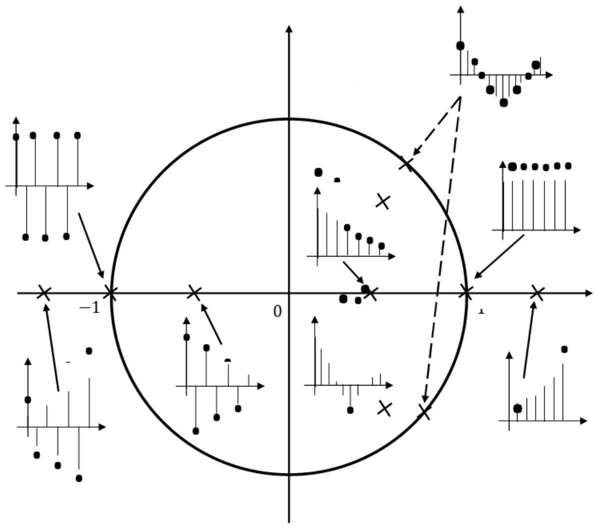
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider - Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Électrique

ASSERVISSEMENTS ÉCHANTILLONNÉS



Master en Électrotechnique

Mohamed Yacine HAMMOUDI

Chapitre 1

Introduction à la commande numérique

1.1 Introduction

Le module systèmes asservis échantillonnés traite de la régulation numérique des systèmes dynamiques. En s'appuyant sur la description polynomiale des systèmes et sur leur modélisation par les fonctions de transfert. L'avènement des microprocesseurs et des mini ou micro-calculateurs a eu un impact sur la conduite des processus aussi bien dans les aspects de leur commande que dans ceux relevant de leur gestion. Actuellement, les automaticiens tirent profit des vastes ressources informatiques disponibles, tant au niveau de la réalisation des régulateurs qu'à celui de leur analyse, de leur conception et de leur simulation.

1.2 Définitions

Automatique: Ensemble des discipline à la fois scientifiques et techniques à utilisées pour la conception ou la réalisation des systèmes fonctionnant sans intervention de l'être humain (c'est-à-dire la science qui étudie les automatismes).

Automatisme: Dispositif technologique qui remplace l'opérateur humain dans la conduite d'une machine, d'un processus, d'une installation industrielle.

Processus ou Système: C'est l'ensemble de l'installation que l'on doit piloter. Il est caractérisé par des signaux d'entrée et de sortie et des lois mathématiques reliant ces signaux.

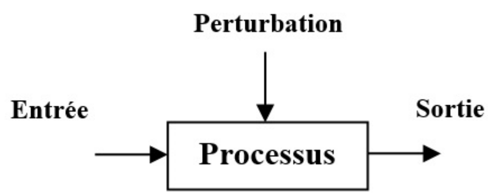
Signal: Grandeur physique généré par un appareil, ou traduite par un capteur. On distingue :

Signal d'entrée: indépendant du système, il se décompose en commandable et non commandable (perturbation).

Signal de sortie: dépendant du système et du signal d'entrée. On distingue les sorties observables et non observables.

Conduite ou Contrôle: On peut conduire un système de manière automatisée pour

- Maintenir une grandeur de sortie constante (réguler).
- Faire suivre à certaine sortie une séquence (automatisme séquentiel) ou une loi donnée (asservissement).
- Si on ajoute l'optimisation d'un critère (exemple cout) on parle alors de contrôle.



1.3 Classification des automatismes

On peut classer les automatismes selon la nature des signaux d'entrées et sorties

a) **Signaux continus :** Système linéaire / système non linéaire

Régulation / poursuite

Mono variable / multi variable

Méthodes : équation différentielle / fonction de transfert / étude harmonique

Matérialisation de la commande : comparateurs/ sommateurs / intégrateurs / régulateurs

b). **Signaux discontinus :**

Binaire / plusieurs niveaux

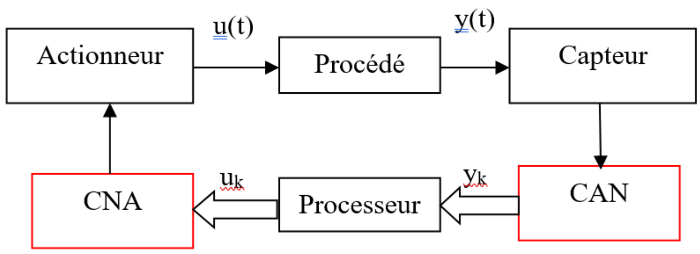
Systèmes logiques combinatoires et séquentiels / systèmes échantillonnés / commande numérique des systèmes

Méthodes : algèbre de boole/ grafcet / équation de récurrence, Z

Matérialisation : automate programmable/ calculateurs PID numérique.

