلاث حالات:

١) $\omega_0^2 < \frac{\gamma^2}{4}$ حيث الحركة مخمدة لان المقاومة كبيرة وتسمى بحالة الاضمحلال الشديد.

٢) $\omega_0^2 = \frac{\gamma^2}{4}$ ويسمى الاضمحلال الحرج والحركة أيضاً غير اهتزازية.

٣) $\omega_0^2 > \frac{\gamma^2}{4}$ ومنها $\alpha = -\frac{\gamma}{2} + i\omega_1$ حيث:

$\boxed{\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ وهو تردد الحركة التوافقية المضمحلة .

وحل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة هو:

$$\boxed{x = A_o e^{-\frac{\gamma}{2}} e^{\pm(i\,\omega_1 t) + i\varphi}}$$

حيث يضمحل الاتساع حسب المعادلة

$$\boxed{A(t) = A_o\, e^{-\frac{\gamma}{2}}}$$

وفي نفس الوقت تضمحل طاقة الحركة حسب المعادلة $E = E_0 \;\; e^{-\gamma t}$ ويعرف معامل الجودة بأنه مقدار الزاوية بالراديان التي يقطعها الجسم المهتز حتى يصبح طاقته e^{-1} من طاقته الابتدائية أي $Q = \frac{\omega_1}{\gamma}$.

أما في حالة دائرة LCR فقد وجدنا أن معادلة الاهتزازة المضمحلة هي

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma\frac{dq}{dt} + \omega_o^2\, q = 0$$

حيث $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ هو تردد الاهتزازة التوافقية البسيطة لدائرة LC بينما تردد الاهتزازة المضمحلة هو: $\omega_1^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس،

في الوحدة القادمة سنتعرف على مفاهيم أساسية ينبغي عليك الإلمام بها. وتلك الوحدة بعنوان الاهتزازت القسريه وظاهرة الرنين, حيث نجد أن الاهتزازة القسريه هي اهتزازة المنظومة المهتزة أو القابلة للاهتزاز عندما تؤثر عليها باستمرار قوة خارجية مهتزة. وجود هذه القوة الخارجية تؤدي إلى ظاهرة هامة جدا تسمى ظاهرة الرنين حيث سنتعرف عليها بالتفصيل.نرجو أن تحدها وحدة مفيدة.

إجابات التدريبات

تدريب (١)

١)الاجابة بالوحدة

٢) المعادلة هي (١٢-٥) $\frac{\gamma^2}{4} > \omega_o{}^2$ وذلك عندما تكون المقاومة كبيرة ويكون هناك اضمحلال شديد.

تدريب (٢):

أ) $k=39.49\ kg/s^2$ ب) $R= 0.1\ kg/s$ ج) $\omega_1 = 62.64/\ s$ د)

$A=0.037m$ هـ) لكي تصبح الاهتزازة مخمدة $\gamma>125.6$

تدريب (٣): أ) $Q=6$ ب) $\omega_o=60.21$ ج) $t=0.1\ s$

تدريب (٤): أ) $\omega_o = 10^4\ Hz$ ب) $\omega_1= 5 \times 10^3\ Hz$

مسرد المصطلحات

عزيزي الدارس،،

فيما يلي قائمة بالمصطلحات الواردة في الوحدة باللغة الإنجليزية، كي نسهل عليك الرجوع إلى أي مراجع أجنبية، أو البحث عبر شبكة الإنترنت.

الاهتزازات المضمحلة	Damping Oscillations
ثابت الاضمحلال	Damping constant
الاضمحلال الشديد	Heavy Damping
الاضمحلال الحرج	Critical Damping
التحلل الاسي	Exponential decay
معامل الجودة	Quality factor


الوحدة السادسة
الاهتزازت القسريه وظاهرة الرنين
Forced Oscillations Resonance

محتويات الوحدة السادسة

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،،

مرحبا بك إلى هذه الوحدة وهي بعنوان الاهتزازت القسريه وظاهرة الرنين وتتألف من قسمين رئيسين. القسم الأول بعنوان الاهتزازت القسرية و يتكون من ثلاث اجزاء ، تبدأ بتعريف مفهوم الاهتزازت القسرية ثم تنتقل إلى الاهتزازت القسرية مع وجود الاضمحلال ثم نتعرف على رنين الاتساع ثم تعريف زاوية الطور في الحركة التوافقية القسرية.

بعد ذلك ننتقل معا إلى القسم الثاني ، ونتعرف على الاهتزازات الكهربية المغناطيسية، حيث نشرح فيه كل من مفهوم الرنين في دائرة LRC ثم رنين السرعة و رنين القدرة وثم نتعمق في ظاهرة الرنين في الطبيعة.

عزيزي الدارس،،

وقد زودنا الوحدة بمجموعة من الأمثلة المحلولة، والتي حرصنا أن تحتوى أفكارا توضح بعض المفاهيم الواردة في الوحدة، و ننصحك بعد حل الأمثلة الواردة أن تنتقل إلى حل التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي لتساعدك على فهم المادة بشكل أعمق.

نأمل أن نستمع لرأيك فيما ورد في هذه الوحدة لتساهم معنا في تطوير محتواها مستقبلاً.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس،،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة يتوقع منك أن تكون قادراً علي أن:

١. تتفهم أهمية الاهتزازات القسرية
٢. تتعرف على نماذج الاهتزازت القسرية مع وجود الاضمحلال في الحركة التوافقية.
٣. تشرح رنين الاتساع و زاوية الطور في الحركة التوافقية القسرية
٤. تتعرف على نموذج للاهتزازة الكهربيه المغناطسيه القسرية
٥. تتمكن من إيجاد رنين القدرة ورنين السرعة في الحركة التوافقية القسرية
٦. تعرف عرض منحنى رنين القدرة عند منتصف أقصى ارتفاع
٧. تتعرف علي أمثلة لظاهرة الرنين في الطبيعه
٨. تحل مسائل وتمارين الاهتزازات القسرية.

6 . الاهتزازات القسرية و الرنين

1.6. القسم الاول الاهتزازات القسرية

عزيزي الدارس،،

لقد تعرفنا خلال كل الوحدات السابقة علي التردد الزاوي للحركة التوافقية البسيطة و الذى رمزنا له في الوحدة السابقة بالرمز ω_o لتميزه عن التردد الزاوي للحركة المضمحلة، وقد وجدنا دائماً أن هذا التردد الزاوي يتوقف على :-

- كميات فيزيائية ذات علاقة مباشرة بالمنظومة المهتزة.
- القوة المسببة للاهتزازة.

التردد الطبيعي Natural frequency

هو التردد الزاوي ω_o للمنظومة المهتزة بدون أن تؤثر عليها أيّ قوة مقاومة

ففي حالة البندول الزنبركى فإن :-

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_o$$

حيث k ثابت قساوة الزنبرك وهو معامل التناسب لقوة الإعادة $F = -kx$ و m هي الكتلة المعلقة فى الزنبرك وهى أيضا ثابت تناسب للقوة $F = ma$ ، حيث a التسارع

عزيزي الدارس، نجد أن كل الزنبركات التى لها نفس قيمة الثابت k إذا علقنا عليها نفس قيمة الكتلة m فستهتز في حركات توافقية بسيطة كلها لها نفس قيمة التردد ω_o. ومهما كررنا المحاولات فسنجد نفس قيمة ω_o (بافتراض أن الاضمحلال ضعيف جدا أو معدوم). ونفس الشيء للبندول البسيط حيث :-

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

حيث g تسارع السقوط الحر (عجلة الجاذبية) وهو مقدار ثابت في المكان الواحد و ℓ طول البندول وهو طبعاً يمكن أن يختلف من بندول لآخر . فإذا كان عندنا عدد من البندولات لها نفس الطول وحافظنا على أن يكون الاتساع صغيراً فسنحصل على نفس التردد الزاوي لجميع البندولات.

- ولسائل فى انبوب على شكل U

$$\boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}}$$

- ولجسم يطفو على سطح الماء

$$\boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{A\rho g}{m}}}$$

- ولدائرة مكثف سعته C وملف محاثته L

$$\boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{1}{L\,C}}}$$

وهكذا فإن لكل منظومة ترددها الطبيعي ω_o ويشمل ذلك أشياء قد لا تخطرعلى بالنا مثل المباني والكباري وغيرها . ولكن دائما هناك قوة مقاومة للحركة الاهتزازية مما يحولها إما إلى حركة مخمدة اذا كانت المقاومة للحركة كبيرة جداً أو يحولها إلى حركة اهتزازية مضمحلة ترددها ω_1 حيث

$$\omega_1{}^2 = \omega_o{}^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

والسؤال الآن، عزيزي الدارس ، ماذا يحدث للمنظومة المهتزة إذا أثَّرَت عليها قوة خارجية مهتزة أو مترددة قد يوافق أو يختلف ترددها عن التردد الطبيعي للمنظومة المهتزة ؟

ومنذ الآن سنقول أنه إذا كان تردد هذه القوة يساوى أو قريباً من التردد الطبيعي للمنظومة فإن المنظومة ستَه تو بحيث يزيد اتساعها بصورة واضحة فى ظاهرة تسمى بالرنين (Resonance) وهذا ما لن يحدث مع أيّ تردد آخر بعيداً عن التردد الطبيعي .

ولكي نفهم ظاهرة الرنين Resonance بصورة أعمق لابد من دراسة تفصيلية لما يحدث للمنظومة القابلة للاهتزاز فى حركة توافقية بسيطة ، مثلا : بندول زنبركي، بندول بسيط، دائرة كهربيه LC أو LRC ... إذا أثّرت علي ها باستمرار قوة خارجية مهتزة ترددها ω حيث ينتج من هذا التاثير مايسمى بالاهتزازة القسرية .

1.1.6 الاهتزازة القسرية Forced Oscillation

عزيزي الدارس،

في حالة البندول الزنبركي المعلق به كتلة m حصلنا سابقاً على القوى التي تتسبب في حركته في حركة توافقية بسيطة

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

حيث الطرف الأيسر هو القوة = الكتلة× ال تسارع و الطرف الأيمن هو قوة الاعاده −kx وهي القوة التي تعمل طول الوقت لاعادة الزبرك لوضعه الطبيعي حيث k ثابت قسواة الزنبرك أو ثابت الزنبرك.

الآن نفرض ، عزيزي الدارس، أن هناك قوة خارجية F مترددة تؤثر على هذه المنظومة وبالتالي تلقائياً تضاف هذه القوة إلى القوى أعلاه على الجانب الأيمن حيث تعمل مع قوة الاعادة على التأثير على المنظومة، أي أن

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \mathrm{F}$$

سنفترض أن هذه القوة الخارجية المترددة F تتناسب مع دالة جيبية لكي تتناغم القوة مع الحركة البسيطة وأن اتساع هذه القوة (أي أقصى قيمة لها) هو F_o ، أي أن:

$$F = F_o \cos(\omega t)$$

من المعادلتين أعلاه نحصل على:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega t$$

بقسمة طرفي المعادلة على الكتلة m نحصل على معادلة الحركة التوافقية البسيطة للزنبرك مع تأثير القوة الخارجية :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m}\cos(\omega t)} \quad \text{.................................(1-6)}$$

حيث $\frac{k}{m} = \omega_o^2$

واضح، عزيزي الدارس، أن هناك ترددان زاوييان في هذه المعادلة:

- أحدهما التردد الزاوي للحركة التوافقية البسيطة (التردد الطبيعي) ω_o
- الآخر هو تردد القوة المترددة ω .

دها

ω_o . ولكن ما أن تبدأ القوة المترددة الخارجية التي ترددها ω بالتأثير فستعمل الاهتزازتان معاً . ويسمى هذا الوضع بالحالة الإنتقالية (Transient state) . وبما أن أي منظومة حقيقية مهتزة لابد أن يحدث استنزاف لطاقاتها حسب ما وصلنا إليه عند مناقشة الحركة المضمحلة بسبب وجود مقاومة ، فإن الحركة التوافقية البسيطة طال الوقت أو قَصُرْ ، ستتلاشى و تصبح القوة الخارجيه المؤثرة هي المهيمنة و يصبح تردد الحركة هو ω . وعند الوصول الى هذه الحالة تسمى الحركة بالحركة المستقره الحالة (Steady State Motion) .

والسؤال المهم هو ، هل يمكن اطلاق وصف توافقية (harmonic) على هذه الحركة المولدة بتأثير القوة الخارجية؟ . والواقع أن الحركة التوافقية البسيطة التي ترددها ω_o لا توجد إلا عندما $\omega_o = \omega$. ولكن الحركة تظل حركة توافقية فقط بالنسبة للقوة الخارجية المترددة المسببة لها و لها نفس ترددها وفرق طورها .

واضح من النقاش السابق ان حل المعادلة (6−1) سيكون للحركة المستقرة الحالة حيث سنفترض أنه لا توجد حركة توافقية بسيطة أو خمدت وأن القوة الخارجية المترددة هى المؤثرة فقط. والحل يمكن أن يكون حلاً إما:

- مركباً كما سنرى لاحقاً
- حقيقياً حيث نعتبر الإزاحة x حقيقية ويكون الحل هو

$$x = A \cos(\omega t)$$

أي أن الازاحة تتغير مع تغير القوة الخارجية و بنفس ترددها العام . والامثل هو افتراض وجود زاوية الطور φ حتى يكون هناك ثابتان فتصبح

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

ويمكنك ، عزيزي الدارس، أن تجرب الحلين . ولكننا هنا سنطبيق ما تعلمناه سابقاً من أن الحل المركب هو الحل الأمثل ما لم يكن الحل باعتبار x كمية حقيقية (غير مركبة) هو الحل الأبسط كما فعلنا فى حالة الاهتزازة المضمحلة.

ولذلك سنفترض أن :

$$F = F_o e^{i\omega t} \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; (2-6)$$

وأن الازاحة المركبة هي : z=x+iy حيث الحل النهائى هو الجزء الحقيقى x .

وعليه :

$$z = Ae^{i(\omega t+\varphi)} \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; (3-6)$$

حيث اضفنا زاوية الطور φ وعليه تصبح المعادلة (6−1) كالآتى :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \omega_o{}^2 z = \frac{F_o}{m} e^{i\omega t} \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\;(4-6)$$

وهى معادلة الحركة التوافقية القسرية المركبة. وبما أن :

$$\frac{dz}{dt} + i\omega A\, e^{i(\omega t+\varphi)} = i\omega z$$

فإن :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z$$

بالتعويض في المعادلة (6−4) نجد أن

وعليه
$$-\omega^2 z + {\omega_o}^2 z = \frac{F_o}{m} e^{i\omega t}$$

ومنها
$$({\omega_o}^2 - \omega^2) z = \frac{F_o}{m} e^{i\omega t}$$

و بالتعويض عن **z** نحصل على
$$({\omega_o}^2 - \omega^2)\, A\, e^{i(\omega t+\varphi)} = \frac{F_o}{m}\; e^{i\omega t}$$

وعليه
$$({\omega_o}^2 - \omega^2)\, A\, e^{i\omega t} e^{i\varphi} = \frac{F_o}{m}\; e^{i\omega t}$$

ومنها
$$({\omega_o}^2 - \omega^2)\, A = \frac{F_o}{m}\; e^{-i\varphi}$$

ولكن
$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi$$

بالتعويض عن القيمة اعلاها في المعادلة السابقة نحصل علي

$$({\omega_o}^2 - \omega^2)\, A = \frac{F_o}{m}\; (\cos\ \varphi - i\ \sin\ \varphi)$$

مثل هذه المعادلة المركبة يمكن فصلها إلى جزيئن كل واحد منها قائم بذاته:

- جزء حقيقي هو
$$({\omega_o}^2 - \omega^2)\, A = \frac{F_o}{m}\; \cos\ \varphi$$

- جزء مركب ومجموعه يساوى الصفر أي :
$$0 = - i\ \sin\ \varphi$$

وعليه فإن قيمة الاتساع بمكن الحصول عليها بجعل A موضوع القانون:

$$\boxed{A = \frac{\frac{F_o}{m}\ \cos\ \varphi}{({\omega_o}^2 - \omega^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5-6)$$

عزيزي الدارس، نلاحظ أن الاتساع غير ثابت ويتغير بتغير تردد القوة الخارجية . وقد تتساءل عن وجود تردد الحركة التوافقية البسيطة ω_o بينما قلنا ان الحل هو للحركة المستقرة الحالة بعد خمود الحركة التوافقية البسيطة. و السبب هو ولأن:

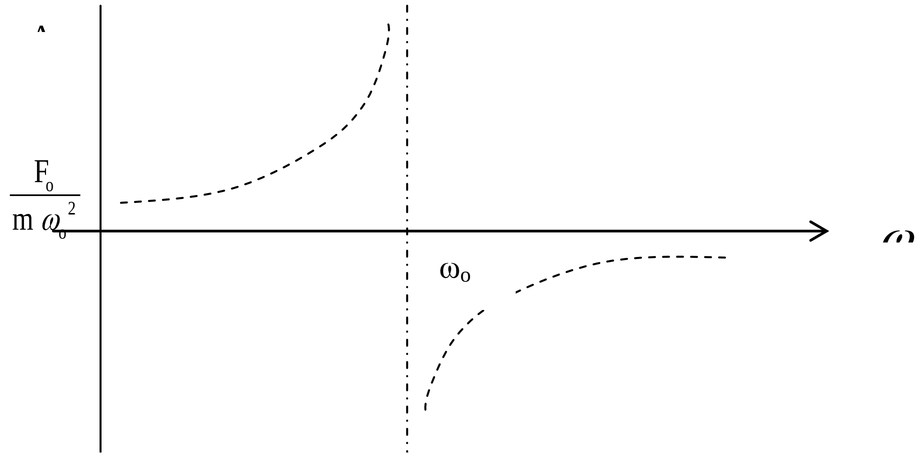
$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_o$$

وكل من k و m كميات حقيقية وجزء من المنظومة حتى فى حالة عدم وجود حركة اهتزازية. ونلاحظ، عزيزي الدارس، من معادلة الاتساع أن:-

الاتساع يقل كلما كان الفرق بين ω و ω_o كبيراً وتزيد قيمته كلما كان هذا الفرق صغيراً . كذلك نلاحظ من المعادلة أن :

١. الاتساع يكون موجباً عندما تكون $\omega < \omega_o$

٢. ويكون سالباً عندما تكون $\omega > \omega_o$ كما موضح في الشكل (1-6).



شكل (1-6) : تغير الاتساع A مع التردد ω

هذا التغير الفجائي من الموجب إلى السالب عند $\omega = \omega_o$ يدل على وجود خللٍ ما في هذه المسألة .

ملحوظة

كذلك فان المقام فى المعادلة (6-5) يصبح صفراً عندما $\omega = \omega_o$ مما يعني أن قيمة الاتساع تصبح لا نهائية وهو أمر لايمكن حدوثه من الناحية الفيزيائية.

السبب في هذين الخللين هو تجاوزنا عند صياغة المسألة لحقيقة أن الحركات الاهتزازية تتعرض لاستنزاف طاقتها مما يؤدى إلى اضمحلالها . وكما سنرى فإن إهمال الاضمحلال الذى أدى إلى هذا الخلل سيزول بمجرد أخذ المقاومة للحركة في الاعتبار .

تدريب (1)

.استنبط ان اتساع الحركة القسرية بدون اضمحلال يعطي بالقانون:

$$A = \frac{\frac{F_o}{m} \cos \varphi}{(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

ثم وضح سبب أو أسباب وجود الخلل فيها.

أسئلة التقويم الذاتي

1. اذكر بعض المنظومات القابلة للاهتزاز في حركة توافقية بسيطة
2. عرف الاهتزازة القسرية.
2. أكمل الجمل التالية

١. تقل قيمة الاتساع كلما كان الفرق بين ω و ω_o .... وتزيد قيمة الاتساع كلما كان الفرق...............

٢. الاتساع يكون موجباً عندما تكون ....بينما يصبح سالباً عندما تكون ....

3.ما علاقة الاتساع بقيم ω و ω_o

2.1.6 الاهتزازات القسرية مع وجود الاضمحلال

عزيزي الدارس،

نعود الآن إلى معادلة الاهتزازة المضمحلة التي حصلنا عليها في الوحدة الخامسة (المعادلة (5-3)) .

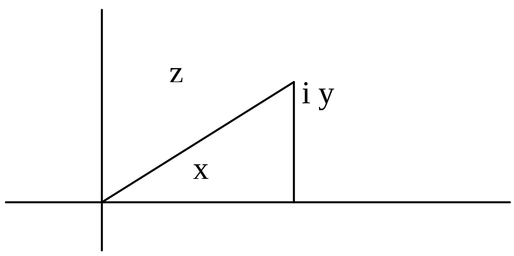
$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+R\frac{dx}{dt}+k\ x=0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3-5)$$

حيث R ثابت تناسب قوة المقاومة

طبعاً يمكننا اعتبار الإزاحة ذات قيمة حقيقية والاستمرار فـي التحليل على هذا الأساس، ولكن من الأفضل كما سيتضح الاستمرار في الحل المركب للاهتزازة القسرية باستخدام المتجه الدوار المركب z حيث :-

$$\boxed{z = x + iy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6-6)$$

كما موضح في الشكل.



وفي النهاية سنحصل على الحل والذي هو الجزء الحقيقي هو $x = \mathrm{Re}\ z$.

نفرض الآن كما فعلنا سابقاً أن هناك قوة خارجية مترددة تؤثر على هذه المنظومة وأن هذه القوة هى :

$$\boxed{F = F_o\ e^{i\omega t}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7-6)$$

وعليه تصبح المعادلة (5-3) للحركة الاهتزازية المضمحلة التي اصبحت قسرية كالآتي:

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2}+\gamma\frac{dz}{dt}+\omega_o^2\ z=\frac{F_o}{m}\ e^{i\omega t}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8-6)$$

فلإذا افترضنا، عزيزي الدارس، في البداية أن المنظومة فى حالة حركة اهتزازية وبالتالي ستضمحل وفي نفس الوقت تؤثر عليها القوة الخارجية بالتردد ω وتكون المنظومة في الحالة الانتقالية حتى تتلاشى الاهتزازة الاصلية بسبب الاضمحلال وتصبح السيطرة للقوة المترددة الخارجية وتنتقل المنظومة للحركة المستقرة (Steady state) .

وبناءً على ذلك سنقوم بحل المعادلة (6−8) في هذه الحالة المستقرة ويمكننا توقع أن يكون حلها هو:

$$z = Ae^{i(\omega t-\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9-6)$$

لقد اخترنا هنا أن يكون فرق الطور φ بالسالب وليس بالموجب كما تعودنا فى السابق وسنعرف الفائدة من ذلك لاحقا. ولكن عموما فإن:

- $-i\varphi$ تعني الدوران مع عقارب الساعه
- بينما $+i\varphi$ تعنى الدوران عكس عقارب الساعه

بتفاضل (6−9):

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \mathrm{i}\omega\mathrm{A}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega \mathrm{t}-\varphi)} = \mathrm{i}\omega\mathrm{z}}$$

بالتفاضل مرة أخرى:

$$\frac{dz}{dt} = -\ \omega^2\mathrm{A}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega \mathrm{t}-\varphi)} = -\ \omega^2\mathrm{z}$$

بالتعويض في (6−8) نجد أن:

$$(-\omega^2 A + i\gamma\omega A + \omega_o{}^2 A)e^{i(\omega t-\varphi)} = \frac{F_o}{m}e^{i\omega t}$$

بعد الاختصار اللازم نجد أن:

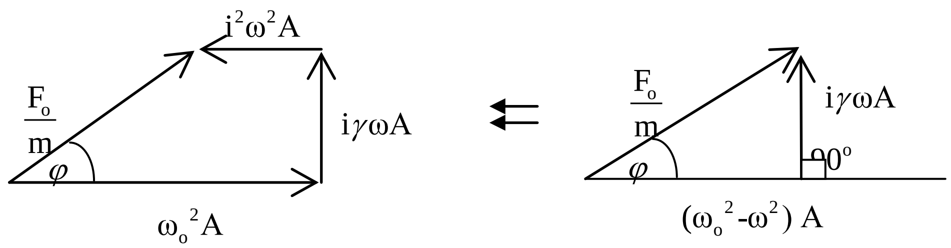
$$[(\omega_o{}^2 - \omega^2)\mathrm{A} + \mathrm{i}\gamma\omega\mathrm{A}]\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \frac{\mathrm{F_o}}{\mathrm{m}}$$

أو

$$\boxed{(\omega_o^2 - \omega^2)A + i\gamma\omega A = \frac{F_o}{m}\, e^{i\varphi}} \quad ....(10-6)$$

والآن سيتضح لماذا اخترنا زاوية الطور φ بالسالب في (6–7) ، أي $-i\varphi$ حيث تحولت إلى الجانب الأيمن في المعادلة (6–10). وبما أن $i\varphi$ أصبحت بالموجب فإن الكمية $\frac{F_o}{m}$ تدور في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة وهو الاتجاه المطلوب .

المعادلة (6–10) يمكن توضيحها بيانياً بالأشكال التالية :



شكل (6–2): المتجهات الدوارة للمعادلة (6–10)

عزيزي الدارس،،

الشكل (6–2) (أ) يوضّح أن الكمية الحقيقية $\gamma\omega\ A$ مضروبة في i مما يعني دورانها عكس عقارب الساعة بمقدار $\frac{\pi}{2}$ ولذلك نجد الكمية $i\ \gamma\ \omega\ A$ عمودية على الكمية الحقيقية $(\omega_o^2 - \omega^2)\ A$ وبالتالي :

- فإن الكمية $\gamma\omega\ A$ هي الضلع المقابل للزاوية φ
- بينما $(\omega_o^2 - \omega^2)\ A$ هي الضلع المجاور للزاوية φ.

نلاحظ، عزيزي الدارس أيضاً في الشكل (6–2) (ب) أن الكمية $-\omega^2A = i^2\ \omega^2\ A$ أي الدوران عكس عقارب الساعة بمقدار $\frac{\pi}{2}$ مرتين (أي بمقدار π)، و عليه فإن المعادلة (6–10) تصبح بعد التعويض عن $e^{i\varphi} = \cos\ \varphi + i\ \sin\ \varphi$ كالآتي:

$$(\omega_o^2 - \omega^2)A + i\gamma\omega A = \frac{F_o}{m}\cos\varphi + i\frac{F_o}{m}\sin\varphi$$

الجزء الحقيقي والجزء الخيالي لهذه المعادلة المركبة كُلٍ على حده كالآتي:

أولاً: الجزء الحقيقي هو :

$$\boxed{(\omega_o^2 - \omega^2)A = \frac{F_o}{m}\cos\varphi} \quad \text{.......................... a (11–6)}$$

ثانياً : الجزء الخيالي هو :

$$\boxed{\gamma\omega A = \frac{F_o}{m}\sin\varphi} \quad \text{............................ b (11–6)}$$

الآن بتربيع كل من المعادلتين(6–11) a و(6–11) b وجمعهما نحصل على:

$$(\omega_o^2 - \omega^2)^2 A^2 + \gamma^2\omega^2 A^2 = \frac{F_o^2}{m^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

ومنها نجد أن :

$$A^2[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2] = \frac{F_o^2}{m^2}$$

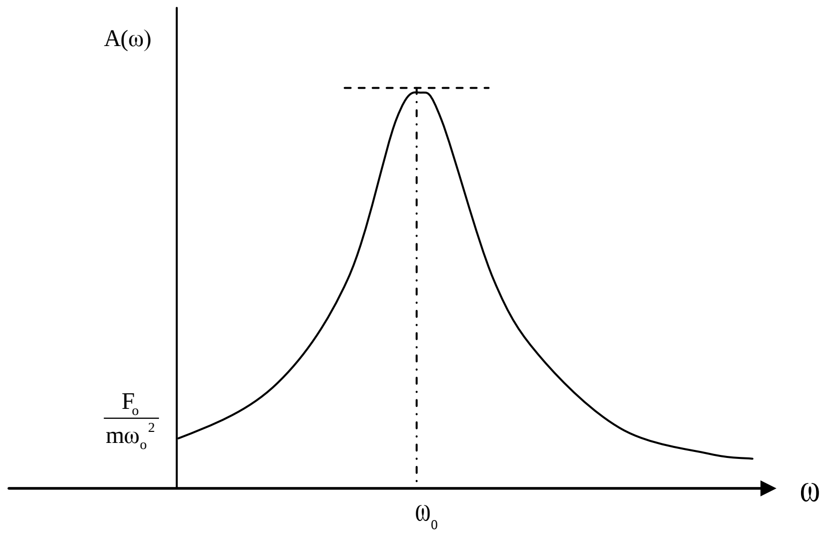
بعد أخذ الجذر التربيعي نجد أن الاتساع :

$$\boxed{A = \frac{\frac{F_o^2}{m^2}}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}} \quad \text{............................... (12–6)}$$

المعادلة (6–12) توضح أن اتساع الحركة التوافقية المضمحلة القسرية A هو دالة تتغير بتغير التردد الزاوي للقوة الخارجية المترددة ω أي أن:

$$A = A(\omega)$$

وأن قيمة هذا الاتساع تكبر كلما قَرُبَ التردد الزاوي للقوة المؤثرة ω من التردد الزاوي الطبيعي للحركة التوافقية البسيطة ω_o لأن مقام المعادلة (6–12) يحتوي تحت الجذر التربيعي علي الكميه $(\omega_o^2 - \omega^2)^2$.



الشكل (6–3): العلاقة بين تردد القوة الخارجية ω واتساع الحركة من المعادلة (6–12)

3.1.6 رنين الاتساع

الشكل (6–3) يوضح تغير الاتساع حسب المعادلة (6–12) مع تغير تردد القوة الخارجية، وسنرى بعد قليل أن الاتساع يصل إلى أقصى قيمة له إذا كان تردد القوة الخارجية المؤثرة يقل قليلاً عن التردد الطبيعي للحركة التوافقية البسيطة للمنظومة ω_o .

ومن البدهي أن قيمة التردد الذي يصل عنده الاتساع $A(\omega)$ إلى أقصى قيمة تحدث عندما يكون المقام في المعادلة (6–12) له أقل قيمة ممكنة . أما أقصى قيمة للاتساع $A(\omega)$ كما نلاحظ في الشكل هي قمة المنحنى، وبالتالي فميل المنحنى عند هذه النقطه يساوي صفراً، لأن ميل الاتساع في هذه النقطة موازٍ لمحور ω . وهذا يعني أنه في هذه النقطة $\frac{\Delta A}{\Delta \omega}$ = صفر لأن ΔA تساوي صفر . أي أن $\frac{d\ A(\omega)}{d\ \omega}$ = صفر عند القمة.

وبما أن المقام في حالة أقصى قيمة للاتساع A لا بد أن يكون له أقل قيمة ممكنة، فإن أعلى قيمة للاتساع تحدث عندما يكون تفاضل المقام

$$\frac{d}{d\omega}\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} = 0$$

نفس النتيجة يمكن الحصول عليها بأخذ تفاضل ما بداخل الجذر التربيعي لأن أقل قيمة لما بداخل الجذر التربيعي هي أيضاً أقل قيمة للجذر التربيعي أي أن:

$$\frac{d}{d\omega}\,[(\omega_o^{\,2}-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2]=0$$

وعليه:

$$\frac{d}{d\omega}\,[\omega_o^{\,4}-2\omega_o^{\,2}\,\omega^2+\omega^4+\gamma^2\omega^2]=$$

$$=-4\,\omega_o^{\,2}\,\omega+4\,\omega^3+2\gamma^2\omega=$$

$$=\;2\omega(2\,\omega^2-2\,\omega_o^{\,2}+\gamma^2)\;=0$$

وهذا يعني إما: $\omega =$ صفر

(وهو ليس الحل المطلوب) أو أن الحل هو:

$$2\,\omega^2-2\,\omega_o^{\,2}+\gamma^2=0$$

ومن هذا الحل نستنتج أن مقام المعادلة (6−12) يصبح أقل ما يمكن ، وبالتالي يصبح الاتساع $A(\omega)$ أعلى ما يمكن، فقط عندما تكون:

$$\boxed{\omega^2=\omega_o^{\,2}+\frac{\gamma^2}{2}}\qquad\text{.............................}(13\text{–}6)$$

التردد ω في (6−13) هو تردد القوة الخارجيه المؤثره على المنظومة المهتزة الضروري لكي يحدث الرنين في تلك المنظومة.

والأن أصبح واضحاً عزيزي الدارس من (6−13) أن التردد الزاوي الذي يحدث عنده الرنين أقل من التردد الطبيعي ω_o ويتوقف الفرق بين الترددين على قيمة γ (ثابت الاضمحلال)؛

ملاحظة

١ -فإذا كان الاضمحلال معدوماً فإن $\omega = \omega_o$ (أي حركة توافقية بسيطة قسرية)؛

٢ -وإذا كان الاضمحلال خفيفاً فإن $\omega < \omega_o$ ولكن الفرق بينهما ليس كبيراً.

وكلما كانت قيمة γ كبيرة بَعُدَت قيمة ω عن قيمة ω_o وأصبح الاتساع أقل.

عزيزي الدارس ،،

حسب تعريف معامل الجوده Q (Quality Factor) فإن:

$$\frac{\omega_o}{\gamma} = Q$$

هذا يعني أن قيمة Q تكون كبيره كلما قَلّتْ المقاومة. وعليه فإن:

$$\frac{\omega_o}{Q} = \gamma$$

وبالتعويض γ في (6–13) نجد أن:

$$\boxed{\omega^2 = \omega_o^{\ 2}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)} \quad \text{..............................(14–6)}$$

من هذه المعادلة يتضح أنه كلما زادت قيمة Q (اضمحلال ضعيف) كلما اقتربت قيمة ω من قيمة ω_o. وعلى ذلك فإن المعادلتين (6–13) و (6–14) تعطيان التردد الذي يحدث عنده الرنين (Resonance). وبالرغم من أننا استنتجناهما من معادلة حركة اهتزازية ميكانيكية فإنهما يمكن تطبيقهما على أي منظومة مهتزة أُخرى سواءً كانت كهربية مغناطيسية أو ذرية أو نووية أو غيرها.... ولكن يجب الانتباه إلى أن المعادلتين يعطيان قيمة التردد ω الذي يحدث عنده الرنين فقط.

ولكن في نفس الوقت فإن معامل الجودة Q هو كمية ثابتة للمنظومة المهتزة وذلك لأن ω_o خاصة بالنظام المهتز الحر و γ ثابتة للقوة المقاومة للمنظومة المهتزة المعين ة. ولذلك فإن Q يمكن استيعابها في معادلة الاتساع $A(\omega)$ أي المعادلة (6–12) والتي يمكن الآن كتابتها كالآتي:

$$\boxed{A(\omega) = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^{\ 2} - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\omega_o^{\ 2}}{Q^2}}}} \quad \text{.........................(15- 6)}$$

لأن $\gamma^2 = \frac{\omega_o^{\ 2}}{Q^2}$. ونلاحظ أنه عندما تكون ω= صفر يصبح الاتساع:

$$A(0)=\frac{F_o}{m\,\omega_o^{\,2}}$$

التي يمكن الحصول عليها من أيٍّ من المعادلتين (6–12) أو (6–15) وهي القيمة الموضحة في الشكل (6–3) عند ω = صفر.

لقد وجد أنه من الافضل استعمال $\frac{\omega}{\omega_o}$ كمتغير في المعادلة (6–15) بدلاً عن ω.

وهذه عملية اختيارية الغرض منها المساعده على التوضيح. وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلة (6–15) مرة أخرى في الصورة التالية :

$$A(\omega)=\frac{F_o/m}{\sqrt{\omega_o^{\,4}-2\omega_o^{\,2}\,\omega^2+\omega^4+\frac{\omega_o^{\,2}\omega^2}{Q^2}}}$$

ثم بضرب كل من البسط و المقام فى $\frac{1}{\omega_o\,\omega}$ نجد أن:

$$A(\omega)=\frac{\dfrac{F_o}{m\;\omega_o\;\omega}}{\sqrt{\dfrac{\omega_o^{\,2}}{\omega^2}+\dfrac{\omega^2}{\omega_o^{\,2}}-2+\dfrac{1}{Q^2}}}$$

$$=\frac{\dfrac{F_o}{m\;\omega_o^{\,2}}\times\dfrac{\omega_o}{\omega}}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_o}{\omega}+\dfrac{\omega}{\omega_o}\right)^2+\dfrac{1}{Q^2}}}$$

وبوضع $\frac{k}{m}=\omega_o^{\,2}$ ، أي أن $k=m\,\omega_o^{\,2}$ ، فإن الاتساع:

$$A(\omega) = \frac{F_o}{k} \frac{\omega_o / \omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega_o}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}} \qquad \text{...................... a(16−6)}$$

لاحظ أن:

$$A(0) = \frac{F_o}{m\,\omega_o^{\,2}} = \frac{F_o}{k}$$

أي الاتساع عندما يكون تردد القوة الخارجية ω = صفر في حالة الزنبرك.

ومن هنا، عزيزي الدارس، فان معادلة الاتساع $A(\omega)$ يمكن كتابتها كالآتي:

$$A(\omega) = \frac{A(0)}{\sqrt{\left(\frac{\omega_o^{\,2} - \omega^2}{\omega_o}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2}}} \qquad \text{........................ b(16- 6)}$$

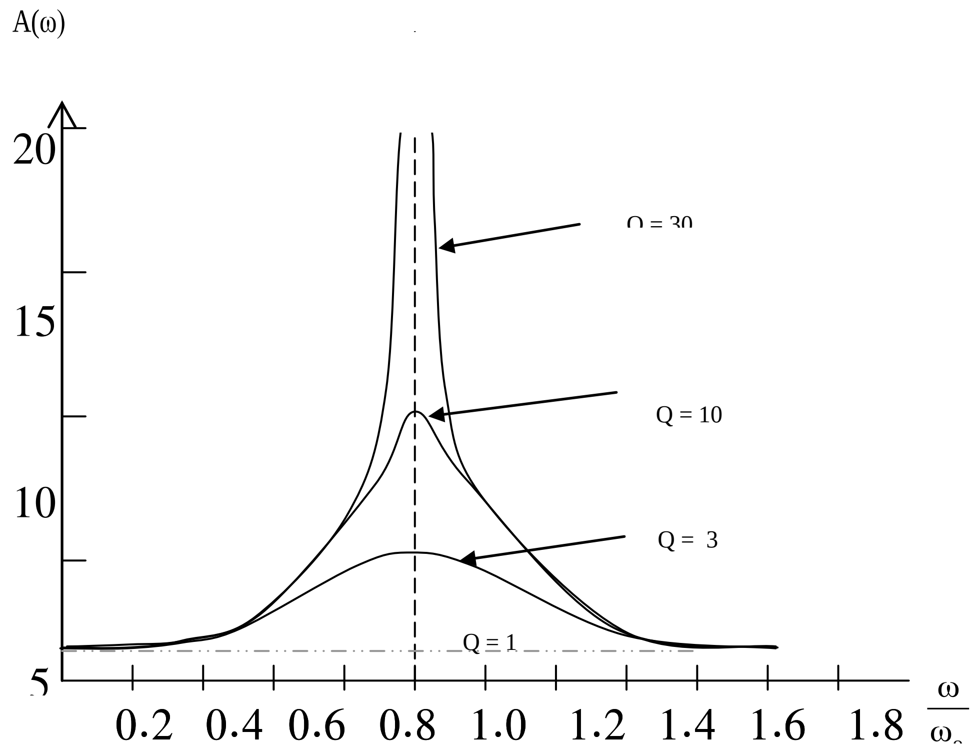
وهكذا وبأخذ $A(0)$ في الاعتبار يمكن كتابة المعادلة (16−6) كالآتي :

$$\frac{A(\omega)}{A(0)} = \frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{1}{Q^2}}} \qquad \text{........................(17−6)}$$

ولا داعي للارتباك، عزيزي الدارس، لوجود أربعة صيغ لمعادلة واحدة هي:

(12−6) و(15−6) و (16−6) a و b و (17−6) والغرض كان هو استيعاب الثابت Q واستعمال النسبة $\frac{\omega}{\omega_o}$ للتبسيط.

الشكل (4−6) يوضح تغير قيمة $\frac{A(\omega)}{A(0)}$ مع تغير $\frac{\omega}{\omega_o}$ لقيم مختلفة لمعامل الجودة Q حسب المعادلة (17−6).



الشكل (6−4) : تغير $\frac{A(\omega)}{A(0)}$ مع $\frac{\omega}{\omega_o}$ مع قيم مختلفه لـ Q بافتراض أن اتساع القوة الخارجية F_o ثابت

عزيزي الدارس،

الشكل (6−4) يوضح الارتباط القوي بين قيمة Q والاتساع $A(\omega)$ في منطقة الرنين $(\omega \approx \omega_o)$، حيث يزيد الاتساع بصورة ملحوظة كلما كانت Q كبيرة أي γ (ثابت الاضمحلال) صغير. ويلاحظ أيضاً :

• تطابق قيم A لكل قيم $Q \geq 3$ عند قيم $0.2 < \frac{\omega}{\omega_o} < 1.2$
• أن قيمة $\frac{\omega}{\omega_o}$ تقترب من 1 كلما زادت قيمة Q وذلك حسب المعادلة (6−17)
• أن قيمة $\frac{A(\omega)}{A(0)}$ تساوى تقريباً 1 في حالة Q = 1

تدريب (2)

باستخدام المعادلة ($$A = \frac{\frac{F_o^2}{m^2}}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \qquad (12-6)$$

وضح سلوك $A = A(\omega)$ مع تغير ω.

أسئلة تقويم ذاتي

أكمل الجمل التالية:

١. الاتساع يصل إلى أقصى قيمة له إذا كان تردد القوة الخارجية المؤثرة .... للحركة التوافقية البسيطة للمنظومة ω_o.

٢. التردد الزاوي الذي يحدث عنده الرنين أقل من التردد الطبيعي ω_o ويتوقف الفرق بين الترددين على قيمة ....

٣. متي يكون الاضمحلال معدوما وما نوع الحركة في هذه الحالة

٤. متي يكون الاضمحلال خفيفاً ؟ وما العلاقة بين الترددين في هذه الحالة.

4.1.6 زاوية الطور في الحركة التوافقية القسرية

عزيزي الدارس،،

الآن وبعد كل هذا النقاش يجب أن لا ننسى أن الحل للمعادلة الأصلية للحركة الاهتزازية القسرية (6–8) كنا قد افترضنا أنه هو

$$z = Ae^{i(\omega t-\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6\text{–}9)$$

علماً بأن z المركبة هي $z=x+iy$

حيث A في (6–9) هي $A(\omega)$ سواءً في المعادلة (6–12) أو (6–15). فمن (6–9) نجد أن:

$$Z = A(\omega)\ [\cos(\omega t-\varphi) + i\ \sin(\omega t-\varphi)]$$

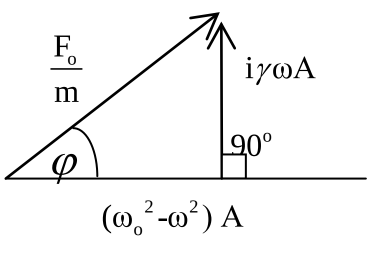
والحل هو الجزء الحقيقي للحل z أي :

$$\boxed{x = A(\omega)\ \cos(\omega t-\varphi)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6\text{–}18)$$

بمقارنة الإزاحة المركبة z من (6–9) مع القوة:

$$F=F_o\ e^{i\omega t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6\text{–}7)$$

نجد أن هناك فرقاً في الطور مقداره $-\varphi$. أي أن الإزاحة x في (6–18) متأخرة عن القوة F بهذه الزاوية. في نقاشنا للمعادلة (6–8)، وهى معادلة الحركة التوافقية القسرية مع وجود المقاومة، كنا قد أوضحنا بيانياً المتجهات الدوارة لهذه المعادلة في الشكل(6–2) (أ) والذي نكرره هنا مرة أخرى للتيسير. طبعاً الكمية الخيالية $i\gamma\omega A$ تصنع زاوية 90^o أي $\frac{\pi}{2}$ مع الكمية الحقيقية (لأن i تعني الدوران $\frac{\pi}{2}$) بينما يصنع اتساع القوة $(\omega_o^2-\omega^2)A$ زاوية φ مع الأخيرة .



واضح جداً من هذا الشكل أن قيمة الزاوية φ ليست ثابتة وإنما تتغير مع قيمة ω وقيمة γ. بل الواضح من الشكل أن الزاويه φ ستختفي إذا كان التردد الزاوي ω يساوى صفراً، أي أن الضلع المقابل للزاوية = صفر .

ومن نفس الشكل نجد أن ظل الزاويه φ (المقابل ÷ المجاور) هو :

$$\boxed{\tan \varphi = \frac{\gamma\,\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}} \qquad \text{.................................(19-6)}$$

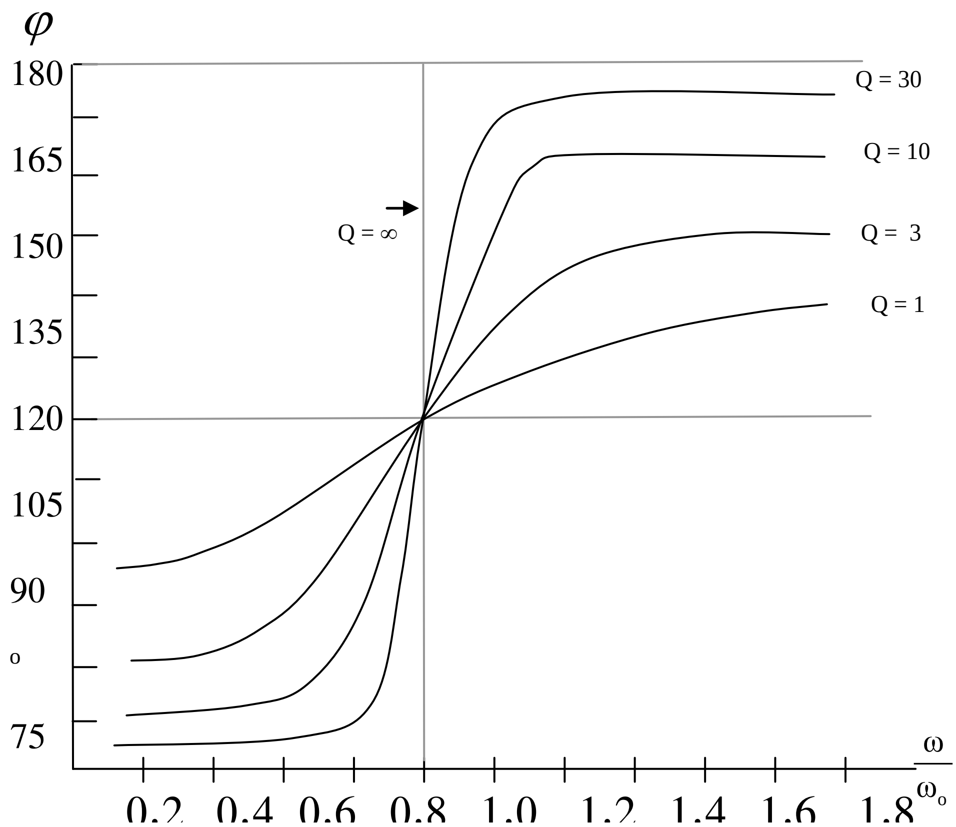
لاحظ ان i لم تُضَمّنْ في المعادلة لأن i تعني الدوران بمقدار $\frac{\pi}{2}$ وهذا تلقائياً حَوّلَ الكميه $\gamma\,\omega A$ لتصبح المقابل للزاوية. أي أن $\varphi = (\omega)\ \varphi$ وفرق الطور بين القوة الخارجية و الإزاحة يتوقف على قيمة ω وأن فرق الطور بين القوة الخارجية والازاحة يساوي الصفر إذا كانت هذه القوة غير مترددة أي $\omega =$ صفر. نفس المعادلة (19-6) يمكن الحصول عليها مباشرة من قسمة المعادلة (6-11 b) على المعادلة (6-11a) .