La commande par calculateur La commande par un calculateur numérique ou processeur d'un processus nécessite la mise en oeuvre d'un certain nombre d'éléments.

Processeur (calculateur) qui élabore la commande et réalise l'échantillonnage, Capteur ou organe de mesure, Convertisseurs analogique-numérique et numérique-analogique.



1.4 Intérêt de la commande par calculateur

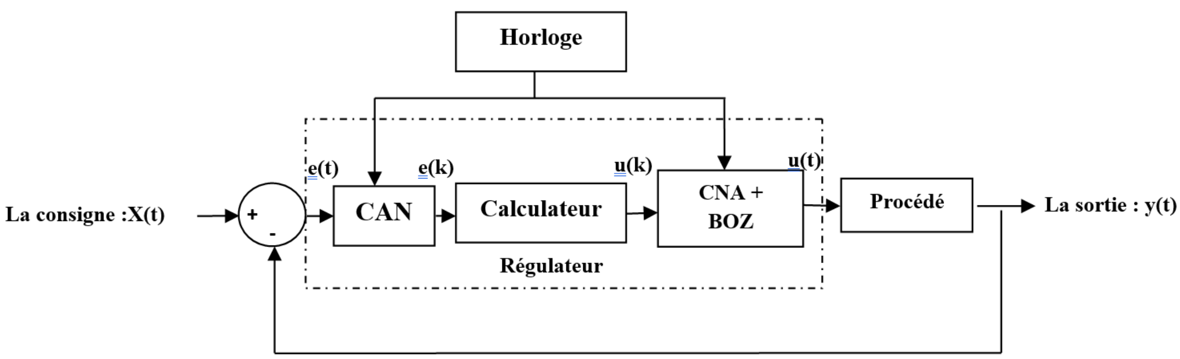
- La souplesse d'utilisation du calculateur à la place d'un correcteur analogique (machine câblé) est remarquable.
- La flexibilité de la programmation.
- Facilité d'ajustement.
- Fourni une grande précision.

Etapes de la mise en eouvre de la commande par calculateurs

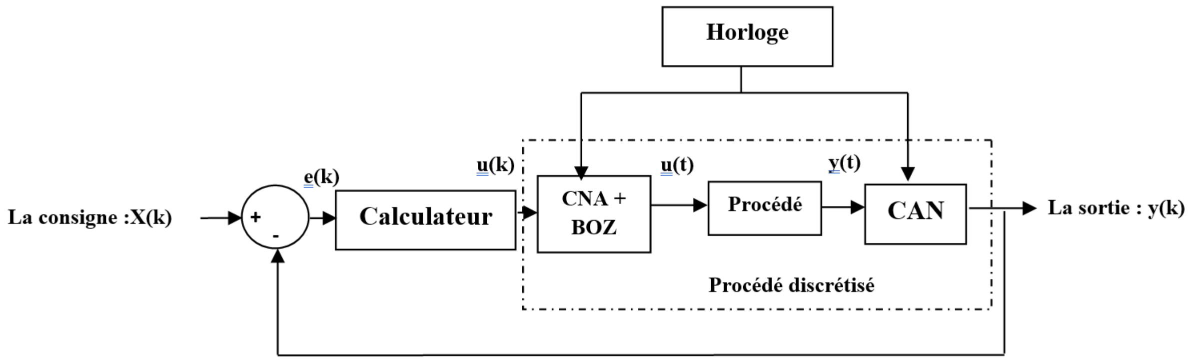
- Choisir la période de l'échantillonnage .
- Détermination du correcteur numérique à partir d'un cahier de charge. Le correcteur calcule en générale, dans le domaine fréquentiel.

Structure d'un système de commande numérique

a). Réalisation numérique d'un régulateur de type analogique.



b). Système de régulation numérique.