والخلاصة أن قيمة زاوية الطور φ بين القوة الخارجية المترددة والإزاحة ليست عشوائية وإنما تحددها قيمة تردد القوة ω بالإضافة إلى عامل المقاومة γ وبما إن $\gamma = \frac{\omega_o}{Q}$ ، حيث Q – معامل الجودة فإن المعادلة (19-6) يمكن إعادة كتابتها كالآتى:

$$\boxed{\tan \varphi(\omega) = \frac{\frac{\omega_o\,\omega}{Q}}{\omega_o^2 - \omega^2}} \qquad \text{.......................................(20-6)}$$

مع ملاحظة أنه يمكن اعتبار Q (أي γ) كمية ثابتة لمنظومة معينة مهتزة كما ذكرنا سابقاً.

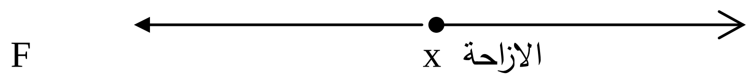
الشكل (5-6) يوضح منحنيات φ لقيم مختلفة لـ Q مع تغير التردد ω بين $0 \le \frac{\omega}{\omega_o} \le 2$.



شكل (6–5) : تغير زاويه الطور φ بين القوة المترددة وبين الازاحة في الحركة التوافقية القسرية

ويلاحظ في الشكل (6–5) الآتي :

اولاً: أن أقصى فرق طور بين القوة والازاحة هو $180^{o}(\pi)$ أي أن إتجاه القوة في عكس إتجاه الازاحة وهذا يحدث عندما تكون ω كبيرة جداً مقارنة مع ω_o أي $\frac{\omega}{\omega_o}>>1$ ؛

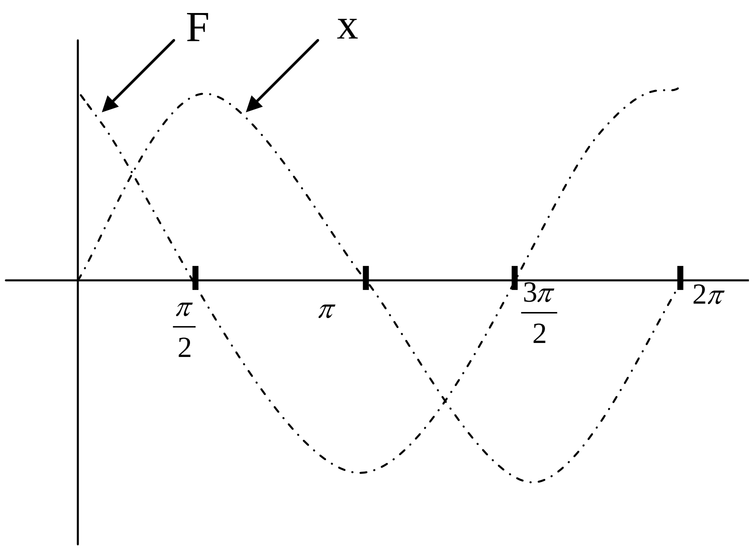


ثانياً: في حالة $Q \leftarrow \infty$ فإن $\varphi = \pi$ وذلك في حالة $\omega > \omega_o$ وتتغير مباشرة إلى الصفر في حالة $\omega \leq \omega_o$ ؛

ثالثاً: في حالة $\omega = \omega_o$ فإن $\varphi = \frac{\pi}{2}$ لكل قيم $Q < \infty$.

وعند مقارنة هذه المعلومات مع الشكل (6−4) للاتساع والذي هو أقصى إزاحة (لاحظ الشكل (6−5)) نجد أن ظاهرة الرنين تحدث عندما يكون فرق الطور φ حوالي $\frac{\pi}{2}$. فإذا زادت أو قلت ω عن ω_o فإن φ تزيد أو تقل عن $\frac{\pi}{2}$ على الترتيب وبالتالي يقل الاتساع بصورة كبيرة جداً. والخلاصة أن الرنين يحدث تقريباً عندما يكون فرق الطور بين القوة الخارجية المترددة والازاحة حوالي $\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنه:

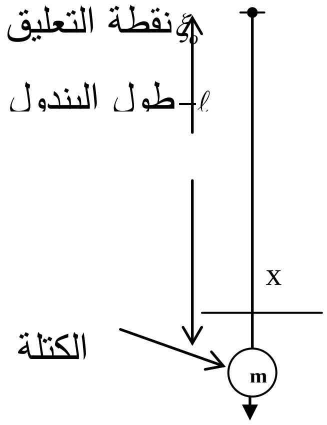
- عندما تكون القوة في قِمَتِها تكونُ الازاحة حوالي الصفر أي في منطقة الاتزان بالنسبة للحركة التوافقية البسيطة
- وعندما تصل الازاحة إلى أقصاها (إي تساوي الاتساع) فإن القوة تصبح عند أدنى قيمة لها. وهنا تعمل قوة الإعادة ($F = - k x$) لإعادة الحركة إلى موضع الاتزان مرة أخرى. في هذا الأثناء تزيد قيمة القوة الخارجية المترددة . والخلاصة هي أن تأثير القوة الخارجية المترددة يتأخر بمقدار φ .



الشكل(6-6): القوة المترددة F و الإزاحة x عند الرنين حيث يصبح فرق الطور حوالي $\frac{\pi}{2}$

مثال

بندول بسيط طوله L =1 m في حالة اهتزازة حرة (حركة توافقية) يتناقص اتساعه بمقدار e بعد 50 اهتزازة كاملة. فإذا أُخْضِعَ هذا البندول لاهتزازة قسرية وذلك بتحريك النقطة المعلق فيها البندول في حركة توافقية بسيطة أفقيه اتساعها $1mm$.



اولاً: برهن أنه إذا كانت الازاحة الأفقيه للكتلة المعلقة في البندول هي x وكانت الازاحة الأفقية للنقطة المعلق بها البندول هي ξ (تنطق اكساي Xi) فإن معادلة حركة البندول عند الكتلة المعلقة بشرط أن تكون الاهتزازات صغيرة (راجع الوحدة الرابعة) هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_o^2\ x=\omega^2\xi$$

حيث $\sqrt{\frac{g}{\ell}}=\omega_o$، ثم حل هذه المعادلة إذا كانت الازاحة $\xi=\xi_o\cos(\omega t)$.

ثانياً: إذا وصلت اهتزازة البندول تحت تأثير الحركة التوافقية البسيطة الخارجية على نقطة التعليق إلى حالة الرنين فما هو اتساع حركة الكتلة المعلقة في ضبط البندول.

الحل

نحن نعرف أن معادلة الحركة التوافقية البسيطة للبندول البسيط (الوحده الرابعه)هي

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\ \omega_o^2\ x=0$$

حيث $\sqrt{\frac{g}{\ell}}=\omega_o$ وباضافة قوة المقاومة تصبح معادلة الحركة التوافقية المضمحلة هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_o^{\ 2} = 0$$

وعند تحريك نقطة تعليق البندول في حركة توافقية بسيطة (بواسطه قوة خارجية) فإن إزاحة هذه الحركة هي

$$\xi = \xi_o \cos(\omega t)$$

حيث ω هو تردد هذه الحركة . إذاً القوة المسببة لهذه الحركة مع ملاحظة أنها حركة توافقية بسيطة هي $m\frac{d^2\xi}{dt^2} = - m\,\omega^2\ \xi$

ولكن علامة السالب كانت تعني قوة الاعادة في معادلة الحركة التوافقية البسيطة وهنا قوة خارجية موجبة وكنا قد افترضنا عند مناقشتنا للقوة الخارجية

$$F = F_o \cos(\omega t)$$

عند المقارنة نجد أن

$$\frac{F_o}{m} \cos(\omega t) = \omega^2 \xi_o \cos(\omega t)$$

أي أن $\frac{F_o}{m} = \omega^2 \xi_o$. وعليه نكون قد حصلنا على المعادلة

أما الحل فهو $x = A(\omega) \cos(\omega t - \varphi)$

لكن المعلومات التي عندنا هي $\ell = 1m$ و $\xi_o = 1mm$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{9.8}{1}} = 3.13 \text{ rad/sec} \approx \pi$$

عدد 50 اهتزازة تعني أن $\omega_o t = 50 \times 2\pi$ لأن الاهتزازة الكاملة تساوي 2π

إذن الزمن الذي استغرقته 50 اهتزازة هو $t = \frac{100\pi}{\omega_o}$ ويساوي تقريباً 100 ثانيه (بالضبط 100.37).

لكن الاتساع $A = A_o e^{\frac{-\gamma t}{2}}$

وعليه فإن $\frac{A}{A_o}=e^{-1}$ عندما تكون $1=\frac{\gamma}{2}t$

ومنها نجد أن $\gamma=\frac{2}{t}=\frac{2}{100}=0.02 \quad s^{-1}$

ب) المعادلة (5−58) تعطي التردد الذي يحدث عنده الرنين أي أن

$$\omega^2=\omega_o{}^2-\frac{\gamma^2}{2}=9.8-0.0001\cong 9.8\cong\omega_o{}^2$$

$$\omega=3.13 \text{ rad/sec}$$

الاتساع في المعادلة (5−37) هو

$$A=\frac{\frac{F_o{}^2}{m^2}}{\sqrt{(\omega_o{}^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}$$

$$A(\omega)=\frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega_o{}^2-\omega^2)+\gamma^2\omega^2}}=\frac{\omega_o{}^2\xi}{\sqrt{(0.0001)+0.00392}}$$

$$=\frac{9.8\times 0.01}{\sqrt{0.00402}}=\frac{0.098}{0.063403}\approx 1.5457$$

وذلك عند $\omega\cong\omega_o$ في حالة الرنين

أما فرق الطور عند الرنين فهو

$$\tan\varphi=\frac{\gamma\omega}{\omega_o{}^2-\omega^2}=626$$

أي أن $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

تدريب (3)

بندول بسيط طوله (L= 2m) في حالة اهتزازة حرة(حركة توافقية)يتناقص اتساعه بمقدار e بعد 100 اهتزازة كاملة. فإذا أُخْضِعَ هذا البندول لاهتزازة قسرية وذلك بتحريك النقطة المعلق فيها البندول في حركة توافقية بسيطة أفقيه اتساعها 2mm.

اولا: برهن أنه إذا كانت الازاحة الأفقيه للكتلة المعلقة في البندول هي x وكانت الازاحة الأفقية للنقطة المعلق بها البندول هي ξ (تنطق اكساي Xi) فإن معادلة حركة البندول عند الكتلةالمعلقه بشرط أن تكون الاهتزازات صغيرة − (راجع الوحدة الرابعة) − هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_o{}^2\ x=\omega^2\xi$$

2.6. نموذج للاهتزازة الكهربيه المغنطسيه القسرية :

1.2.6. الرنين فى دائرة LCR

عزيزي الدارس ،

قد ناقشنا في الوحدة الخامسة دائرة LCR (ملف و مكثف و مقاومة) كنموذج لحركة اهتزازية مضمحلة [الشكل (5-5)]، وحصلنا على معادلة هذه الحركة وهى المعادلة (5-34) :

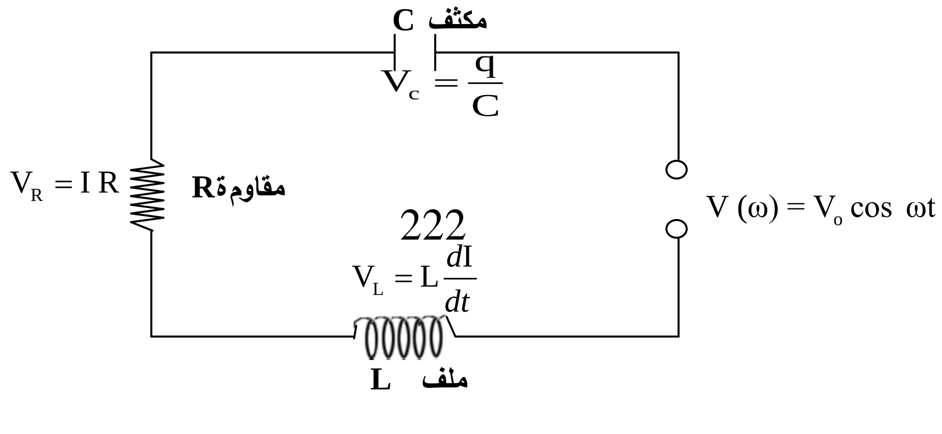
$$\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma \frac{dq}{dt} + \omega_o^2 \, q = 0$$

حيث: q = الشحنة على المكثف و $\frac{1}{LC} = \omega_o^2$ و $\frac{R}{L} = \gamma$ حيث R المقاومة في الدائرة و L محاثة الملف.

في الدائرة الموضحة في الشكل (5-5)، يتبادل المجالا ن الكهربي في المكثف والمغنطيسي في الملف الطاقة بينهما ، بينما يحدث الاضمحلال للاهتزازة بسبب وجود المقاومة R فى الدائرة . وهذه المقاومة تستهلك الطاقة في صورة حرارة ولذلك تموت الاهتزازة بعد فترة من الزمن وبتوقف سرعة موتها على مقدار المقاومة R.

الآن سنحول هذه الاهتزازة المضمحلة إلى اهتزازة قسرية وذلك بإضافة مصدر طاقة كهربية متردد الجهد $V(\omega)$ موصل في الدائرة على التوالي كما في الشكل(6-6).
المعادلة (5-34) كنا قد حصلنا عليها بجمع فروق الجهد في الد ائرة ومساواتها بالصفر حسب قاعدة كرتشوف. فإذا أعدنا كتابة هذه المعادلة مرة أخرى مع إضافة جهد المصدر باعتباره يمثل القوة الخارجية المترددة، ذلك لأن فروق الجهد في الدوائر الكهربية تحل محل القوى في الأنظمة الميكانيكية المهتزة. وعليه فإن :

$$V_L + V_R + V_C = V(\omega)$$



الشكل (6-6): دائرة LCR القسرية

وعليه:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = V_o \cos \omega t$$

حيث I هو التيار. وبما أن التيار هو معدل تغير الشحنة في الزمن أي أن :

$$\frac{dq}{dt} = I$$

حيث q هي الشحنة. فإن المعادلة السابقة تصبح :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_o \cos \omega t$$

وبالقسمه على L :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{V_o}{L} \cos \omega t$$

حيث نلاحظ أن L (محاثة الملف) تحل محل الكتلة m في الأنظمة الميكانيكية مما يدل على أن المحاثة L لها نفس خاصية القصور الذاتي التي للكتلة . وعليه نحصل نهائياً على معادلة الاهتزازة القسرية :

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma\frac{dq}{dt} + \omega_o^2 q = \frac{V_o}{L} \cos \omega t} \quad \text{..................}(21-6)$$

في هذه المعادلة:

- $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ هو التردد الطبيعي لدائرة LC (الحركة التوافقية البسيطة)
- γ – ثابت الاضمحلال = $\frac{R}{L}$ أي المقاومة مقسومة على محاثة الملف
- $\frac{V_o}{L}$ تقوم مقام التسارع حيث $a = \frac{F_o}{m}$

عزيزي الدارس،

لاحظ أن الجانب الأيسر للمعادلة (6–21) لازال هو معادلة الحركة المضمحلة . وهذه المعادلة هي نفس معادلة الحركة المضمحله القسرية (6–10). ولذلك نتوقع حلاً شبيهاً بالحل (6–18)، حيث تحل الشحنة q مكان الإزاحة x. أي أن الحل هو :–

$$\boxed{q = q_o(\omega)\ \cos(\omega t-\varphi)} \quad ....(22-6)$$

حيث $q_o(\omega)$ هو أقصى قيمة للشحنة، ولكن قيمتها تتغير مع تغير تردد فرق الجهد ω، وهي تعادل الاتساع A. وعليه وبالمقارنة مع المعادلة (6–12) نجد أن :

$$\boxed{q_o(\omega) = \frac{V_o/L}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}} \quad ....(23-6)$$

حيث :

- $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
- ω تردد فرق جهد المصدر
- الكمية $Z = \sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$ وتسمى **المعاوقة** (Reactance) وهي في مقام المقاومة في حالة التيارات ذات التردد.
- $\gamma = \frac{R}{L}$: ثابت الاضمحلال

وعليه وبالمقارنة مع المعادلة (6–13) يمكن مباشرة الحصول على للتردد الذي يحدث عنده رنين الشحنة . فأقصى شحنة يمكن الحصول عليها (الرنين) عندما تكون :

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{2}$$

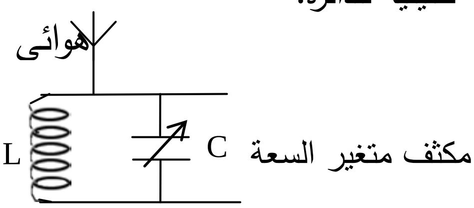
أي أن الرنين يحدث عندما:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2\,L^2}} \quad ....(24-6)$$

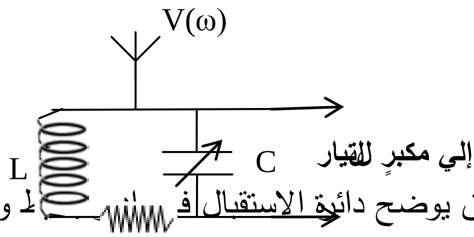
فكلما قلت المقاومة R في الدائرة كلما قربت قيمة ω من قيمة ω_o عند حدوث الرنين.

عزيزي الدارس،، في الوحدة الثالثة ناقشنا دائرة بها ملف ومكثف أي دائرة LC وقلنا أنه مادام التردد الطبيعي للدائرة هو $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ فإنه بتغير السعة C (باستخدام مكثف متغير السعة) يمكن تغيير قيمة ω_o وبالتالي يمكن استقبال الاشارات اللاسلكية في الراديو مثلاً، وذلك بتوصيل الدائرة بهوائي (اريال) . فإذا توافق تردد الاشارة في الهوائي مع تردد الدائرة ω_o يمكن الحصول فقط على تلك المحطة التي ترددها ω_o وعزل بقية المحطات الإذاعية التي تصل إلى الهوائي.

ولكن دائرة LC فقط غير واقعية لأنه، كما نعلم، توجد مقاومة في الأسلاك حتى ولو لم نضف مقاومة حقيقية للدائرة.



وبالتالي فالإهتزازة في دائرة فيها L و C فقط لابد أن تضمحل. أما الهوائي فيمكن اعتباره مصدر جهد خارجي. وبالتالي تصبح الدائرة كما في الشكل التالي.



الشكل السابق يوضح دائرة الاستقبال في ... وهي دائرة اهتزازية قسرية ، يتغير ترددها الطبيعي ω_o بتغير السعة C. والتردد الخارجي للدائرة هو ترددات المحطات الإذاعية المؤثرة على الهوائي. وبالتالي يمكن الحصول على الرنين لأي من الترددات المستقبلة بواسطة الهوائي ω وذلك بتغير ω_o للدائرة بحيث تصبح مساوية للتردد الزاوي ω للمحطة المرغوبة.

عزيزي الدارس،

لاحظ أيضاً أنه يمكن تغيير التردد الطبيعي ω_o بتغيير L محاثة الملف وذلك بتغيير عدد لفات الملف بدلاً عن تغيير C.

أسئلة تقويم ذاتي

1. المقاومة في دائرة الرنين LRC تستهلك الطاقة في صورة.................ولذلك تموت الاهتزازة .... و يتوقف ذلك على مقدار المقاومة R

2. يمكن ...... الإشارات اللاسلكية في الراديو بتوصيل دائرة .... و إذا توافق تردد الإشارة في الهوائي مع تردد الدائرة ω_o يمكن الحصول فقط على .... وعزل بقية المحطات الإذاعية التي تصل إلى الهوائي .

3. وضح خطوات الحصول على معادلة الاهتزازة القسرية في دائرة LRC

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma \frac{dq}{dt} + \omega_o^2 \, q = \frac{V_o}{L} \cos \omega t$$

ثم قارن بينها وبين معادلة الإهتزازة القسرية الميكانيكية من حيث كل من التردد الطبيعي ، ثابت الاضمحلال، التسارع.

تدريب (4)

دائرة LCR موصلة مع مصدر تردد خارجي. فإذا كانت محاثة الملف هي 10^{-3} H وسعة المكثف 10^{-9} F والمقاومة 10^{+3} Ω واتساع فرق الجهد المتردد الخارجي 10^{-9} V . أوجد:

أ) تردد الدائرة الطبيعي ب) معامل الاضمحلال

ج) التردد الذي يحدث عنده الرنين د) اتساع الشحنة على المكثف

2.2.6. رنين السرعة Velocity Resonance

عزيزي الدارس، نحن نعرف أن السرعة هي: $\frac{dx}{dt} = v$

بتفاضل الإزاحة بالزمن للمعادلة (6−18) نجد أن السرعة :

$$\boxed{\begin{aligned} v &= -\omega A(\omega)\sin(\omega t - \varphi) \\ v &= -v_o \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25-6)$$

حيث $v_o = \omega A(\omega)$ هو اتساع السرعة.

وبتعويض قيمة $A(\omega)$ من المعادلة(6−17) نجد أن اتساع السرعة:

$$\boxed{v_o = \frac{A(0)\,\omega_o}{\sqrt{\left(\frac{\omega_o}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26-6)$$

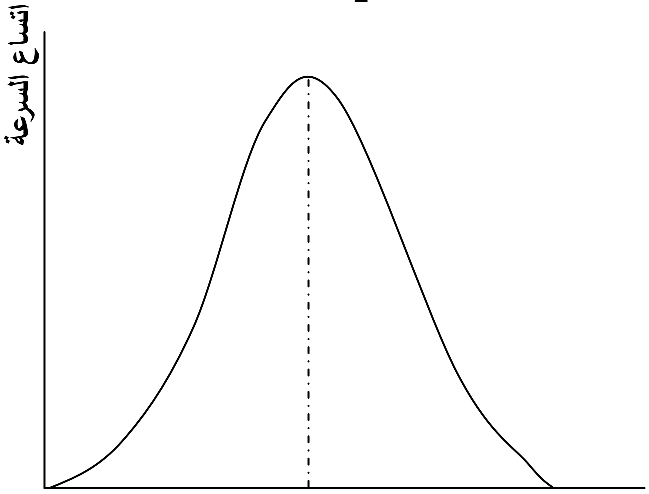
ولأنه عندمايحدث الرنين يكون اتساع السرعة عند أقصى قيمة له، أي يكون المقام أقل ما يمكن، فإن رنين السرعة يحدث عندما يكون تردد القوة الخارجية ω يساوي بالضبط التردد الطبيعي للمنظومة المهتزة الحرة ω_o . أي $\omega_o = \omega$ في (6−26). ومن هذه المعادلة نجد أن اتساع السرعة الأقصى هو:

$$v_{om} = A(0)\omega_o Q = \frac{F_o}{m\omega_o^{\,2}} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27-6)$$

حيث v_{om} تعني أقصى (maximum) اتساع للسرعة v.