1.5 Introduction à la correction numérique

Le correcteur numérique est très similaire au correcteur analogique. Le correcteur est implémenté sur un calculateur numérique (micro-contrôleur, micro-processeur, ordinateur muni des cartes entrées/ sorties).

Il existe deux méthodes pour la synthèse des correcteurs numériques : La plus utilisée est la synthèse par transposition du continu au numérique (consiste à déterminer un correcteur analogique ensuite à le transformer en un correcteur numérique ayant des performances équivalentes). Ce type de méthode est très utilisé dans l'industrie.

Le deuxième type est appelé synthèse direct en numérique, elle est utilisée lorsque les modèles des procédés à asservi sont bien connus.

Plusieurs techniques de transpositions sont couramment utilisées :

- L'échantillonnage - Blocage d'ordre zéro
- La transposition d'Euler
- La transposition bilinéaire
- La transposition par conversion des pôles et des zéros

La transposition par échantillonnage-blocage consiste simplement à remplacer un système continu par un système numérique constitué du système continu précédé d'un échantillonneur et d'un bloqueur d'ordre zéro.

Remarque : Cette technique donne des résultats corrects uniquement si la période d'échantillonnage est très petite devant les temps de réponse des systèmes asservis.

1.6 Échantillonneur / bloqueur

L'échantillonnage consiste à transformer un signal analogique en un signal numérique. Un échantillonneur idéal est un contacteur qui se ferme en un temps nul, tous les Te.

Le Bloqueur d'Ordre Zéro est un convertisseur N-A, le plus utilisé en automatique, il maintien la valeur d'échantillon constante durant tout l'intervalle $t \in [nTe, (n+1)Te]$.

Sa fonction de transfert est $B_0(P) = (1 - e^{-TeP})/P$

Le circuit d'échantillonneur-bloqueur se place sur l'entrée analogique du CAN, a un double rôle :

- Acquérir une valeur donnée à un instant donné
- Maintenir cette valeur stable pendant la durée de la conversion.

Chapitre 2

Conversion Analogique numérique

2.1 Échantillonnage

2.1.1 Définition

A la période d'échantillonnage T_e nous associerons la fréquence d'échantillonnage F_e.

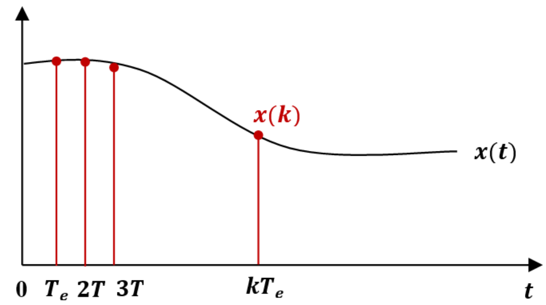
$$F_e(Hz) = 1/(T_e(s))$$

La durée de l'échantillonnage ne peut pas être nulle ; nous considérons toutefois qu'elle tend vers zéro.

L'échantillonnage d'un signal $x(t)$ à la période T_e donne une suite de terme général $x(kT_e)$; $k \in N^*$.

On peut exprimer le signal causal issu de x(t) par :

$$x(k) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\ \delta(t - k.T_e)$$



2.1.2 Choix de la fréquence d'échantillonnage (Théorème de SHANNON)

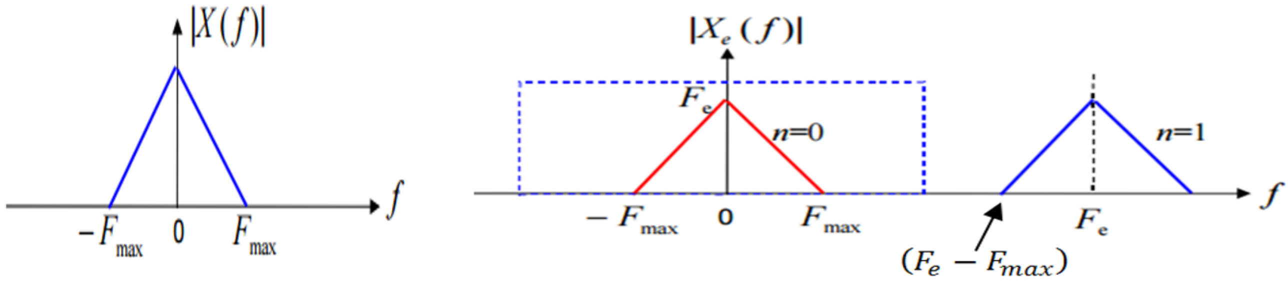


Figure 2.1: Spectre du signal échantillonné

Un des objectifs essentiels de l'échantillonnage consiste à ne pas perdre d'information lors de la discrétisation dans le temps, ce qui peut se traduire par le fait qu'il doit être possible à partir du spectre du signal échantillonné, de reconstituer simplement celui du signal original.