وهذا لا يحدث للإزاحة x في (6−18) لأن الاتساع A في (6=17) مقسوم على ω ولذلك يحدث رنين الإزاحة عندما تكون قيمة ω هي المعطاة بالمعادلة (6=13). الشكل (6=7) يوضح منحنى اتساع السرعة وفق المعادلة (6−26) حيث يصل هذا الاتساع إلى أقصى قيمة عندما $\omega_o = \omega$. واضح من مقارنة (6−25) للسرعة مع المعادلة (6−18)

للإزاحة أن السرعة عمودية على الإزاحة للحركة الاهتزازية القسرية ، أي أن الطور بينهما 90^o. ذلك لأن السرعة جيبية بينما الإزاحة جيب تمام . وهو نفس الوضع في الحركة التوافقية البسيطة حيث السرعة متقدمة عن الإزاحة بمقدار $\frac{\pi}{2}$.



شكل (6–7) : رنين السرعة يحدث بالضبط عند $\omega_o = \omega$

وبما أن القوة هي: $F = F_o \cos \omega t$

والسرعة هي:

$$\boxed{v = -v_o \sin(\omega t - \varphi)}$$

ففي حالة (الرنين) نجد أن: $\omega_o = \omega$ والزاوية $\varphi = \frac{\pi}{2}$

وبما إن

$$-\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t$$

فإن السرعة والقوة يكونان في نفس الاتجاه أ ي في نفس الطور ، وبالتالي فإن السرعة متقدمة عن الإزاحة بمقدار $\frac{\pi}{2}$ عند حالة الرنين. ولكن في غير حالة الرنين (أي $\omega_o \neq \omega$) فهناك فرق طور بين القوة والسرعة بينما يظل فرق الطور بين الإزاحة والسرعة ثابتاً (cos و sin) لنفس الكمية $(\omega t - \varphi)$.

3.2.6.القدرة في الحركة التوافقية القسرية

Power in forced Harmonic Oscillations

عزيزي الدارس،

عرفنا سابقا أن القدرة هي:

معدل تغيير الطاقة في الزمن أي أن : $\mathrm{P}=\dfrac{d\mathrm{E}}{dt}$

وبما أن وحدة الطاقة هي الجول J (Joule) ، فإن وحدة القدرة هي J/s وهي الواط watt. وأيضا عرفنا أن الطاقة هو مقدار الشغل المبذول، أي $\mathrm{E = F.\ x}$،

وبالتالي فإن: $d\ \mathrm{E} = \mathrm{F}\ dx$

وعليه تصبح القدرة $\mathrm{P}=\dfrac{d\mathrm{E}}{dt}=\mathrm{F}\dfrac{dx}{dt}$

ولكن $\dfrac{dx}{dt}$ = السرعة v. أي أن القدرة :

$$\mathrm{P} = \mathrm{F}\, v \qquad (28\text{−}6)$$

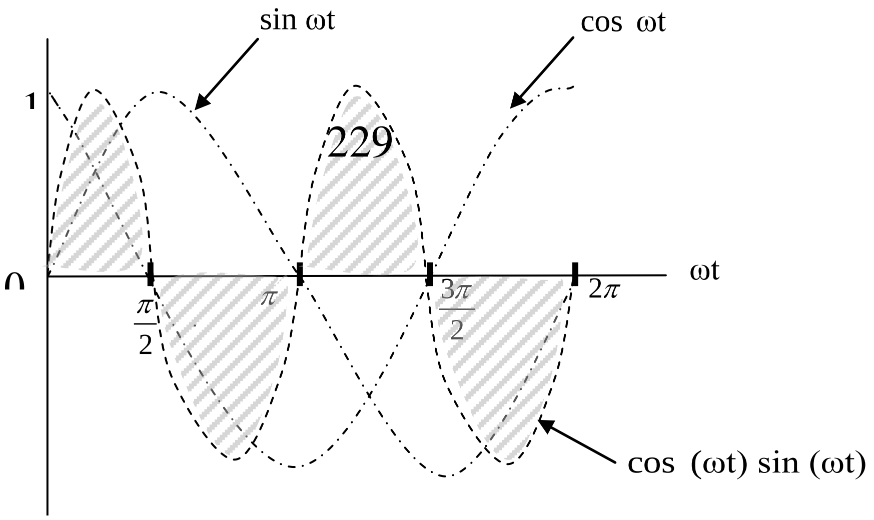
وبتعويض $\mathrm{F=F_0\cos\omega t}$ و v من (25−6) نجد أن القدرة:

$$\mathrm{P} = \mathrm{F}v = -v_{\mathrm{o}}\, \mathrm{F_o}\, \cos\omega t \sin(\omega t-\varphi) =$$

$$= -v_{\mathrm{o}}\, \mathrm{F_o}\, \cos\omega t(\sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi)$$

$$= -(v_{\mathrm{o}}\, \mathrm{F_o}\cos\varphi)\ \sin\omega t\cos\omega t + (v_{\mathrm{o}}\, \mathrm{F_o}\sin\varphi)\cos^2\omega t \qquad (29\text{−}6)$$

هذه النتيجة تحتاج إلى حساب في كل لحظة لتحديد القدرة في تلك اللحظة ولكن عند التأمل سنكتشف مثلاً أن الكمية $\sin\omega t\cos\omega t$ خلال اهتزازة كاملة في مجملها تساوي الصفر . ولذلك للحصول على نتيجة ذات قيمة ومعنى نأخذ متوسط القدرة خلال إزاحة كاملة أو عدة اهتزازات كاملة، وتسمى **القدرة المتوسطة** ويرمز لها بالرمز $\overline{\mathrm{P}}$.

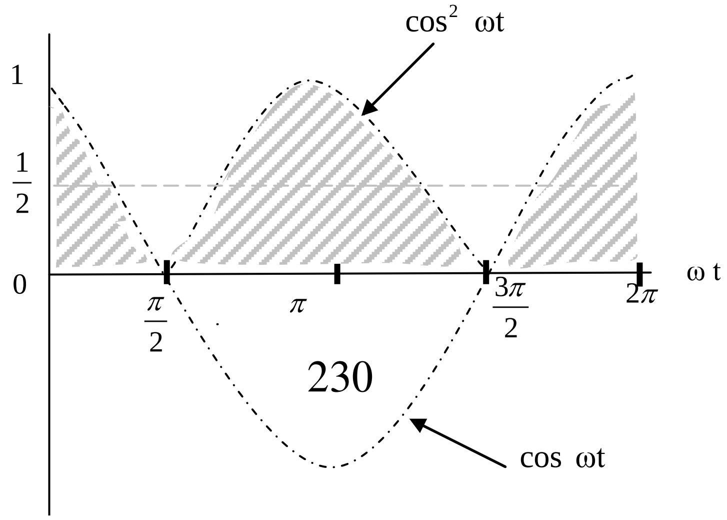


متوسط $\sin\omega t\times\cos\omega t$ خلال اهتزازة كاملة (بين صفر و 2π) = صفر

وبما أن متوسط $\sin \omega t.\cos \omega t$ خلال اهتزازة كاملة (بدأت من الصفر وانتهت في 2π) يساوي الصفر. لأن متوسط $\sin \omega t$ وكذلك $\cos \omega t$ كل على حده خلال اهتزازة كاملة تساوي الصفر ومتوسط حاصل ضربهما يساوي الصفر (انظر الأشكال أعلاه). بناءً على ذلك يصبح الحد الأول في المعادلة (6–29) يساوي الصفر. أما الحد الثاني فيحتوي على $\cos^2 \omega t$. ولأن

$$\because \quad \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t)$$

فإن متوسط $\cos 2\omega t$ مثله مثل $\cos \omega t$ خلال اهتزازة كاملة يساوي الصفر . وعليه



متوسط $\cos^2 \omega t$ خلال اهتزازة كاملة = ½

يكون المتوسط خلال اهتزازة كاملة أو أي عدد من الاهتزازات الكاملة لـ $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}$.

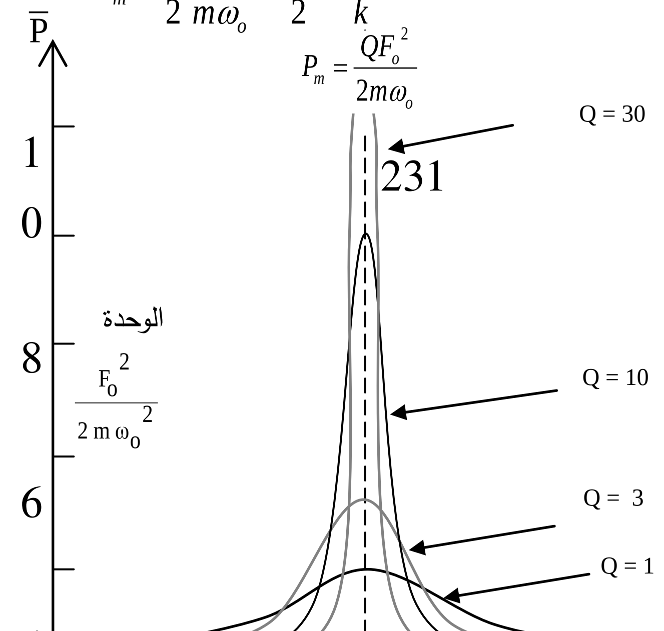
الأشكال السابقة توضح بالرسم مفهوم المتوسطات المقصودة . وبناءً على ما سبق يكون متوسط القدرة خلال اهتزازة كاملة أو أي عدد من الاهتزازات الكاملة من (6−29) هو:

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} v_o \ F_o \ \sin\varphi} \quad \text{.......................} \ (30-6)$$

وبما أن $\omega A(\omega) = v_o$ و $A(\omega)$ دالة تتوقف قيمتها على ω ، فإن قيمة متوسط القدرة تتوقف على قيمة تردد القوة الخارجية ω . ولأن v_o تصل أقصى قيمة لها عند الرنين أي عندما $\omega = \omega_o$ ، وكذلك لأن φ زاوية الطور تكون قيمتها $\frac{\pi}{2}$ عند الرنين ، وبالتالي تصل $\sin\varphi$ أقصى قيمة لها عند الرنين ، فإن متوسط القدرة يصل أقصى قيمة له عندما $\omega = \omega_o$ أي عند الرنين . وعليه فإن أقصى قدرة هي التي تكون عند الرنين أي عندما $\omega = \omega_o$ لأنها تحدث عند أقصى قيمة للسرعة v_m . وعليه فمن المعادلات (6−27) لـ v_m و (6−30) لـ $\bar{P}$ نحصل على أقصى قيمة للقدره $\text{P- maximum} = P_m$ للزنبرك، أي أن:

$$P_m = \frac{1}{2} v_m \ F_o \ \sin\frac{\pi}{2}$$

$$P_m = \frac{1}{2}\frac{QF_o^{\ 2}}{m\omega_o} = \frac{1}{2}\frac{\omega_o Q F_o^{\ 2}}{k} \quad \text{.................................} (31-6)\text{:أي}$$



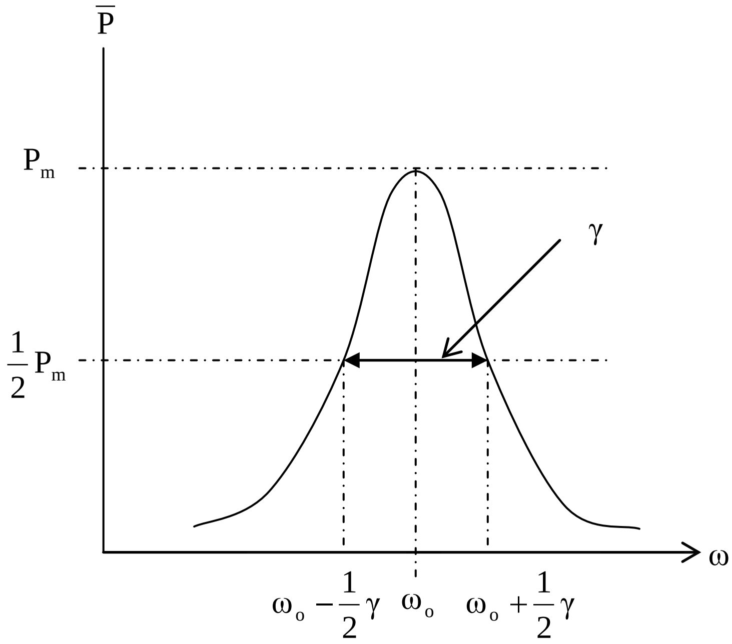
المنحنيات في الشكل (6−8) تسمى منحنيات رنين القدرة Power resonance curves
يلاحظ أن المنحنيات الموضحه في الشكل (6−8) للقدرة متماثلة الجانبين.

4.2.6.مفهوم عرض منحنى رنين القدرة عند منتصف أقصى ارتفاع

عزيزي الدارس ،

هناك مفهوم هام جداً مرتبط بمنحنيات القدرة ويتعلق بعرض منحنى رنين القدرة. ذلك لأن منحنى القدرة يصعد مع تغير ω حسب المعادلة (6−26) لاتساع السرعة التي تتحكم في سلوك هذا المنحنى (المعادلة (6−30)) كما هو واضح على الشكل (6−8). ولذلك نجد أن عرض المنحنى يزيد كلما نزلنا من أقصى قيمة إلى قيم أقل.

لذلك اعتمد مفهوم عرض المنحنى عند نصف ارتفاع القدرة أي عند $\frac{1}{2}\overline{P}$ كما في الشكل (9−6).



شكل (9−6):عرض منحنى رنين القدرة عند منتصف الارتفاع

عزيزي الدارس:

من الشكل واضح أن عرض منحنى رنين القدرة عند منتصف قيمة أقصى قدرة عند الرنين يساوي γ (ثابت الاضمحلال). ويسمى هذا العرض بعرض الرنين (Resonance width).

عرض الرنين (Resonance width): هو عرض منحنى رنين القدرة عند منتصف أقصى ارتفاع لذلك المنحنى ويساوي γ (ثابت الاضمحلال).

الآن عزيزي الدارس ،، سنبرهن أن عرض الرنين هو γ ، وأن هذا العرض ينحصر بين الترددين $\omega_o \pm \frac{1}{2}\gamma$. من المعادلة (6=31) لأقصى قيمة للقدرة P_m عند الرنين ولأن Q معامل الجودة = $\frac{\omega_o}{\gamma}$ فإن P_m تصبح كالآتي:

$$\boxed{P_m = \frac{F_o{}^2}{2\gamma m}} \qquad \text{............................}(32-6)$$

وعليه تصبح نصف القيمة القصوى للقدرة عند الرنين هي

$$\boxed{\frac{1}{2}P_m = \frac{F_o{}^2}{4\gamma m}} \qquad \text{............................}(33-6)$$

الآن المطلوب هو الحصول على عرض المنحنى عند هذه القيمة . والعرض حسب الشكل (6-9) يقع على المحور السيني أي هو مدى التردد الزاوي الذي ينحصر هذا العرض بين طرفيه. ولهذا الغرض نعود لمعادلة القدرة المتوسطة $\bar{P}$ والتي منها تمكنا من رسم منحنى القدرة وهي

$$\bar{P} = \frac{1}{2}v_o\ F_o \sin\varphi \qquad (30-6)$$

ولكن من هذه المعادلة (6-11)b (انظر أيضا الشكل (6-2)أ) نجد أن:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{m\gamma\omega A}{F_o}} \qquad \text{............................}(34-6)$$

بالتعويض في (6-30)، نجد أن متوسط القدرة

$$\bar{P} = \frac{1}{2}m\gamma\omega A v_o$$

ولكن $\omega A = v_o$ ، أي أن

$$\bar{P} = \frac{1}{2}m\,\gamma\, v_o{}^2$$

وباستعمال المعادلة (6-26) نجد أن:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} m\, \gamma \frac{F_o^{\,2} \omega_o^{\,2}}{k^2} \frac{1}{\left(\frac{\omega_o}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}$$

ومنها

$$\boxed{\overline{P} = \frac{\gamma F_o^{\,2}}{2\,k} \frac{1}{\left(\frac{\omega_o}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\omega_o^{\,2}}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35\text{–}6)$$

ولكن الكمية:

$$\frac{\omega_o}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_o} = \frac{\omega_o^{\,2} - \omega^2}{\omega\ \omega_o} = \frac{(\omega_o + \omega)\,(\omega_o - \omega)}{\omega_o\ \omega}$$

وبما أن قيمة ω قريبة من قيمة ω_o في نظام ترددات الرنين فإنه يمكن اعتبار $\omega_0 \approx \omega$ تقريباً وعليه

$$\frac{(\omega_o + \omega)\,(\omega_o - \omega)}{\omega_o\ \omega} = \frac{2\omega_o (\omega_o - \omega)}{\omega_o^{\,2}} = \frac{2(\omega_o - \omega)}{\omega_o}$$

وعليه تصبح المعادلة (35–6) هي:

$$\overline{P} = \frac{\gamma F_o}{2\,k} \frac{1}{\frac{4\,(\omega_o - \omega)^2}{\omega_o^{\,2}} + \frac{\gamma^2}{\omega_o^{\,2}}}$$

أي أن

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \frac{\gamma F_o^{\,2}}{k} \frac{\omega_o^{\,2}}{4\,(\omega_o - \omega)^2 + \gamma^2}$$

ومره أخرى بالتعويض عن ω_o و $\frac{k}{m}$ وبكتابة $\Delta\omega = \omega_o - \omega$ نجد أن

$$\boxed{\overline{P} = \frac{\gamma F_o^{\,2}}{2\,k} \frac{1}{4\,\Delta\omega^2 + \gamma^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36\text{–}6)$$

المعادلة (6−36) تعطي قيم متوسط القدرة في أي نقطة بناءً على الفرق بين ω_o و ω أي $\omega_o - \omega = \Delta\omega$ والمنحنى المرسوم في الشكل (6−9) يمكن الحصول عليه من هذه المعادلة . وعند منتصف أقصى قيمة أي $\frac{1}{2}P_m$ فإن هناك قيمتان لمتوسط القدرة $\bar{P}$، واحدة للمنحنى على يمين ω_o والثانية للمنحنى على يسار ω_o . وفي الحالتين ومن المعادلتين (6−33) و(6−36) فإن $\frac{1}{2}P_m = \bar{P}$، ولذلك فإن:

$$\boxed{\frac{F_o^{\,2}}{4\gamma m} = \frac{\gamma F_o^{\,2}}{2m}\,\frac{1}{4\Delta\omega^2+\gamma^2}} \quad \text{.............................(6−37)}$$

واضح أن هذا التساوي لا يمكن أن يتم إلا إذا كان الجانب الأيمن له قيمتان (قيمة لكل منحنى على يمين وعلى يسار ω_o) وأيضاً إلا إذا كانت الكمية في مقام الجانب الأيمن هي: $4\Delta\omega^2+\gamma^2 = 2\gamma^2$. وهذا ممكن فقط إذا كانت الكميه:

$$\boxed{\Delta\omega = \pm\frac{\gamma}{2}} \quad \text{.................................. (6−38)}$$

وبها فقط يتساوى الجانبان في المعادلة (6−37).

ونعود إلى المعادلة(6−38) أي:

$$\Delta\omega = (\omega_o - \omega) = \pm\frac{\gamma}{2}$$

فإذا كانت $\omega_o < \omega$ فإن $\omega_o - \omega = +\frac{\gamma}{2}$

أي أن $$\omega = \omega_o - \frac{\gamma}{2}$$

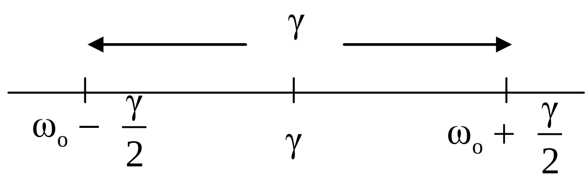
وهو التردد الزاوي الذي تكون عنده قيمة $\bar{P}$ تساوي نصف القيمة القصوى P_m على يسار ω_o .

أما إذا كانت $\omega_o > \omega$

فإن $\omega_o - \omega = -\dfrac{\gamma}{2}$

أي أن $\omega = \omega_o + \dfrac{\gamma}{2}$

وهي قيمة التردد الزاوي الذي تكون عنده قيمة $\overline{P} = \dfrac{1}{2}P_m$ ولكن على يمين ω_o . أي أن عرض منحنى رنين القدرة عند منتصف ارتفاع القدرة هو القيمة بين الترددين $\omega_o \pm \dfrac{\gamma}{2}$ ، أي يساوي ثابت الاضمحلال γ حسب الشكل التالي.



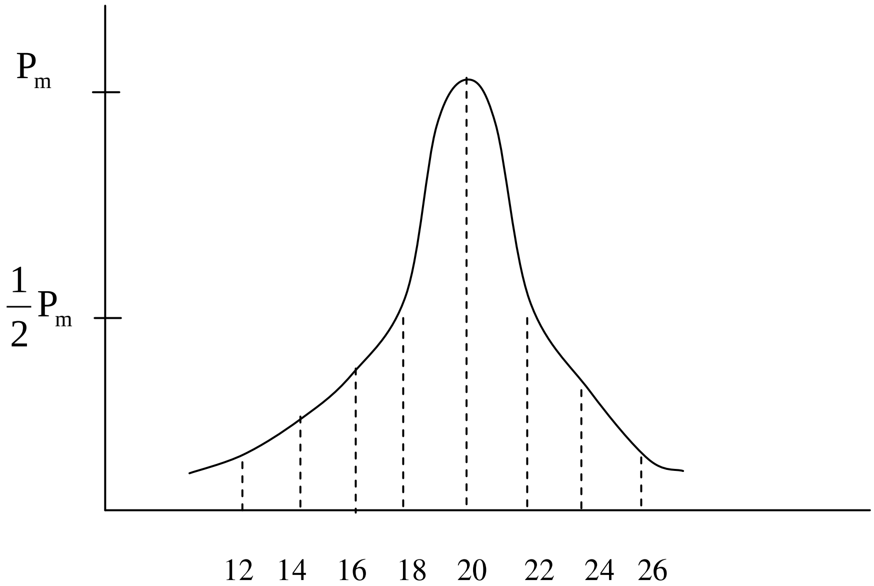
أي أن عرض منحنى القدرة ذو علاقة مباشرة مع معامل المقاومة $\gamma = \dfrac{R}{m}$ (في الدائرة الكهربية $\dfrac{R}{L}$) و يسمى أيضاً بثابت الاضمحلال. وواضح أنه كلما قلت قوة المقاومة كلما قل عرض منحنى الرنين بحيث يحدث الرنين فقط ابتداءً من الترددات القريبة جداً من ω_o ويصل قيمته القصوى عند التردد الطبيعي ω_o للمنظومة المهتزة.

مثال (1)

الشكل البيانى التالي لمنحنى رنين القدرة لمنظومة ميكانيكية مهتزة تؤثر عليها قوة خارجية ترددها ω متغير أوجد :

أولاً: التردد الطبيعي ω_o للمنظومة المهتزة

ثانياً: قيمة معامل الجودة Q



ثالثاً: التردد الذي يحدث عنده رنين الاتساع وزاوية الطور φ في هذه الحالة

رابعاً: إذا توقف تأثير القوة الخارجية فما نسبة اضمحلال الطاقة بعد اهتزازة واحدة علماً بأن $e = 2.718$.

الحل:

أولاً: واضح من الشكل أن أقصى قدرة تحدث عند التردد الطبيعي ω_o. أي أن $\omega_o = 20\ Hz$.

ثانياً: من الشكل واضح أن نصف القدرة القصوى يحدث بين الترددين 18 Hz و 22 Hz وعرضه حسب ما وجدنا هو $\gamma = 4\ Hz$

وعليه فإن معامل الجودة $Q = \frac{\omega_o}{\gamma} = \frac{20}{4} = 5$

ثالثاً: من المعادلة

$$\omega^2 = \omega_o{}^2 - \frac{\gamma^2}{2} = 400 - 8 = 392$$

$$\therefore\ \omega = 19.8\ Hz$$

ومن المعادلة

$$\tan\varphi = \frac{\gamma\,\omega}{\omega_o^{\,2} - \omega^2} = \frac{4\times 19.8}{8} = 9.9$$

$$\varphi = 84.25^o$$

رابعاً: الطاقه:- $\quad E = E_o e^{-\gamma t}$

تبدأ في الضمحلال مع مرور الزمن بعد توقف القوة الخارجية .

زمن الاهتزازة الواحدة هو الزمن الدوري T وبإعتبار أن تردد الاهتزازة المضمحلة $\omega \cong \omega_o$ فإن

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

وعليه $\quad \dfrac{E}{E_o} = e^{-\gamma t} = e^{\frac{-2\pi\,\gamma}{\omega_o}}$

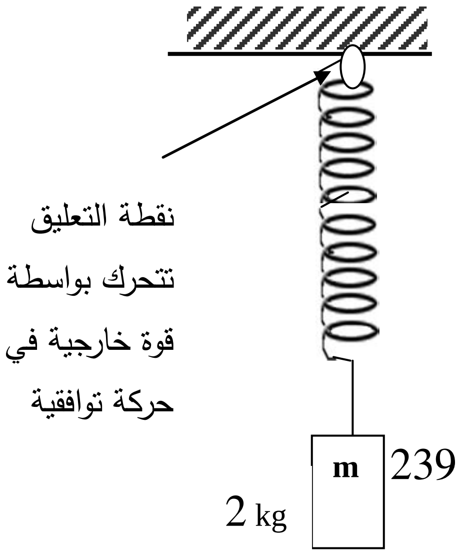
$$= e^{-\frac{2\pi}{Q}} = 2.718^{-\frac{6.282}{5}}$$

$$= 2.718^{-1.257}$$

$$=0.28$$

مثال (2)

زنبرك كتلته يمكن اهمالها وعندما علقت به كتلة مقدارها 2kg زاد طوله 2.5 cm . فإذا كانت



النقطة المعلق بها الزنبرك
نفسه تتحرك بواسطة قوة
خارجية في حركة توافقية
بسيطة SHM اتساعها
1mm إلى أعلى وأسفل
وكان معامل الجودة لهذه
المنظومة الزنبركية
المهتزة Q = 15 فأوجد:

أولاً: التردد الطبيعي ω_o ثانياً: ثابت الاضمحلال γ

ثالثاً: لاتساع عندما يكون تردد القوة الخارجية $\omega = \omega_o$ رابعاً: أقصى قدرة في حالة الرنين امساً: القدرة عندما يكون التردد ω أكبر من ω_o بمقدار 2%.

الحل:- معطى: الكتلة m = 2 kg ، الاتساع A = 0.025 cm ومعامل الجودة لهذه المنظومة الزنبركية المهتزة Q = 15

عند تعليق الكتلةعلى الزنبرك فإن : قوة إعادة الزنبرك $m\ g = k\ x$ حيث k ثابت الزنبرك، عجلة الجاذبية $g = 9.8\ m\ g^{-2}$

$$\therefore\quad 2 \times 9.8 = k \times 0.025$$

$$\therefore\quad k = \frac{2 \times 9.8}{0.025} = 784\ N/m$$

اولاً: ولكن التردد الطبيعي $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{784}{2}} = 19.8\ Hz\ \ rad$

ثانياً:ثابت الاضمحلال $\gamma = \frac{\omega_o}{Q} = \frac{19.8}{15} = 1.32\ Hz\ \ S^{-1}$

ثالثاً: اتساع حركة القوة الخارجية $0.001\ m$. إذا اتساع القوة الخارجية $F_o = k\,x$

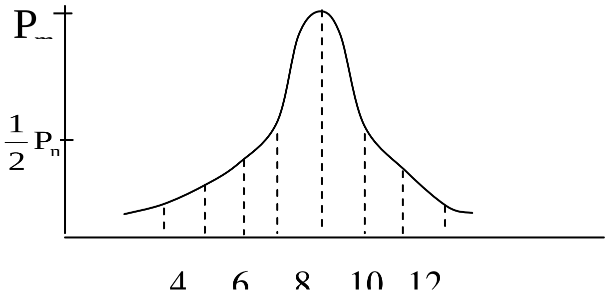
$$= 784 \times 0.001 = 0.784\ N$$

تدريب (5)

الشكل البيانى التالي عبارة عن منحنى رنين القدرة لمنظومة ميكانيكية مهتزة تؤثرعليه قوة خارجية ترددها ω متغير

أوجد : أولاً: التردد الطبيعي ω_o للمنظومة المهتزة ثانياً: قيمة معامل الجودة Q

ثالثاً: التردد الذي يحدث عنده رنين الاتساع وزاوية الطور φ في هذه الحالة



أسئلة تقويم ذاتي

؟

1. باستعمال المعادلة أدناها وضح كيف يحدث الرنين ؟

$$v_o = \frac{A(0)\,\omega_o}{\sqrt{\left(\frac{\omega_o}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}}$$

2.ناقش مفهوم عرض منحنى رنين القدرة عند منتصف أقصى ارتفاع في حالة الحركة التوافقية القسرية و عرف عرض منحنى الرنين.

3. ما علاقة عرض الرنين بثابت الاضمحلال γ ؟

4. الشكل البياني التالي لمنحنى رنين القدرة لمنظومة ميكانيكية مهتزة تؤثرعليه ا قوة خارجية ترددها ω متغير

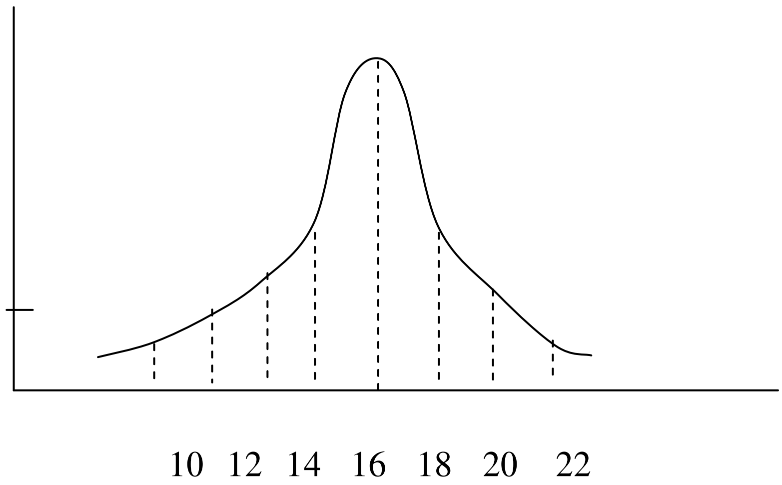
أوجد :

اولاً: التردد الطبيعي ω_o للمنظومة المهتزة

ثانياً: قيمة معامل الجودة Q

ثالثاً: التردد الذى يحدث عنده رنين الاتساع وزاوية الطور φ في هذه الحالة

$\frac{1}{2}P_m$



5.2.6. ظاهرة الرنين في الطبيعة

ناقشنا ، عزيزي الدارس ، في القسم السابق بتفصيل الاهتزازة القسرية Forced Oscillations لمنظومة مهتزة مضمحلة ، ووجدنا أن مثل هذه المنظومة يمكن أن تمر بمرحلة الرنين، إذا اقترب تردد القوة الخارجية من التردد الطبيعي للحركة التوافقية البسيطة لهذه المنظومة أو ساوى التردد الطبيعي.

وقد ركزنا في نقاشنا على الأنظمة الميكانيكية وذلك لأن تحليل هذه الأنظمة رياضياً أيسر لوجود جانب آخر للرنين فيها وهو أن هذه الظاهرة يمكن ملاحظتها مباشرة . وكذلك بسبب أن لوجودها الأثر غير الحميد وربما المدمر.

وقد تكون ، عزيزي الدارس، قد لاحظت أنه عند مرور شاحنة ثقيلة في الشارع تصدر ماكينتها أصواتاً عالية، فإن الزجاج في المنزل وربما الأكواب المتلاصقة تهتز وقد تصدر صوتاً يختفي باختفاء صوت ماكينة الشاحنة . والسبب أن صوت تلك ال ماكينة يحتوي على ترددات كثيرة قد يصادف بعضها التردد الطبيعي لبعض الأجسام غير الثابتة مما تحدث معه ظاهرة الرنين وتهتز تلك الأجسام مع التردد المناسب لها والذي يصلها في شكل أمواج صوتية. وربما لاحظت ايضا أن بعض أجزاء السيارة غير المثبتة تثبيتا جيداً تدخل في مرحلة الرنين و ذلك بالاهتزاز بشكل ظاهر إذا تم تشغيل ماكينه تلك السيارة.

كذلك فإن الرنين يمكن أن يكون مدمراً . وهناك حادثة شهيرة حدثت في ثلاثينات القرن العشرين لكبري معلق (أي معلق بكابلات سميكه جداً) يسمى جسر تاكوما Tacoma Bridge في ولاية واشنطن في الولايات المتحد ة، والذي بعد أشهر من افتتاحه مرت به رياح شديدة. ولأن محصلة قوة الرياح لم تكن في اتجاه واحد وغير ثابتة فقد أدت إلى دخوله في حركة اهتزازية صادفت التردد الطبيعي لهيكل الكبر ى، مما أدى إلى حالة رنين أدت إلى زياده اتساع الاهتزازة ، مما أدى إلى انهياره في النهاية. وبعدها أخذ في الاعتبار هذه الظاهرة عند تصميم الكباري المعلقة وغير المعلقة.

كذلك وجدنا ، عزيزي الدارس، أن ظاهرة الرنين تحدث في الدائرة الكهربيه والتي تحتوي على ملف ومكثف ومصدر تردد خارجي للدرجة التي يمكننا القول أننا كلما استمعنا إلى محطة إذاعية أو شاهدنا قناة تلفزيونية فإن وجود ظاهرة الرنين هو الذي مكننا من ذلك.

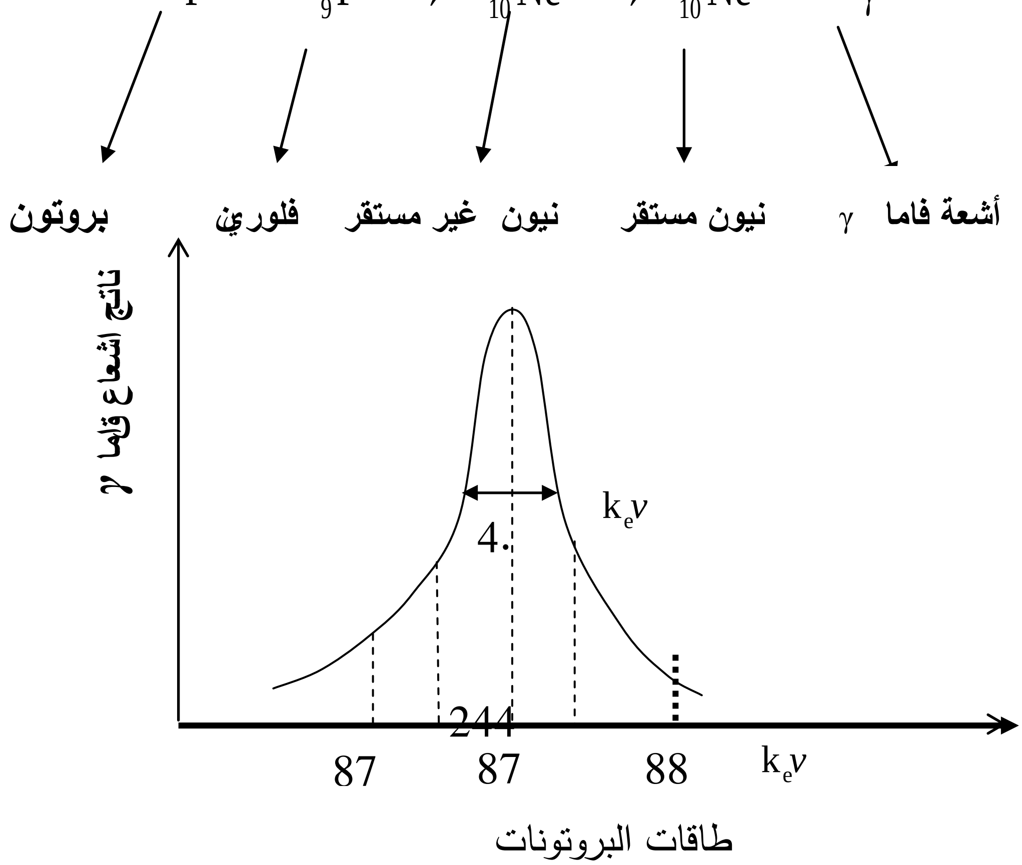
ولكن ظاهرة الرنين ليست حكراً على الأنظمه الميكانيكية المهتزة أو الكهربية التي يتبادل فيها المجالان الكهربي والمغنطيسي الطاقة، وإنما هي ظاهرة منتشرة تقابلنا في كثير من فروع الفيزياء الأخرى ، ولذلك سنقابل مفاهيم مثل معامل الجودة Q ونصف عرض

منحنى الرنين عند منتصف الارتفاع في كثير من الظواهر الفيزيائية وكثير منها في الفيزياء النووية والذرية وسنورد مثالا أدناه.

ولكن ما يجب ملاحظته أن منحنى الرنين في فروع الفيزياء الأخرى قد لا يكون للاتساع أو السرعة أو القدره بالرغم من أن مفهوم الرنين يظل موجوداً . وهذه تظهر عادة عندما تكون للدالة الفيزيائية قمة (أو قاع) عندما تصل قيمة الكمية الفيزيائيه المتغيرة موضوع الدالة إلى قيمة معينة.

والشكل التالي يوضح منحنى توزيع أشعه γ (أشعه كهرومغناطيسية عالية التردد) المتولدة عندما تطلق كمية كبيرة من البروتونات ذ ات الطاقات المختلفة على غاز الفلورين مما ينتج عنه نوى غاز النيون غير المستقرة والتي لكي تصبح مستقرة تقوم باشعاع أشعة γ (تُنْطَق قاما Gamma) . وهنا تزيد كمية أشعة γ المشعة من النيون غير المستقر لتصل إلى أقصى قيمتها عندما تكون طاقة البروتونات حوالي 873 كيلو الكترون فولت ثم تقل عند زيادة طاقة هذه البروتونات. لاحظ أن عرض منحنى الرنين في هذه الحالة $4.8\ k_e v$.

$$P + {}^{19}_{9}F \rightarrow {}^{20}_{10}Ne^{*} \rightarrow {}^{20}_{10}Ne + \gamma$$



وهناك أيضاً ظاهرة الرنين النووي المغنطيسي المشهورة والتي أصبحت علماً ذو تطبيقات مختلفة، منها التمييز بين عناصر المركبات المختلفة . وقد أمدت الطب بأميز الأجهزه التشخيصية وهي أجهزة التصوير بالرنين المغناطيسي.

ومفهوم الرنين يستخدم ايضاً في التحليل الطيفي للضوء . وعلى العموم فهو مفهوم واسع الانتشار في فروع الفيزياء المختلفة ، وسيقابلنا أن شاء الله مرة أخرى عند مناقشتنا للأمواج وللصوت لاحقاً حيث سنجده يحدث حتى داخل الأذن البشرية.

أسئلة تقويم ذاتي

؟

1. متي تمر المنظومة بمرحلة الرنين ؟
2. علل :

- عند تصميم الكباري المعلقة وغير المعلقة والآلات والأجهزة الالكترونية يجب الأخذ في الاعتبار ظاهرة الرنين.
- أذكر بعض الأمثلة لظاهرة الرنين في الطبيعة .

الخلاصة

عزيزي الدارس،،

تناولنا في هذه الوحدة الاهتزازت القسريه وظاهرة الرنين حيث وجدنا ان الاهتزازت القسريه هي اهتزازة المنظومة المهتزة أو القابلة للاهتزاز عندما تؤثر عليها باستمرار قوة خارجية مهتزة، ثم انتقلنا الي الاهتزازت القسرية مع وجود الاضمحلال وجدنا أن اتساع الحركة التوافقية المضمحلة القسرية A هو كمية تتغير بتغير التردد الزاوي للقوة الخارجية

المترددة ω أي أن $A = A(\omega)$ وكذلك السرعة والقدرة في الحركة التوافقية القسرية. هذه العلاقة تؤدي ظاهرة رنين الاتساع ورنين السرعة ورنين القدرة.

أيضاً شرحنا نموذج للاهتزازة الكهربيه المغناطسيه القسرية، ثم الرنين فى دائرة LCR ثم تعرفنا على مفهوم عرض الرنين، ثم علاقته بثابت الاضمحلال γ.

عزيزي الدارس،،

نأمل من خلال مراجعتك للأهداف الواردة في بداية الوحدة أن تكون قد حققتها جميعاً. ونتمنى لك التوفيق والسداد.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس ننتقل معا إلى الوحدة القادمة التي سيتناول مفهوم الموج ه والأمواج الميكانيكية و انواع الامواج من حيث الأمواج العرضية و الأمواج الطولية و ايضاً سنتعرف على الأمواج المتحركة (المسافرة) و إيجاد معادلة الموجة العرضية في بعد واحد و المعادلة العامة لموجة أحادي البعد.

ثم ننتقل إلى الموجة علي حبل مشدود و نتعرف على اثر الشد في الخيط علي سرعة الموجة وبالتالي علي التردد وهل يمكن ان يحدث للموجة انعكاس ام لا؟

نأمل أن تكون وحدة ممتعة لك، وأن تساهم معنا في تطويرها باقتراحاتك.

إجابات التدريبات

التدريب (1)

1) الإجابة في الوحدة 2) الإجابة في الوحدة

التدريب (2)

1) الإجابة في الوحدة

التدريب (**3**) **إزاحة هذه الحركة هي** $\xi = \xi_o \cos(\omega t)$

$\therefore$ القوة المسببة لهذه الحركة مع ملاحظة أنها حركة توافقية بسيطة هي

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -m\,\omega^2\,\xi$$

عند المقارنة نجد أن $\frac{F_o}{m}\cos(\omega t) = \omega^2 \xi_o \cos(\omega t)$

أي أن $\omega^2 \xi_o = \frac{F_o}{m}$.

وعليه نكون قد حصلنا على المعادلة

$\therefore$ الحل هو $x = A(\omega)\cos(\omega t - \varphi)$

$\omega_0 = 3.1304952$

$\therefore$ الزمن الذي استغرقته 100 اهتزازة هو $t \cong 200\ s$

$\gamma = .01\ s^{-1}$

$\omega = 3.13\ \ rad/sec$

$$A(\omega) = \frac{0.98}{4.43717743} = 0.221$$

أما فرق الطور عند الرنين نعوض في العلاقة التالية $\tan\varphi = \frac{\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$

حل التدريب(**4**): **أ)** 10^6 ب) $10^6\ \Omega / H$ ج) 8.66×10^5

د) $1.1 \times 10^{-12}\,C$

حل التدريب(**5**)

1) اولاً: من الشكل واضح أن أقصى قدرة تحدث عند $\omega_0 = 12\ Hz$

ثانياً: من الشكل واضح أن نصف القدرة القصوى $\gamma = 4\ Hz$

وعليه فإن معامل الجودة $Q = 3$ ثالثاً: $= \omega^2 = 11.66\ Hz$

وأيضا نجد أن $\varphi = \tan^{-1}(5.83) = 30.23^0$

$i \sin(\varphi)$

رابعاً: $e^{(-2\times\pi/Q)} = 2.718^{(-2\times 3.14/3)} = 2.718^{-2.094}$

2) ثابت الزنبرك $k = 653.33$ N/m

اولاً: التردد الطبيعي $\omega_0 = 14.76$ Hz rad

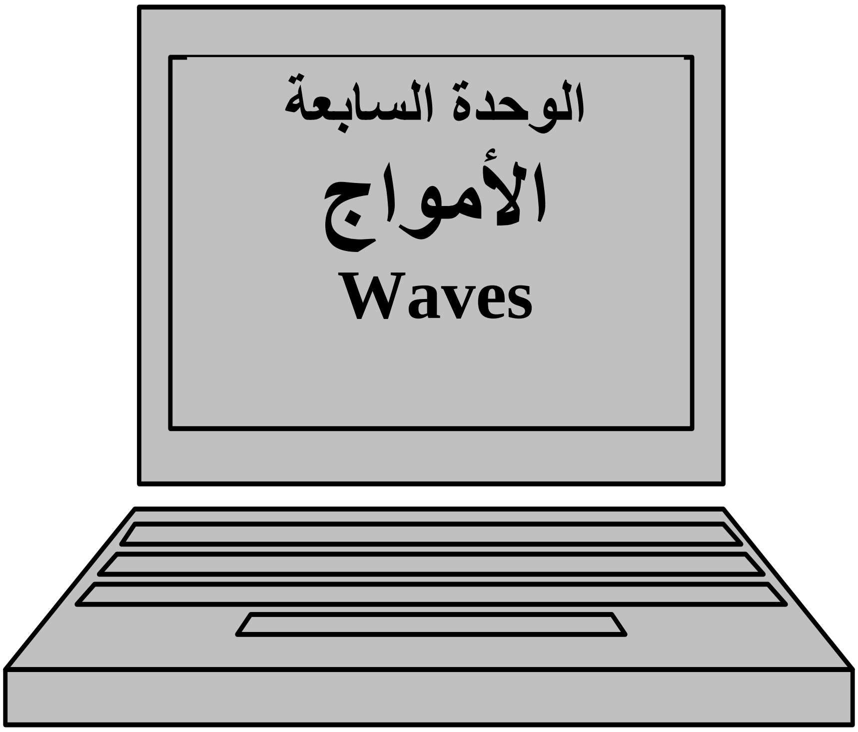
ثانياً:ثابت الاضمحلال $\gamma = 1.476 \text{ Hz s}^{-1}$ ثالثاً: $F_o = 1.307$ N

مسرد المصطلحات

عزيزي الدارس،

فيما يلي قائمة بمعاني المصطلحات الواردة في الوحدة باللغة الإنجليزية، كي نسهل عليك الرجوع إلى أي مراجع أجنبية، أو البحث عبر شبكة الإنترنت،

Forced Oscillations	الاهتزازت القسرية
Resonance	الرنين
Natural frequency	التردد الطبيعي
Amplitude Resonance	رنين الاتساع
Velocity Resonance	رنين السرعة
Power Resonance	رنين القدرة
Power in forced Harmonic Oscillations	القدرة في الحركة التوافقية القسرية



محتويات الوحدة السابعة

مقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،،

مرحباً بك إلى الوحدة السابعة من مقرر الإهتزازات والأمواج والصوت وهي بعنوان الأمواج و تتألف من سبعة أقسام رئيسية. حيث نتعرف في القســم الأول على الأمواج الميكانيكية وفي القسم الثاني نتعمق في معرفة أنواع الأمواج ونجد إن الأمواج نوعان هما الأمواج العرضية والأمواج الطولية.

أما القسم الثالث فيحتوي على الأمواج المتحركة (المسافرة) وفي القسمين الثالث والرابع سندرس معادلة الموجة العرضية في بعد واحد ثم ننتقل معا الي الموجة علي خيط مشدود وأخيراً نتعرف اثر الشد في الخيط (الحبل) علي سرعة الموجة وبالتالي علي التردد. و في القسم الاخير سنناقش الانعكاس في الأمواج.

وقد ذيلنا هذه الوحدة عزيزي الدارس بسرد للمصطلحات العلمية التي وردت في النص الرئيسي، كما حرصنا في هذه الوحدة علي أسئلة التقويم الذاتي، وتدريبات كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية والتي تقدمها لمرشدك الميداني.