Théorème de SHANNON

Ce théorème énonce que pour les signaux à spectre borné ($f < F_{max}$), la fréquence d'échantillonnage doit vérifier la relation suivante :

$$F_e \geq 2.F_{max}$$

Les signaux physiquement réalisables étant causals, leur spectre n'est pas borné, le théorème de SHANNON n'est pas applicable. On prend en général comme référence la fréquence de coupure à -3dB en boucle fermée (f_c), qui définit la bande passante de l'asservissement.

La fourchette suivante est couramment admise :

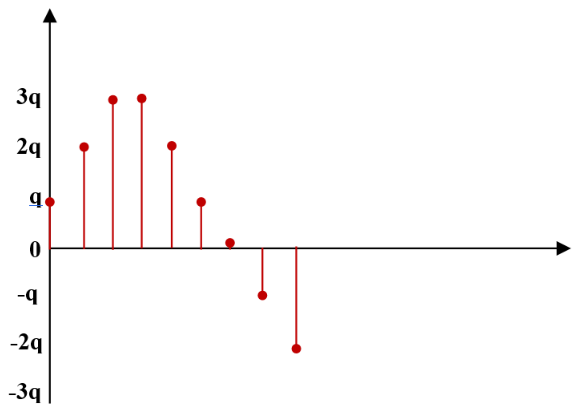
$$5.F_c \leq F_e \leq 25.F_c$$

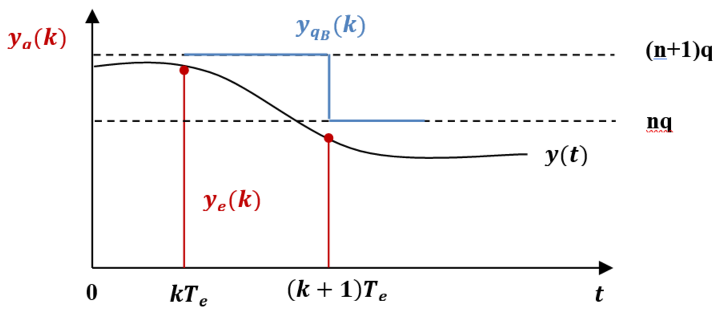
2.1.3 Filtre anti-repliement

La fréquence d'échantillonnage étant fixée, il subsiste un recouvrement du spectre (repliement), et par conséquent une distorsion pour les fréquences supérieures à $1/2\ F_c$, pour remédier à cet inconvénient les signaux doivent filtrés avant l'échantillonnage. Les filtres anti-repliement réels sont des filtres passe-bas (filtre de Bessel, Butterworth, chebyshev, et de cauer). Pour des applications qui ne nécessitent pas une grande précision, le filtre de Butterworth, donne un meilleur résultat.

2.2 Quantification

La quantification est l'approximation de la valeur instantanée du signal par la plus voisine valeur d'une suite de 2^N valeurs discrètes ; chacun des nombres ainsi définis représente un intervalle de valeur analogique appelé pas de quantification ou quantum. La quantification s'applique à des signaux échantillonnés, le signal quantifié est lui-même bloqué pendant la période d'échantillonnage.





Signal analogique $y(t) \longrightarrow$ échantillonné $y_e(k) \longrightarrow$ quantifié $y_q(k) \longrightarrow$ quantifié+bloqué $y_{q_B}(k)$.

2.3 Codage

L'opération de codage consiste à attribuer à chacun des 2^n niveaux issus de la quantification un code binaire sur n bits. Les trois procédés de codage couramment utilisé dans l'asservissement sont : codage binaire pur, codage en complément à 2, ou codage binaire réfléchi.