عزيزي الدارس،،

أهلاً بك مرة أخري إلي هذه الوحدة ونرجو أن تستمتع بدراستها وأن تستفيد منها وأن تشاركنا في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة

✓

عزيزي الدارس،،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة يتوقع منك أن تكون قادراً علي أن:

١. تفهم أهمية دراسة الأمواج ؛
٢. تتعرف على نماذج وأنواع الأمواج؛
٣. تستطيع إجراء تجربة توضح شكل الأمواج المتحركة (المسافرة)؛
٤. تقارن بين الأمواج الطولية والعرضية؛
٥. تستنتج معادلة الموجة العرضية في بعد واحد؛
٦. تحل مسائل وتمارين المتعلقة بهذه الوحدة.

٧.الأمواج

عزيزي الدارس ،،

أول ما يتبادر إلى الذهن عند ذكر كلمة الأمواج هي أمواج الماء. ولكن الكون ملئ بالأمواج المتنوعة. ولذلك لا نجد فرعا من فروع الفيزياء إلا و فيه حركة موجية ما. بل ومنذ نهاية ستينات القرن العشرين ظهرت نظرية تسمي بنظرية الاوتار الفائقه (Super Strings) ، والتي تفترض أن :

> المادة اصلها نغمات (notes) و أن كل جسيم اولي ما هو إلا نغمة (تردد) بحيث تختلف النغمة المكونة لجسيم ما عن نغمة جسيم آخر وان المادة في النهاية تتكون من هذه النغمات. وقد افترض وجود ما يشبه الاوتار المتناهية الدقه والتي تولد هذه النغمات .

الماء. ولكن كلنا يعرف أن الصوت يصل الي الاذن في صورة أمواج. وقد درسنا الضوء وعرفنا أنه عبارة عن أمواج وكذلك تعرف أمواج الراديو وأشعة X، وأشعة γ وكلها عبارة عن أمواج كهرومغناطيسية. وعندما توغل العلماء في مجال الذرة ظهر علم يسمي بالميكانيكا الموجية Wave Mechanics لتفسير سلوك الجسميات المتفاعلة في ذلك المجال.

٧,١. الأمواج الميكانيكية Wave Mechanics

عزيزي الدارس ،،

لكي نفهم كيفية تكون الأمواج وسلوكها لابد من بداية ما، ولذلك سنبدأ بالاقرب والمحسوس لنا وهي الأمواج في الأوساط المادية . فاذا اسقط حجر صغير علي سطح ماء راكد, فان الماء في بقعه السقوط سيهبط الي اسفل, وبسبب طبيعية المرنة سيحاول الصعود الي وضع اتزانه ولذلك يسلك سلوكاً يشبه سلوك الزنبرك من حيث وجود قوة اعادة فيصعد فوق مستوى الاتزان بسبب وصوله الي اقصى سرعة عند ذلك المستوى فيما يشبه الحركة التوافقية البسيطة. وبسبب ترابط سطح الماء مع بعضه وفي نفس الوقت بسبب مرونة ذلك السطح تنتقل هذه الحركة الي المناطق المجاورة (الملاصقة) فتتولد موجة تنتقل علي سطح الماء مبتعدة عن نقطة سقوط الحجر. فإذا استمرت حركة بقعة السقوط الي اعلي واسفل فيستمر تولد الأمواج بصورة متتالية. ونلاحظ في هذه الحركة عدم انتقال الماء نفسه وانما انتقال الموجة مبتعدة عن نقطة السقوط, بينما يتحرك الماء الي أعلى ثم إلى أسفل, وهكذا دواليك. ويمكن ملاحظة ذلك اذا وضعت قطعة فلين علي سطح الماء حيث ترتفع وتنخفض مع الماء دون ان تتحرك مع الموجة في الاتجاه الافقي علي سطح الماء. أي أن الموجة تنتقل معها الطاقة فتحرك سطح الماء في المستوى الراسي وتحرك معها الاجسام الطافية عليها في نفس المستوى .

والخلاصة هي ان الموجة يمكن ان تنقل الطاقة الي مسافات بعيدة وهذا يحدث لأن الماء جسم مرن

شكل(١-٧): حركة موجة الماء إلى أعلى وإلى أسفل واتجاه انتشارها العمودي علي اتجاه الحركة

عزيزي الدارس, الآن نتقل إلى مثال آخر وهو مثال الحبل المثبت من احد طرفيه. فإذا كان الحبل غير مشدود جدا وليس مرخيا جدا, وتم تحريك طرفه الحر الي أعلى ثم إلى أسفل فإننا نجد أن هناك موجة متحركة من الطرف الذي تم تحريكه مارة بالحبل حتي تصل الي طرفه المثبت. وهذا يحدث لأن الحبل مرن.

والآن ننتقل إلى مثال ثالث هو انتقال امواج الصوت عن طريق الهواء (او أي مادة

أخرى) حيث تنتقل ترددات الصوت في صورة ارتفاع وانخفاض في الضغط حتي تصل الي السامع كما سنرى بالتفصيل لاحقا. غير أن الاختلاف الأساسي عن الأمواج المذكورة سابقا هو ان امواج الصوت تكون في نفس اتجاه انتشار الأمواج, بينما في حالة امواج الماء, فان التموج يكون عموديا علي مستوى انتشار الموجة .

وهناك مثال أخر, عزيزي الدارس, يجمع بين النوعين من الامواج وهو الامواج الناتجة عن الزلازل وهي تتكون من أمواج سطحية تنتشر علي سطح الارض وتشبه في شكلها أمواج الماء وهي التي تسبب الدمار للمباني والانهيارات والشقوق علي سطح الأرض, وأمواج أخرى صوتية تنتشر من مركز الزلازل في خطوط مستقيمة داخل الارض وهذه تنتشر بسرعة الصوت ولذلك فهي اسرع من النوع الأول. وهذه هي التي تحسها بعض الحيوانات مثل الكلاب التي تبدا في النباح وذلك قبل وصول الأمواج السطحية التي تسبب الدمار, حيث أن سرعة الأخيرة اقل بكثير من سرعة الصوت .

ومن هنا, عزيزي الدارس, نجد أن كل هذه الانواع من الامواج المذكورة تنتشر عبر اوساط مادية, ولذلك تسمي بالامواج الميكانيكية (Mechanical Wave). وهي في الواقع امواج تمر عبر الاوساط المرنة (Elastic Media) ,حيث تنتقل الطاقة من جزء في هذا الوسط إلى الجزء الآخر دون حركة الوسط نفسه كما بينا سابقا. ومن الواضح أن وجود وسط ضروري لانتقال الأمواج الميكانيكية خلافا للضوء (والذي هو أمواج كهربية مغنطيسية= كهرومغنطيسية) حيث ينتقل في الهواء كما ينتقل في الفراغ. وكما سنرى لاحقا فهناك خواص للوسط المادي تحدد سرعة الامواج الميكانيكية فيه وهي كتلته ومرونته. ولكن المرونة هي الاساس في وجود قوة الاعادة والتي تحرك الوسط في الشكل الموجي, وهذا ينطبق علي الهواء كما ينطبق علي الماء أو حتى على المعادن، ولكن الكتلة هي التي تحدد مدى استجابة الوسط للحركة الموجبة ولمدى انتشارها كما سنرى لاحقا.

2.7.أنواع الأمواج

عزيزي الدارس, يمكن تصنيف الامواج الي عدة أنواع , حيث يمكن تصنيفها إما حسب:

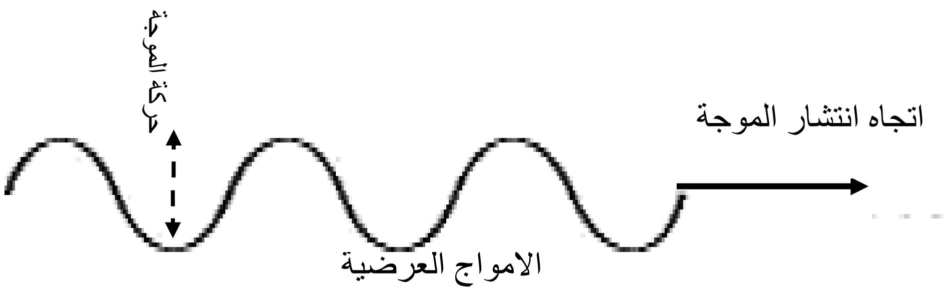
- اتجاه التموج مقارنة باتجاه الانتشار؛
- أو حسب أبعاد الموجة من حيث انها في بعد واحد ام ثنائية الأبعاد أو ثلاثية الأبعاد الخ .

ولنبدا بالتصنيف الاهم وهو في أي اتجاه أو مستوى يحدث التموج مقارنة بالاتجاه الذي يحدث فيه الانتشار, حيث نجد ان هناك نوعان من الامواج حسب هذا التصنيف وهي الأمواج العرضية والأمواج الطولية.

1.2.7.الأمواج العرضية Transverse Wave

الأمواج العرضية:

هي الأمواج التي يكن فيها التموج (او حركة جزيئات المادة) في المستوى العمودي علي المستوى الذي تنتشر فيه الموجة مثل أمواج الماء الصغيرة او الأمواج التي تنشر علي طول حبل (هنا يفضل الحبل المعلق راسيا لالغاء تاثير الجاذبية).

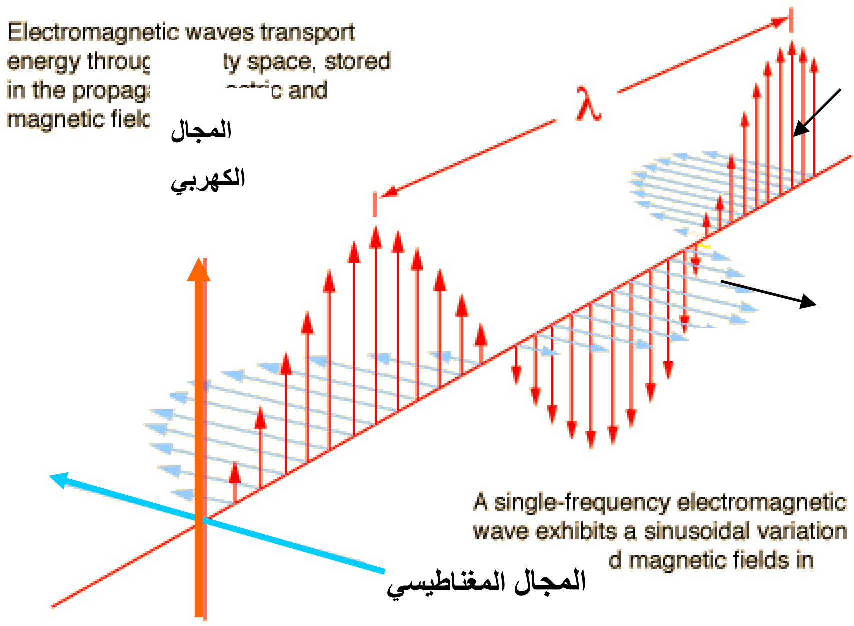


كذلك فان الامواج الكهربية المغنطيسية هي من هذا النوع رغم انها لاتتحرك في وسط مادي حيث يتغير كل من المجال الكهربي والمجال المغناطيسي في المستوي العموي علي اتجاه انتشار الموجة كما في الشكل (٧-٣). الموجة الكهومغناطيسية تقوم بنشر الطاقة عبر الفراغ عن طريق المجال المغناطيسي والمجال الكهربي.

المجال الكهربي

المجـــــال المغناطيسي عمـــــودي علي المجال الكهربي

المجال المغناطيسي

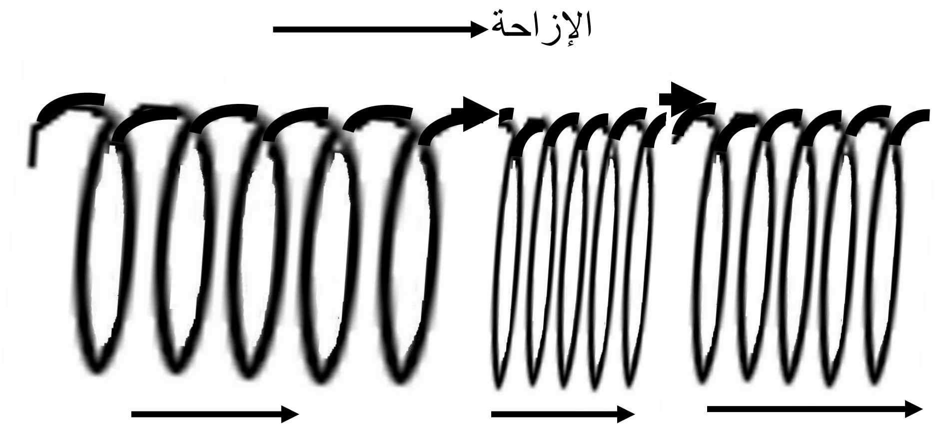


الشكل (٣-٧): الموجة الكهرومغناطيسية

وتكون موجة المجال الكهربي عمودية علي موجة المجال المغناطيسي, علما بأن الارتباط بين النوعين من الأمواج لا فكاك منه لأن أي تغيير في المجال الكهربي يولد مجالا مغناطيسيا عموديا متغيرا بنفس الطريقة والعكس صحيح. وتشمل الأمواج الكهرومغناطيسية أمواج الراديو (الراديو والتلفزيون، أقمار الاتصالات) وأمواج الأشعة دون الحمراء (الحرارة) وكل الضوء المرئي (بالوانه المختلفة) والأشعة فوق البنفسجية وأشعة x وأشعة γ. كل هذا الطيف (Spectrum) يختلف فقط في اطوال امواجه وتردداته, حيث اكبر الامواج طولا هي أمواج الراديو, وبالتالي هي الاقل ترددا واقصرها هي أشعة γ وهي الأكبر ترددا.

2.2.7.الأمواج الطولية Longitudinal Wave

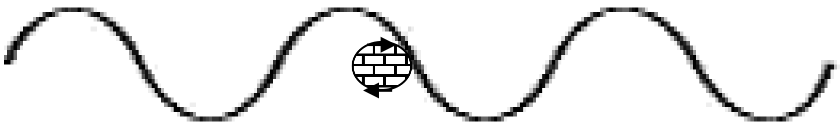
هي الأمواج التي يكون فيها التموج إلى الأمام ثم إلـى الخلف فـي نفس مستوى انتشار الموجة ، مثل أمواج الصوت (سندرسه بالتفصيل لاحقا) ومثل الموجة المتحركة في زنبرك عالي المرونة.



شكل (٤-٧): الموجة الطولية في الزنبرك

فـي
الموجة ك
حيث تتد

أفقية) بالاضافة إلى الحركة الراسية (انظر الشكل أدناه). أما أمواج الماء الصغيرة فنجد فيها نفس هذه الحركة ولكنها صغيرة بالنسبة للحركة الراسية الرئيسية مما يسمح باعتبارها أمواج عرضية.

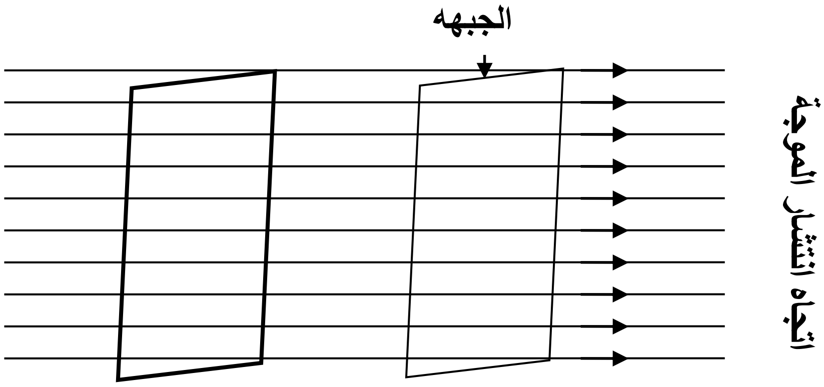


الطريقة الثانية لتصنيف الأمواج هي التصنيف حسب عدد الأبعاد التي تنتشر فيها الموجة, مثلا:

- الموجة علي حبل هي موجة في بعد واحد؛
- الموجة الناتجة عن القاء حجر علي سطح بركة والمنشرة في جميع الاتجاهات حول مصدرها (مكان القاء الحجر) هي موجة ثنائية الأبعاد (Two Dimensional)؛
- أمواج الصوت وأمواج الضوء هي أمواج ثلاثية الأبعاد (Three Dimensional) لأنها تنتشر في جميع الاتجاهات.

هنالك ... اه

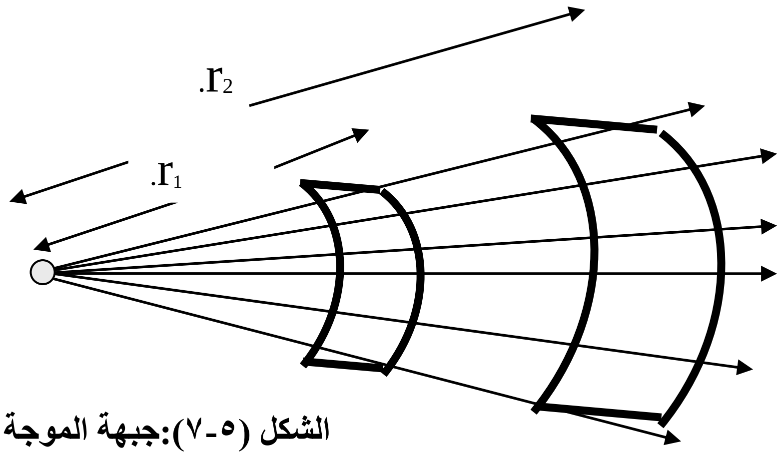
واحد ولكنها ذات طول وعرض في المستوى العمودي علي اتجاه انتشار الموجة (انظر الشكل), ولذلك تكون جبهتها في شكل سطح وهذه لا تحدث إلا إذا كانت الأمواج (أو الأشعة) متوازية .



الشكل (٤-٧): الموجة المستوية

وتكون الأمواج علي هذا السطح أو أي سطوح أخرى موازية له, لها نفس زاوية الطور. ويسمى أي من هذه السطوح جبهة الموجة (Wave front) أو صدر الموجة: وتسمى هذه الموجة بالموجة المستوية (Plane Wave). أما إذا كانت الموجة ثلاثية الأبعاد, مثلا عندما يكون مصدر الامواج ممركز في بقعة صغيرة, مثلا مصباح, تكون جبهة الموجة (Wave front) في شكل كره, وبالتالي سيكون أي جزء من هذه الجبهة (كما موضح في الشكل) جزء من سطح الكرة, وتكون جبهة الموجه علي كل نقاط هذا السطح لها نفس الطور.

وهنا, عزيزي الدارس, لابد من الاشارة الي أنه في كثير من الحالات التي سندرسها سواءً في الضوء أو في الصوت والتي تكون فيها جبهة الموحة التي يمثلها السطح الكروي بعيدة جدا عن مصدر الموجة (مركز الدائرة) يمكن اعتبار سطح الموجة علي هذا البعد, سطحا مستويا أي موجة مستوية. هذا التبسيط يبسط الحسابات الرياضية ويقلل من التعقيدات التي كان يمكن ان تنشأ من وجود سطح كروي للموجة في بقعة معينة بعيدة. والخلاصة هي أن الموجة الكروية علي بعد كبير من مصدرها يمكن اعتبارها موجة مستوية (Plane Wave).



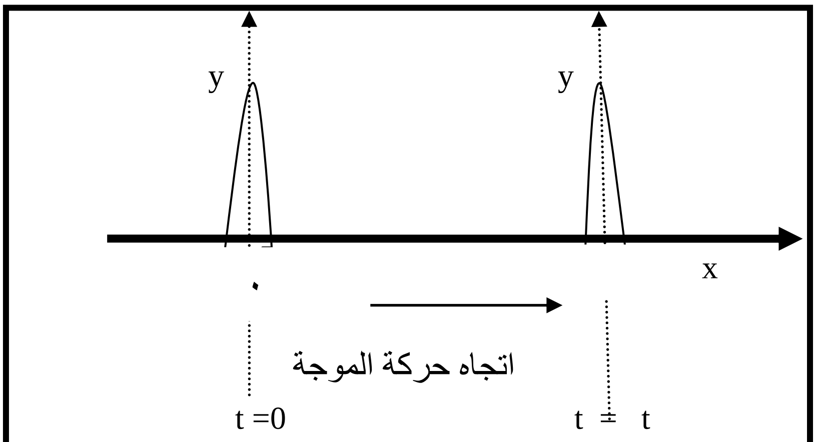
الشكل (٥-٧):جبهة الموجة الدائرية

أسئلة تقويم ذاتى

١. كيف يتم انتقال ترددات الصوت
٢. ناقش : تكون أمواج الصوت في نفس اتجاه انتشار الموجة, بينما في حالة امواج الماء فان التموج يكون عموديا علي مستوى انتشار الموجة.
٣. هنالك ظاهرة طبيعية تجمع بين نوعين من الأمواج, أشرح.
٤. عدد أنواع الأمواج الميكانيكية؛
٥. ما الفرق بين أمواج الضوء والأمواج الميكانيكية؟
٦. اذكر أمثلة للأمواج :
أحادية البعد - ثنائية الأبعاد - ثلاثية الأبعاد ؛
٧. صنف الأمواج حسب عدد الأبعاد التي تنتشر فيها الموجة؛
٨. ما الفرق بين الموجة المستوية و الموجة الكروية ؟

عزيزي الدارس ،،
هناك نوعان من الأمواج هما:
- الأمواج المتحركة
- الأمواج الواقفة Standing waves

في هذا القسم سنتحدث عن الأمواج المتحركة ثم نجد العلاقة الرياضية التي تحكم حركة الموجة وانتشارها. الشكل (٦-٧) يوضح نبضة علي حبل مشدود علي طول المحور x (من اليسار الي اليمين)



الشكل (٦-٧): حركة نبضة علي حبل

عزيزي الدارس ،،

واضح ان ارتفاع النبضة y يتغير بتغير x من الصفر الي اقصي قيمة ثم الي الصفر مرة اخرى وبالتالي فان ارتفاع النبضة y هو دالة x

$$y = f(x) \qquad \text{(٧-١)}$$

نفترض أن النبضة تتحرك بنفس شكلها علي الحبل بمرور الزمن من t = 0 إلى t= t وبعده بسرعة ثابتة c ,علي أساس عدم وجود احتكاك داخل الحبل. وعلي ذلك وبعد زمن t تصبح النبضة علي مسافة ct من النبضة عندما كان الزمن t = 0.

وعليه يمكن في هذه الحالة كتابة المعادلة (٧-١) كالآتي:

$$y = f(x - ct) \qquad \text{(٧-٢)}$$

المعادلة (٧-٢) تعطينا شكل النبضة عندما x=ct وهو نفس الشكل عندما كانت x=0 (عند t=0) أي y=*f*(0) . والمعادلة (٧-٢) تدل أيضاً علي أن ارتفاع الموجة y هو دالة تتوقف قيمتها علي x و t في نفس الوقت .

المعادلة (٧-٢) هي معادلة عامة للموجة مهما كان شكلها وهي تتحرك الي اليمين .شكل الموجة بالضبط نحدده الدالة f . المعادلة (٧-٢) هي معادلة حركة الموجة من اليسار لليمين لانه كلما زادت x زاد الزمن t مع ملاحظة ان ct هي مسافة . في حالة

حركة الموجة من اليمين إلى اليسار نجد أن معادلة الموجة تصبح:

$$y = f(x + ct) \qquad \text{.....................(3-7)}$$

وذلك لأن x تتناقص كلما زاد الزمن t . أي أن المعادلتين (٢-٧) و(٣-٧) تمثلان شكل الموجة الاصلي مهما كان موضع هذه الموجة في اللحظة t . وعلي ذلك ففي المعادلة (٢-٧) لأي موجة تتحرك الي اليمين نجد أن:

$$x - ct = \text{ثابت}$$

بالتفاضل نجد ان

$$\frac{dx}{dt} - c = ٠$$

أو سرعة الموجة

$$c = \frac{dx}{dt} \qquad \text{..............................(٤-٧)}$$

وهذه السرعة c تسمي بسرعة طور الموجة (Phase velocity) . وبنفس الطريقة نحصل من (٣-٧) علي سرعة طور الموجة المتحركة الي اليسار, أي:

$$\frac{dx}{dt} = -c$$

لان السرعة في الاتجاه المعاكس (من اليمين الي اليسار).

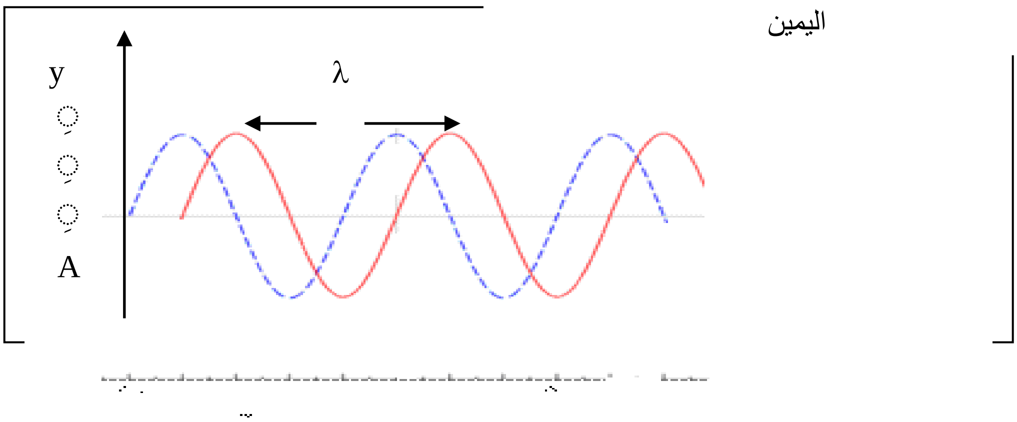
نعود الآن مرة أخرى إلي المعادلتين (٢-٧) و(٣-٧). فإذا إفترضنا أن الزمن t = ثابت (مثلا t = صفر), فان y تمثل الشكل الحقيقي للموجة. أي شكل الموجة علي الحبل علي طول x كانها نقطة أو صورة للموجة في لحظة t معينة .

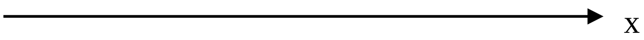
اما اذا نظرنا الي نقطة معينة علي الحبل (النقطة x) بينما يتغير الزمن t فاننا نرى كيف يتغير الارتفاع y في تلك النقطة مع مرور الزمن t. هذا التحليل ينطبق علي أي نوع من أنواع الأمواج سواء كانت الموجة طويلة أو عرضية (مستعرضة).

1.3.7.معادلة الموجة العرضية في بعد واحد

Wave Equation of one dimension

شكل (٢-٧): موجة جيبية متحركة من اليسارالي اليمين





الشكل (٧-٧) يوضح موجة جيبية (أي في شكل جيب الزاوية) وهو الشكل المعهود للموجة مثلا موجة الماء أو موجة على حبل مشدود أو موجة كهرمغناطيسية تتغير فيها شدة المجال الكهربي وشدة المجال المغناطيسي وفقا لهذا الشكل. ولكن هنا سننظر الي هذه الموجة علي انها احادية البعد علي حبل وليس ثنائية كأمواج الماء أو ثلاثية كالأمواج الكهرومغناطيسية .اتساع هذه الموجة A هو اقصى قيمة للإزاحة y .هذا الاتساع يتكرر كلما تحركت الموجة مسافة في اتجاه زيادة x بمقدار λ. المقدار λ يسمى طول الموجة حيث نجد ان قيمة الإزاحة y تكون هي نفسها عند x ما وعند

$$x+n\lambda \quad , \quad x+2\lambda \ , x+\lambda$$

ولذلك :

> يعرف طول الموجة λ بانه المسافة بين نقطتين متجاورتين علي الموجة لها نفس الطور Phase

وعليه ولان الموجة جيبية فانها تتغير مع x حسب المعادلة

$$\boxed{y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x} \qquad ....(٥-٧)$$

ومنها نجد ان الموجة تكرر نفسها عند

$x=\lambda$ و $x=2\lambda$ و $x=3\lambda$، ....الخ, حيث y = 0 في كل هذه الحالات. إذا, المعادلة (٥-٧) هي معادلة شكل الموجة الثابت لأن الزمن t لم يؤخذ في الاعتبار حيث (٥-٧) هي (١-٧) أي

$$y = f(x)$$

ولذلك نفترض أن الموجة, كما يحدث فعلا, تتحرك بسرعة c من اليسار إلى اليمين خلال الزمن t أي أن الموجة هي (٢-٧):

$$y = f(x-ct)$$

ولذلك من (7-2) و (7-5) نجد أن:

$$\boxed{y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)} \qquad ....(٦-٧)$$

ولان الموجة تتكرر كل مسافة تساوي الطول الموجي λ بمرور الزمن فان للموجه زمن دوري T مثل الاهتزازه.

ولذلك, عزيزي الدارس, يعرف الزمن الدوري T للموجة بانه الزمن اللازم للموجة لكي تتحرك مسافة مقدارها طول الموجة λ.

وبما أن: المسافة = السرعة × الزمن

فان طول الموجة

$$\boxed{\lambda = cT} \quad \text{.................. (7-7)}$$

أي أن سرعة الموجة:

$$\boxed{c = \frac{\lambda}{T}} \quad \text{.................. (8-7)}$$

وبوضع (7-8) في (٧-٦) نحصل علي معادلة الموجة:

$$\boxed{y = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)} \quad \text{................ (٧-٩)}$$

حيث أصبحت الكميات داخل الاقواس أعداداً دون تمييز. هناك كميات فيزيائية أخرى ذات اهمية وهي التردد الزاوي ω والعدد الموجي k .

لقد عرفنا. عزيزي الدارس, من دراستنا للاهتزازات ان التردد الزاوي للاهتزازه $\omega = 2\pi f$ حيث f هو التردد حيث نجد أن نفس مفهوم التردد في حالة الاهتزازات ينطبق علي الأمواج وتردد الموجة هو عدد الأمواج في الثانية ويقاس بالهترتز Hz الذي وحدته $\frac{1}{s} = s^{-1}$

وعليه $f = \frac{1}{T}$

حيث T هو الزمن الدوري للموجة وبالتالي فان التردد الزاوي للموجه هو:

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}} \quad \text{............................(٧-١٠)}$$

أي أن : التردد الزاوي للموجة ×الزمن الدوري = مقدار ثابت كالآتي:

$$\boxed{\omega T = 2\pi} \quad \text{................................ (٧-١١)}$$

بنفس الطريقة نجد ان

$$\boxed{k\lambda = 2\pi} \quad \text{............................(٧-١٢)}$$

حيث k هو العدد الوجي (wave number) , ومنها

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad \text{........................... (٧-١٣)}$$

أي ان k (العدد الموجي) يقابل التردد الزاوي ω في (7 - 10). من (7-11) و (-12

7) نجد أن:

$$\omega T = k\lambda$$

$$\boxed{\frac{\omega}{\mathrm{k}} = \frac{\lambda}{\mathrm{T}} = \mathrm{c}} \qquad \text{............................ (٧-١٤)}$$

حيث c سرعة الموجة حسب المعادلة (7 - 8).

من (7 -14) نجد أن المعادلة المشهورة لسرعة الموجة:

$$\boxed{c = \frac{\lambda}{\mathrm{T}} = \lambda f} \qquad \text{.......................... (٧-١٥)}$$

أي أن سرعة الموجة = طول الموجة × التردد

ايضا نجد من (7 - 14) $\omega = kc$

باستعمال (7 - 13) $\omega = kc$ في (7 -6) نحصل علي معادلة الموجة العرضية حيث:

$$\boxed{y = \mathrm{Asin}\ \ (\mathrm{kx} - \omega\, \mathrm{t}\,)} \qquad \text{................................ (٧-١٦)}$$

ونفس المعادلة يمكن الحصول علي باستعمال (7-13) و (7-10) في (7-9) ، والمعادلة (16–7) هي معادلة موجه متحركة من اليسار إلى اليمين. وعليه تكون معادلة الموجة المتحركة من اليمين الي اليسار هي

$$\boxed{y = A\sin(kx - \omega t)} \qquad \text{............................ (17 - 7)}$$

عزيزي الدارس،،

في المعادلتين (7- 16) و (7- 18) إذا كانت x = 0 و t=0 فإن الإزاحة y=0.
ولكن الواقع ليس دائما كذلك حيث نجد كثيرا ان هنالك فعلاً زاوية طورφ كما مر بنا عند دراسة الحركة التوافقية البسيطة. ولذلك فان المعادلة العامة للموجة من اليسار إلى اليمين هي:

$$\boxed{y = A\sin(kx - \omega t - \varphi)} \qquad \text{.................................. (٧-١٨)}$$

مثلا اذا كانت زاوية الطور $\varphi = 90^{\circ}$

$$\boxed{y = A\sin(kx - \omega t)}$$

أما للموجة المتحركة من اليمين لليسار, فإن:

$$\boxed{y = A\sin(kx + \omega t + \varphi)} \qquad \text{.......................... (٧-١٩)}$$

هناك نقاط معينة علي الحبل يحدث فيها تحول للمعادلة (7-19) الى معادلة للإزاحة في حركة توافقية بسيطة. و تلك النقاط هي:

$$x = 0 \, , \frac{2\pi}{k} \quad , \quad \frac{4\pi}{k} \quad , \quad . \quad . \quad .$$

حيث تصبح:

$$\boxed{y = A\sin(\omega t + \varphi)}$$

و هي معادلة الإزاحة في الحركة التوافقية البسيطة. وفي الواقع بجعل أي من المعادلتين (٧-١٨) أو(7-19) تتغير مع الزمن فقط مع تثبيت النقطة x يجعلنا نري حركة توافقية بسيطة في تلك النقطة.

مثال

موجة علي حبل ترددها 10 Hz وطولها 0.2 m واتساعها 0.1 m. جد سرعة تلك الموجة وعددها الموجي واكتب معادلة تلك الموجه.

الحل

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10} = 0.1 s$$

سرعة الموجة
$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \equiv 0.2 \times 10 = 2\ ms^{-1}$$

$$\omega = 2\pi \times 10 = 20\pi$$

العدد الموجي
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\,\pi$$

معادلة الموجة من اليسار إلى اليمين
$$y = A\sin(kx - \omega t - \varphi)$$

$$y = 0.1 \sin\left(10\,\pi x - 20\,\pi\ t - \varphi\right)$$

معادلة الموجة من اليمين إلى اليسار

$$y = 0.1 \sin\left(10\,\pi x + 20\,\pi\ t + \varphi\right)$$

تدريب (١)

١.موجة علي حبل ترددها Hz ٢,٥ وطولها m ٠,٥ واتساعها m ٠,٦. جد سرعة تلك الموجة وعددها الموجي واكتب معادلة تلك الموجه.

٢. موجة علي خبط مثبت من احد طرفيه ترددها f وطولها 0.4 m واتساعها 0.5m وتتحرك بسرعة 160 cm/s. أوجد تردد تلك الموجة وعددها الموجي واكتب معادلة تلك الموجه.

٣. موجة ترددها $f = 2Hz$ سرعتها 0.0 4 m /s واتساعها 1 m. أوجد طولها الموجي وعددها الموجي واكتب معادلة تلك الموجه.

أسئلة تقويم ذاتى

؟

١. ماذا تعرف عن الأمواج المسافرة؟ أشرح كيف مكن الحصول على العلاقة الرياضية التي تتحكم في حركة الموجة وانتشارها.

٢.عرف سرعة طور الموجة وما الفرق بينها وبين السرعة العادية؟

٣. عرف كلا من:

* الطول الموجي   * الزمن الدوري T للموجة

٤. هناك نقاط معينة علي الحبل تحول المعادلة $y = Asib(kx + \omega t + \varphi)$ إلى معادلة الإزاحة في الحركة التوافقية البسيطة. اذكر تلك النقاط .

نع

(٧) ....

بتفاضل الإزاحة y باتجاه الانتشار x نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = k\,A\cos(kx - \omega t)$$

بإجراء التفاضل مره أخرى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k^2\ A\sin(kx - \omega t)$$

أيضاً بتفاضل الإزاحة بالزمن t نجد ان

$$\frac{dy}{dt} = -\omega\ A\cos(kx - \omega t) \qquad (١)$$

بالتفاضل مره أخرى

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2\ A\sin(kx - \omega t) \qquad (٢)$$

عند مقارنة (١) و(٢) نجد ان :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\ \frac{d^2y}{dt^2}$$

ولكن من (7-١٤) نجد أن سرعة الموجة:

$$c = \frac{\omega}{k}$$

وعلية نجد ان

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{d^2 y}{dt^2} \qquad \text{..................... (٧-٢١)}$$

وهي المعادلة العامة للموجة في بعد واحد ، مثل الموجة علي حبل أو موجة صوت في اتجاه واحد (x) (أي موجة طولية أو عرضية).

هذه المعادلة حلها طبعا هو (7-16), علماً بأن حلها لا يتوقف علي اتجاه الموجه سواء من اليسار لليمين أو من اليمين لليسار وفي كل الاحوال فان حل هذه المعادلة هو

$$y = f(kx - \omega t)$$

حيث:

$$y = f(kx - \omega t) = A\sin(kx - \omega t)$$

المعادلة (7- 21) ذات البعد الواحد يمكن تعميمها لموجه ذات بعدين أي:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \qquad \text{.................(٧-٢٢)}$$

حيث ζ هي الإزاحة في البعدين مع ملاحظة أن التفاضل أصبح جزئيا لأنة بأكثر من متغير. وبنفس الطريقة يمكن تعميمها في الثلاثة أبعاد (z , y ,x),

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

تدريب (٢)

عزيزي الدارس, ماذا تعني الكمية $\frac{d^2 y}{dx^2}$ والكمية $\frac{d^2 y}{dt^2}$ ؟

تقويم ذاتي

١ باستخدام المعادلة $y = A\sin(kx + \omega t)$ لموجة متحركة من اليمين إلى اليسار, اثبت انه يمكن الحصول علي المعادلة العامة للموجة في بعد واحد

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{d^2 y}{dt^2}.$$

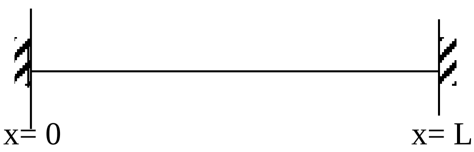
اولا: أذكر أمثلة لهذه الأمواج.

ثانيا: هل يتوقف حل هذه المعادلة على اتجاه حركة الموجه سواءً من اليسار لليمين أو من اليمين لليسار.

٤,٧. الموجة علي خيط مشدودٍ (Stretched string)

عزيزي الدارس,

إن دراسة انتشار الموجة علي خيط مشدود ذات أهمية خاصة لفهم سلوك اوتار الآلات الموسيقية سواء كانت اوتار عود أو كمنجة أو جيتار أو غيرها ، لكن النتائج التي نتحصل عليها من ذلك تتعدي هذه الآلات الوترية إلى آلات النفخ وتتعداها الى مدارات الالكترونات حول الذرة وفي تطبيقات كثيرة أخرى.



الشكل (٨-٧): خيط طوله L مثبت عند x=0 و x=L

عزيزي الدارس, نفرض أن خيطاً طوله L مثبت عند طرفيه x = 0 و x=L المعادلة (7-21) هي معادلة الموجه في حالة هذا الخيط لأنها معادلة موجة في بعد واحد.

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \quad ....(٧-٢١)$$

وهي في هذه الصورة لأن y دالة بمتغيرين حيث y = y (x, t)

وحل المعادلة (7- 21) حصلنا عليه سابقا ولكن ايضا يمكن كتابته كالآتي:

$$\boxed{y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)} \quad .... (٧-٢٢)$$

حيث تم فصل المكان والزمان كل في دالة مختلفة, ومنها نجد أن:

$$\frac{\partial^2 y}{dt^2} = -\,\omega^2\ (x)\cos(\omega t) \qquad (١)$$

وكذلك

$$\frac{\partial^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}\cos(\omega t) \qquad (٢)$$

لاحظ أن f(x) دالة في x فقط. بتعويض (١) و (٢) في (7 -21) نحصل علي:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} f(x)$$

واضح أن هذه المعادلة حلها هو

$$f(x) = A\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

ولأن k=ω/c , فإن:

$$f(x) = A\sin(kx) \quad ....(٧\text{-}٢٣)$$

أي أن حل المعادلة(٧-٢١) هو:

$$\boxed{y(x,t) = A\sin(kx)\cos\omega t} \quad .... (٧\text{-}٢٤)$$

ونسبة لأن الخيط مثبت في طرفية عند x = o و x = L فإن:

صفر = f (L) = f (0)

بالتعويض في المعادلة (٧-٢٣) في حالة x = L

$$f(l) = A\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$$

ولأن A ≠ صفر فلابد أن تكون:

$$\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$$

وهذا يحدث فقط عندما تكون: $\frac{\omega L}{c} = n\pi$ أي أن $\omega = \frac{n\pi c}{L}$

حيث n = 0 , 1 , 2 , 3 , ... (أي عدد موجب)

ولان $2\pi f = \omega$ حيث f التردد فإن:

$$f = \frac{nc}{2L}$$

هذه المعادلة تدل على أن هناك عدداً كبيراً من الترددات التي يمكن ان يهتز بها هذا الخيط وذلك حسب قيمة n ولذلك تكتب المعادلة السابقة كالآتي:

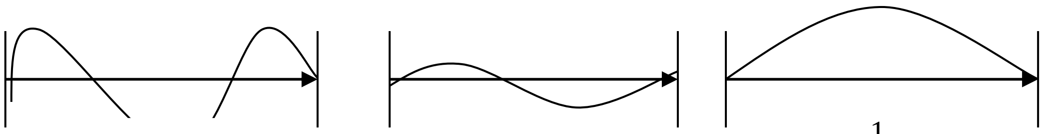
$$\boxed{f_n = \frac{nc}{2L}} \quad ....(٧\text{-}٢٥)$$

ومن المعادلة (٧-١٥) $c = \lambda f$ نجد أن:

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}} \quad .... (٧\text{-}٢٦)$$

وهو طول الموجة علي الخيط حيث يمكن ان يكون هناك نصف موجة أي

$\lambda = 2L$ أو موجة كاملة أو موجتان ....الخ لأن طول الموجة λ يتناسب مع طول الحبل طرديا. لاحظ أن أطول طول موجة هو $\lambda = 2L$ (طول الخيط = ½ طول موجة) وأن طول الموجة يقصر كلما زاد عدد الأمواج.



$\lambda = \frac{3L}{2}$ $\qquad$ $\lambda = L$ $\qquad$ $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ L

الشكل (٩-٧): طول الموجة يقصر كلما زاد عدد الأمواج

لاحظ في المعادلة (٢٥-٧) أن c سرعة الموجة ثابتة للخيط المعين ذو الشد المعين. التردد الأول عندما n =١ هو

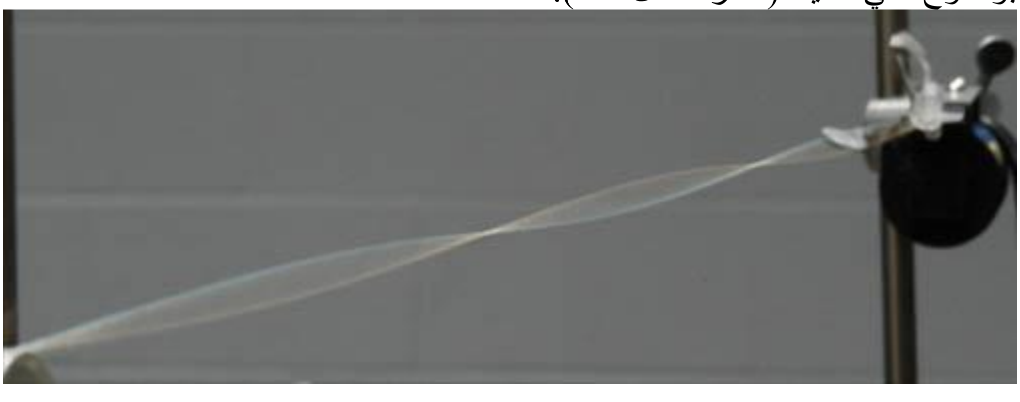
$$f_1 = \frac{c}{2L}$$

يسمي **التردد الأساس** (Fundamental Frequency) وهو اقل تردد ويتوقف علي طول الخيط وأن كل الترددات الأخرى للخيط هي حاصل ضرب هذا التردد في n أي

$$\boxed{f_n = nf_1} \qquad (٢٧-٧)$$

كل هذه الترددات تسمي **الترددات الطبيعية** (Natural Frequencies) وهي تماثل ما درسناه في الاهتزازات في حالة الرنين.

فإذا وصلنا هذا الخيط المشدود بجهاز يولد اهتزازات فاننا سنجد انه كلما كان تردد الاهتزازة المولدة بواسطة هذا الجهاز توافق الترددات حسب المعادلة (27-7) ازداد اتساع الموجة A ليصل الى اقصي قيمة له مع أي واحدة من هذه الترددات و تظهر الموجة بوضوح علي الخيط (انظر الشكل أدناه).



هذا يعني أن الجهاز المذكور لو كان يولد كل الترددات الطبيعية حسب (7-25) أي حسب (7-27) في وقت واحد, فإن الخيط سيهتز كل هذه الاهتزازات في نفس الوقت, وأن الموجة المتولده ستكون معقدة الشكل لانها ستكون ناتجة من مجموع كل الأمواج علي الخيط.

٧,٥. الاوتار الموسيقية

لاحظ أن الخيط المشدود من طرفية يمثل وتراً موسيقياً في كل الآلات الموسيقية الوترية مثل العود والكمان والجيتار والمندلين و حتى البيانو هو عبارة عن اوتار متدرجة الطول, مثل آلة القانون, ينقر عليها عند الضغط علي المفاتيح.

وعند تحريك الوتر من موضع اتزانه وتركه فانه يهتز كما هو معروف في حالة ما يعرف بالضرب علي العود أو الجيتار أو المندلين أو البيانو فيصدر الوتر المشدود صوتا ناتجا عن اهتزازه. نفس الشيء يحدث عند امرار وتر اخر علي الاوتار المشدودة كما في حالة الكمان حيث يجعل مرور هذا الوتر الآخر وتر الآلة الموسيقية يهتز بالتردد المناسب. ولكن أي تردد يصدر عن هذه الاوتار, وقد قلنا سابقا ان عدد الترددات الطبيعية لهذا الاوتار كبير جدا؟

واضح آن التردد الطبيعي الذي سيصدر عن اوتار الآلات الموسيقية هو التردد الأساس لكل وتر أي:

$$f_1 = \frac{c}{2L}$$

عزيزي الدارس ،،

واضح ان هذا التردد يتوقف علي:

- سرعة الموجة والتي سنجد لاحقا أنها ذات علاقة مع وزن الوتر وشده؛
- طول الوتر حيث كلما زاد طول الوتر قل تردده.

عدد الأوتار في الآلات الموسيقية يختلف, فمثلا:

اسم الآلة	عدد الأوتار
العود	٥
الجيتار	٦
الكمان	٤
الطنبور	٥

إضافة إلى ذلك فإن كل وتر يمكن انقاص طوله بالضغط عليه بالاصبح مما يمكن من الحصول علي عدد كبير من نغمات الترددات فيما عدا الطنبور ، لماذا؟

تقويم ذاتي

؟

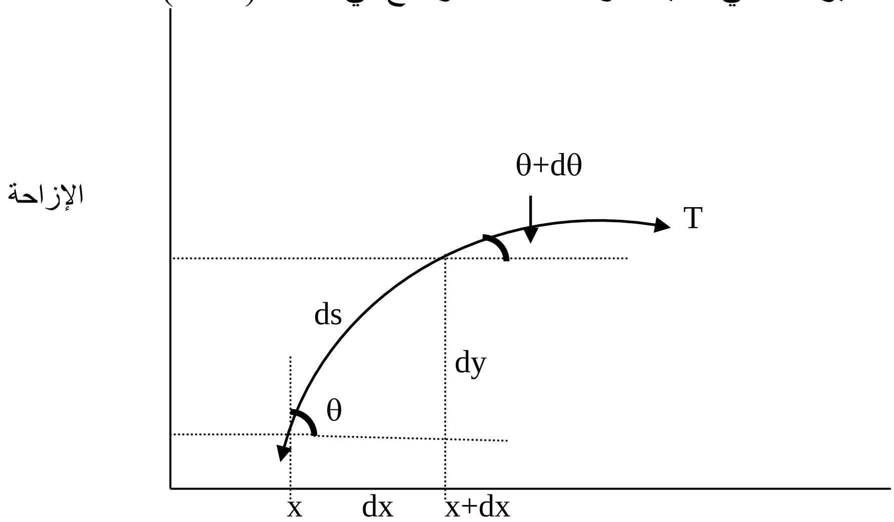
١. اذكر العوامل التي يتوقف عليها طول الموجة لخيط مشدود
٢. تردد الخيط المشدود يتوقف علي...........................
٣. اشرح كيف تصدر الأوتار الموسيقية النغمات وكيف يمكن الحصول على أكثر من نغمة من نفس الوتر؟

6.7 ي
التر

عزيزي الدارس ،،

لنتصور موجة يتحرك بموجبها الخيط (الى اسفل واعلي) وتتحرك موجة الخيط حتى تصل نهايته.لنأخذ جزءً صغير جدا في الخيط يتحرك بإزاحة راسية y وهذه الجزء في الواقع يمكننا إعتباره متحركاً في حركة توافقية بسيطة. هذه الحركة في اتجاه y تتغير في الزمن t وفي x (أي الموضع علي الخيط) وقد من قبل أن معادلة الموجة (٧-٢١) تربط بين y و x و t.

لنفرض ان الخيط له كتله ثابتة في كل وحدة طول نرمز لها بالرمز λ (يرمز لها احيانا بالرمز μ) . ولنفرض أنه يوجد شد في الخيط T وأن هذا الشد ثابت. الآن لنأخذ جزءً صغيراً جداً في الخيط طوله ds كما موضح في الشكل (٧-١٠).



الشكل (١٠-٧): حساب القوة المؤثرة على جزء صغير في خيط

القوة المؤثرة T علي احد طرفي جزء الخيط يكون اتجاهها زاوية θ مع الاتجاه الأفقي

بينما في الطرف الاخر يكون زاوية θ+dθ . طول الجزء المنحني في الخيط هو

$$\boxed{ds = \sqrt{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}\ dx}$$

لننظر إلى الأمر ببساطة علي انه تطبيق لنظرية فيثاغورث (انظر الشكل). ولكن من ناحية أخرى نتذكر أن y عبارة عن داله تتوقف على متغيرين x و t ولذلك يكون التفاضل جزئيا في الاتجاه الأفقي (حركة الموجة) $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ صغير جدا وبالتالي يمكن اهمال مربع هذه الكمية وتصبح ds = dx وبالتالي تصبح كتله هذا الجزء هي $\lambda dx = \lambda ds$
وتصبح القوة الافقية هي الكتله × العجلة .

القوة العمودية علي dx في الاتجاه الراسي (حيث الحركة الاهتزازية) هي

$$\boxed{F = T\sin(\theta + d\theta) - T\sin(\theta)} \qquad (١)$$

وهي في اتجاه y الموجب . وبما أن التسارع في هذا الاتجاه هو $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$.فان القوه هي:

$$F = \lambda dx \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (٢)$$

لاحظ ان θ صغيرة وبالتالي:

$$(3) \quad \sin(\theta) = \tan(\theta) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

(انظر الشكل السابق).

بوضع (٣) في (١) نجد ان

$$\boxed{F = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right]}$$

والمعروف أن مثل هذا الفرق داخل القوس هو عبارة عن تفاضل مضروب في dx ولذلك فإن:

$$F = T\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) dx \qquad (٤)$$

من (٤) و (٢) نجد أن معادلة الحركة للجزء الصغير في الخيط dx هي

$$T\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = \lambda\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (28\text{-}7)$$

المعادلـة (٢٨-٧) هـي نفس معادلـة الموجـة التـي حصـلنا عليهـا سـابقا فيمـا عـدا ان مكـان السرعة حصلنا علي

$$c = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

$$c^2 = \frac{T}{\lambda}$$

حيث T الشد في الخيط و λ كتلة وحدة طول الخيط.

أي كلما زاد الشد في الخيط كلما زادت سرعة الموجة علي الخيط, وبالتالي وحسب (7-25) يزيد التردد, وكلما زادت كتلة وحدة طول الخيط كلما قلت سرعة الموجة وبالتالي قل التردد.

لذلك نجد انـه كلمـا زيـد شـد الـوتر كلمـا ارتفـع تـردده, بينمـا تـردد الأوتـار السـميكة (كتلها أعلي) منخفض, ويمكن ملاحظة ذلك بسهولة في أي اله موسيقية.

والخلاصة أن سرعة الموجة في الخيط المشدود والاوتار تتوقف علي كتلـة وحـدة طـول الخـيط والشـد عليـه . وكـون سـرعة الموجـة تتوقـف علـي خـواص المـادة نفسـها هـي ظاهرة عامة فـي كل المـواد. فسـرعة الموجـة التـي تنتقل فـي قضـيب معدني نجدها تتوقـف علي معامل يونق (Young's Modulus) وعلي كثافة المادة حيث

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{Y}{\lambda}}} \qquad (٣٠\text{-}٧)$$

(لاحظ أن الكمية $\frac{Y}{\lambda}$ لها وحدات مربع السرعة(الوحدة الثالثة)). وعليه تنطبق علـى الموجـة التي تتحرك بالسرعة (٣٠-٧) في هذا القضيب نفس معادلة الموجه (٧-٢٨).

تقويم ذاتي

؟

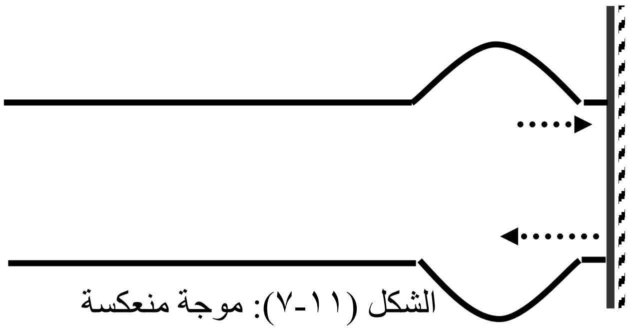
١. ناقش اثر الشد في الخيط علي سرعة الموجة وبالتالي علي التردد
٢. اشرح بطريقتك الخاصة كيفية الحصول على المعادلتين (٢) و (٤) أعلاه.

٧,٧. انعكاس الأمواج

عزيزي الدارس ،،

بمـا أن الخـيط مشـدود ومثبـت الطـرفين فـان الموجـة علـي الخـيط تـنعكس عنـد وصولها الى نقطة التثبيت ولكنها تعود معكوسة كانها تكمل باقي الموجة. فإذا كان الاتساع الذي يصل الى نقطة التثبيت موجبا فان الموجة المنعكسة تبدأ باتساع سالب (انظر الشكل (٧-١١)).

في الواقع يمكن النظر الى الموجة الاصلية المتحركة مثلا من اليسار إلى اليمين ثم الي الموجة المنعكسة المتحركة من اليمين إلى اليسار كموجتين تحدثان في الوقت علي الخيط المشدود, وبالتالي فان المحصله النهايئة هي حاصل جمع الموجتين.



الشكل (١١-٧): موجة منعكسة

- الموجة الأولى من اليسار إلى اليمين $y(x, t) = A\sin(kx - \omega t)$
- بينما الموجة الثانية $y(x, t) = A\sin(kx + \omega t)$

حاصل جمع الموجتين

$$\boxed{y(x, t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)} \quad \ldots\ldots\ldots (32\text{-}7)$$

اذا نظرنا الى النقطة $x = 0$, نجد أن:

$$y(0, t) = A\sin(-\omega t) + A\sin(\omega t)$$

أي:

$$\boxed{y(0, t) = -A\sin(\omega t) + A\sin(\omega t)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33\text{-}7)$$

وعنـدما $x = L$ نحصـل علـي نفـس النتيجـة وذلـك لأن $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ و مـن (26-7)

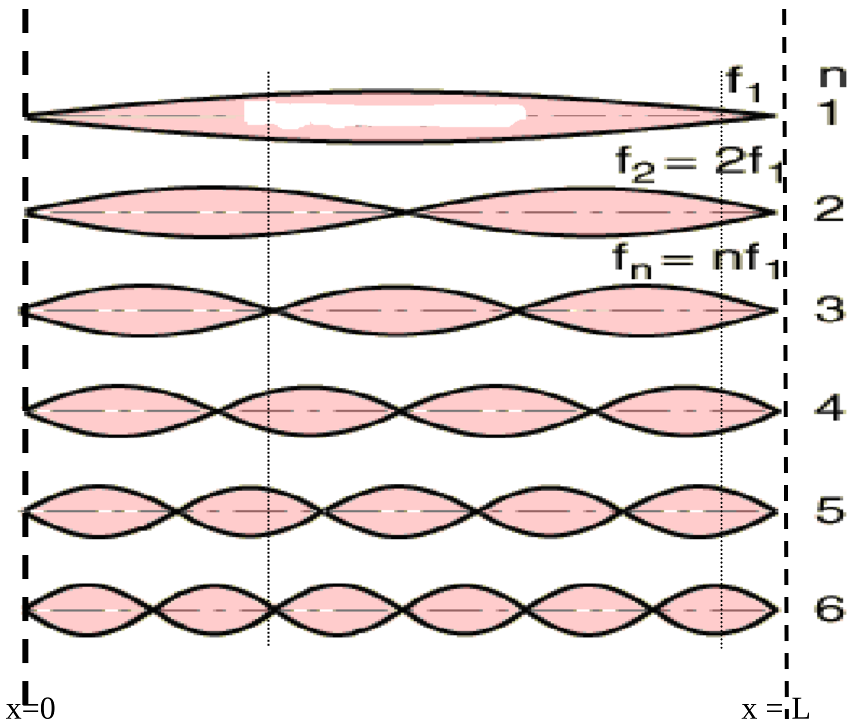
وبالتالي $\lambda_n = \frac{2L}{n}$

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

وبالتالي في المعادلة (٣٢-٧) تكون $n\pi = k\,\mathrm{L} = \mathrm{kx}$

أي أن هاتين الموجتين المتحركتان عكس بعضهما سيكون اتساعاهما في كل الاوقات عند نقاط تثبيت الخيط متعاكسان لأن احد الإتساعين سالب والآخر موجب .

التحليل السابق يدل علي وجود فرق طور بين الموجه الاصلية والموجة المنعكسة مقداره π وتغير في الاتجاه (الشكل (٧-١٢)).



الشكل (٧- ١٢):

لاحظ أنه لولا وجود التثبت عندالنقطة x=L لاستمرت الموجة بنفس الشكل الذي انعكست به, كأنما الانعكاس صورة لما بعد x =L.

٨,٧.الأمواج الواقفة Standing Waves

عزيزي الدارس ،،

لاحظ أن ما حصلنا عليه في تحليلنا للانعكاس حصلنا عليه من المعادلة (7-32) عند جمع موجتين متعاكستين في الاتجاه عندما النقاط x=0 , x=L ، ونعود الآن إلى نفس المعادلة لنرى ماذا يحدث عند قيم x الأخرى حيث

$$\boxed{y\ (x\ ,\ t\ )\ =\ A\ \sin\ (\ k\ x\ -\ \omega t\ )\ +\ A\ \sin\ (k\ x\ +\ \omega t\ )} \quad \text{——— (32-7)}$$

من العلاقة:

$$\sin\left(\lambda x \pm \omega t\right) = \sin(k x)\ \cos(\omega t)\ \pm\ \sin(\omega t)\ \cos(k x)$$

نجد أن حاصل جمع الموجتين هو :-

$$\boxed{y\,(x\,,\,t\,) = 2\,A\,\sin(k\,x)\,\cos(\omega t)} \qquad (٣٤\text{-}٧)$$

وهي نفس المعادلة (7-24) ولكن تضاعف الاتساع نسبة لوجود موجتين مجموعتين معا . المعادلة (7-34) تمثل ما يسمي بالأمواج الواقفة Standing Waves أو أحيانا تترجم بالأمواج الموقوفة.

عزيزي الدارس, في هذه المعادلة, تتوقف قيمة الكمية

$$\boxed{B\ (x) = 2A\ \sin\ (kx)} \qquad \text{................................(35-7)}$$

علي قيمة x علي الخيط و تكون ثابتة لكل x على حدة وذلك لأن قيمة الكمية

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k$$

ثابتة لأن طول الموجة λ ثابت للموجة علي الخيط المشدود . وعلي ذلك فالكمية في (7-35) هي اتساع الموجة في النقطة x. وهي كمية ثابتة في تلك النقطة. وعليه يمكن كتابة معادلة الإزاحة (7- 32) كالآتي

$$\boxed{y\ (\ x\ ,\ t\ ) = B(x)\ \cos\ (\omega t)} \qquad \text{................................. (36-7)}$$

واضح من هذه المعادلة ان الخيط في النقطة x يهتز في حركة توافقية بسيطة إلى أعلى و إلى أسفل مع مرور الزمن t بتردد زاوي

$$\boxed{\omega = 2\pi\, \mathrm{f} = 2\,\pi\,\frac{\mathrm{c}}{\lambda} = \mathrm{kc}}$$ ....(٣٧-٧)

حيث c سرعة الموجة و k عدد الموجة أو العدد الموجي.

وعند النظر إلى الخيط ككل نجد حسب (7-36) أن اتساع الموجة ليس ثابتا علي طول الخيط وانما يختلف حسب قيمة x حيث هناك

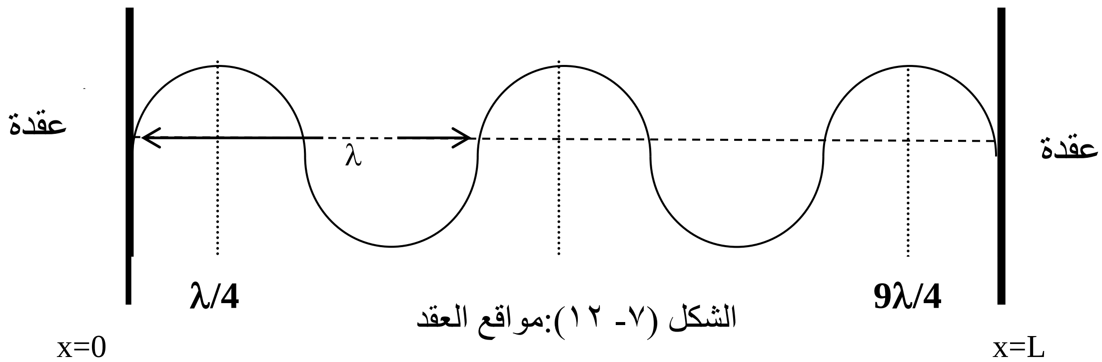
- نقاط على x يكون فيها هذا الاتساع صفرا
- نقاط على x يكون فيها هذا الاتساع اقصي قيمة (أي A)
- النقاط الأولى حيث الاتساع B(x) = 0 نجده من المعادلة (7-35) يحدث عندما تكون sin (kx) = 0 وهذه تحدث عندما تكون:

$$k\,\mathrm{x} = 0\,,\pi\,,2\pi\,,........$$

أي عندما تكون

$$\mathrm{x} = 0, \frac{\lambda}{2}\,, \frac{3\lambda}{2}\,, .. .\,, \mathrm{L}$$

هذه النقاط تسمي كل منها عقده (node) (انظر الشكل (٧-١٢)) وتقع كلها في مستوى الاتزان.



الشكل (٧- ١٢):مواقع العقد

- النقاط الأخرى التي يأخذ فيها الاتساع أقصى قيمة له فهي التي تكون فيها sin(kx) =1 حيث من (7-35) نجد أن:

$$\mathrm{B(x)} = 2\mathrm{A}$$

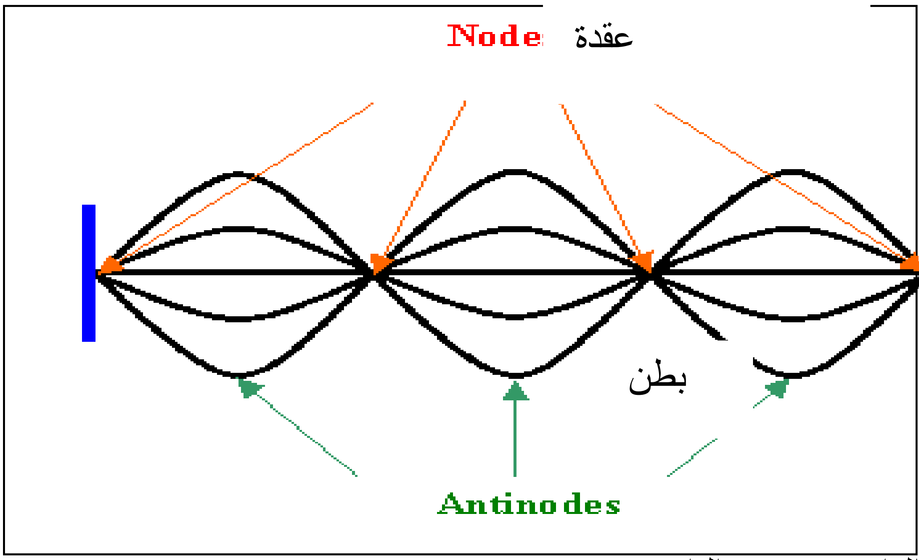
ويحدث ذلك عندما تكون

$$k\,x = \frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{2}\,,\ldots.$$

$$x = \frac{\lambda}{4}\,,\,\frac{3\lambda}{4}\,,\,\frac{5\lambda}{4}\,,\ldots$$

هذه النقاط تسمي بطن (anti node) وتبعد عن بعضـها مسافة $\frac{\lambda}{2}$ وعندما يكون الاتساع في أي نقطة منها موجبا فان التالي يكون سالبا

ونلاحظ أن المسافة بين العقدة والبطن هي $\frac{\lambda}{4}$ (الشكل (١٢-٧)).



والآن من الواضح عزيزي الدارس ،،

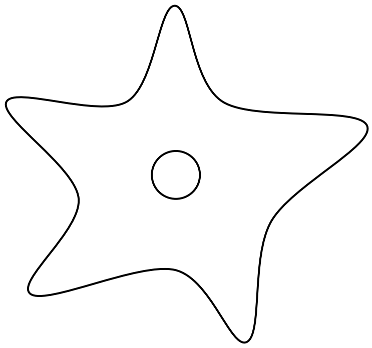
هذه الأمواج تسمي واقفة لأنها لا تتحرك في اتجاه x ولكن كل نقطة تتحرك في حركة توافقية بسيطة في مكانها فتراها مره كما في شكل وفي لحظة تالية يتغير اتساعها فيصبح ما كان في الأعلى في الاسفل والعكس صحيح وهكذا مع مرور الزمن t .

أي أ

لقيم cos ωt مع تغير الزمن t فقط . **من التحليل السابق نستنتج :**

- تعريف الموجة الموقوفة على خيط: هي الموجة التي يختلف فيها الاتساع بين موقع على الخيط وموقع آخر ويتوقف علي الموقع علي الخيط؛
- ٢.بحدوث الإهتزازه علي الخيط تتكون الموجة تلقائيا علي طول الخيط ولاتنتقل الموجة (كما يحدث علي سطح الماء مثلا) وبالتالي ليس هناك انتقال للطاقة لأن الطاقة لا تتنقل خلال العقد nodes وبالتالي فهي موجة ثابتة ناتجة عن الحركات التوافقية البسيطة لاجزاء الخيط المختلفة.

مثال للأمواج الواقفة في الطبيعة مدارات الالكترونات حول نواه الذرة حيث لا يدور الإلكترون حول الذرة في أي مدارات كيفما إتفق وإنما في مدارات يكون فيها عدد أطوال الأمواج λ عددا صحيحا أي لا يكون المدار إلا $n\lambda$ حيث , 2 , 1 , 3= n . وذلك حسب معادلة دي برويل De Brogile 1924) (أنظر الشكل التقريبي المجاور).



أسئلة تقويم ذاتي

؟

١ . عرف الموجة الواقفة. وباستخدام المعادلة

$$y = (x , t) = A \sin (k x - \omega t) + A \sin (k x - \omega t) \quad (32\text{-}7)$$

حدد نقاط العقد والبطن علي الموجة.

٢. اكمل :

بحدوث الاهتزازه علي الخيط تتكون ....طول الخيط ولاتنتقل الموجة كما يحدث علي سطح الماء مثلا وبالتالي ليس هناك انتقال للطاقة لأن الطاقة لا تتنقل خلال .... وبالتالي فهي موجة ....

الخلاصة

عزيزي الدارس،،

في هذه الوحدة درسنا الأمواج الميكانيكية وكذلك أنواع الأمواج من حيث انها أمواج عرضية و طولية.

ثم دارسنا الأمواج المتحركة (المسافرة) و توصلنا إلى معادلة الموجة العرضية في بعد واحد, ثم انتقلنا إلى الموجة علي خيط مشدود. و أخيرا تعرفنا على اثر الشد في الخيط (أو الحبل) علي سرعة الموجة وبالتالي علي التردد.

وفي القسم الأخير تحدثنا عن الانعكاس في الأمواج وتعرفنا على الموجة الموقوفة.

وفي الختام نأمل أن تكون هذه الوحدة قد حققت الأهداف الواردة في بدايتها.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية:

عزيزي الدارس،،

في الوحدة القادمة سنتعرف علي الصوت وخواصه. نرجو أن تكون وحدة مفيدة لك

اجابات التدريبات

التدريب(١)

(١)

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.5}{0.4} = 1.25 m/s$$

$$\varpi = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$$

$$y = 0.6\sin(kx - \omega t - \varphi) = 0.6\sin(4\pi - 5\pi - \varphi)$$

(٢) $f = 0.4 s^{-1}$ $\omega = 0.8\pi$, $k = 5\pi$,

$y = 0.5\sin(5\pi x - 2\pi - \varphi)$

(.٣) $\lambda = 0.02 m$, $\omega = \pi$, $\omega T = 2\pi$, $k = 10\pi$

$y = \sin(10\pi - 2\pi - \varphi)$

التدريب (٢)

اولا:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

ثانيا:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial^2 z} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

مسرد المصطلحات

Transverse Waves	الأمواج العرضية
Longitudinal Waves	الأمـواج الطوليـة
Spectrum	الطيف
Two Dimensional	ثنـائية الأبعاد
Three Dimensional	ثلاثية الأبعاد
Plane Wave	الموجـة المستوية
Traveling Waves	الأمواج المتحركة (المسافرة)
Standing waves	الأمـواج الواقفـة
Phase	الطـور
Wave Equation in one dimension	معادلـة الموجـة العرضـية فـي بعـد واحـد
Wave on Stretched String	الموجة علي خيط مشدودٍ
Anti node	بطن
Node	عقده