Travaux dirigés N 01

Exercice 1 :

En admettant la fourchette proposée pour les fréquences d'échantillonnage, donner un encadrement de la fréquence f_e d'un système du premier ordre de transmittance en boucle fermée

$$F(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

Exercice 2 :

Même question pour un système du second ordre de transmittance en boucle fermée

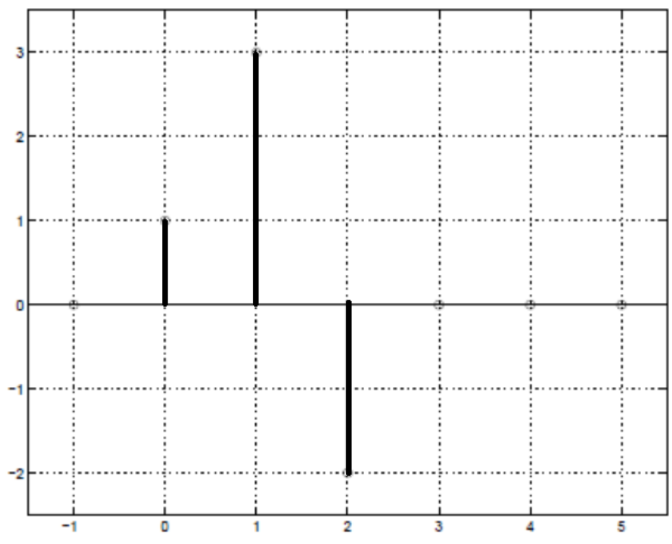
$$F(p) = \frac{1}{1 + 2.\xi.\frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

dont on attend les performances suivantes:

- Dépassement D% = 5%
- Temps de réponse à 5% = 30 ms

Exercice 3 :

Soit le signal discret de durée finie de la figure ci-dessous.



Déterminer la transformée en z du signal échantillonné ?.

Exercice 4 :

Calculer la transformée en z du signal discret $x[k]$ résultant de l'échantillonnage du signal analogique suivant

$$x(t) = e(t).(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

Exercice 5 :

Soit un signal échantillonné défini par :

$$s(k) = 1 \ \ pour \ \ 0 \leq k \leq k_0$$

$$s(k) = 0 \ \ pour \ \ k < 0 \ \ et \ \ pour \ \ k > k_0$$

Soit T_e la période d'échantillonnage. Calculer la transformée en z de ce signal.

Exercice 6:

On considère un signal échantillonné $s^*(t)$ résultant de l'échantillonnage, à une période Te, du signal défini par :

$$s(t) = sin(\omega t) \ \ pour \ \ t > 0$$

$$s(t) = 0 \ \ pour \ \ t < 0$$

Calculer la transformée en z de ce signal.

Exercice 7:

On considère un système échantillonné régi par la relation de récurrence suivante :

$$s_k = 0,5.e_{k-1} - 0.6.s_{k-1}$$

Calculer la fonction de transfert en z de ce système et déterminer la valeur finale de l'échantillon de sortie, soit $\lim s(k)$ quant $k \to \infty$ lorsque le signal d'entrée est un échelon unité.

TP N° 01 : Échantillonnage - Conversion Analogique Numérique

2.4 But de TP :

L'objectif de ce TP est de mettre en évidence l'étudier du comportement de systèmes échantillonnés ainsi les effets de l'échantillonnage et de la numérisation des systèmes continus. Ce TP s'effectuera entièrement en simulation avec Matlab et la boîte à outils Simulink.

Lorsqu'on cherche à mesurer une grandeur physique on utilise généralement un capteur pour convertir ce signal en un autre électrique qui est donc une fonction continue du temps (au sens mathématique) image des variations temporelles de la grandeur physique étudiée. Ce type de signal est qualifié d'analogique par opposition à un signal numérique.

L'opération de numérisation d'un signal présente énormément d'avantages, elle correspond à la succession de trois étapes schématisées Figure 2.2 :

-l'échantillonnage (sampling) qui permet de prélever un ensemble de valeurs (appelées échantillons) prises à des instants discrets.

-la quantification qui alloue à chacun de ces échantillons une valeur approchée (et qui correspond à une discrétisation des valeurs du signal).

-le codage qui consiste à coder en binaire sur un nombre fini de bits chaque niveau quantifié.

La quantification du signal sur la Figure 2.2 s'effectue sur 8 niveaux ce qui correspond à 3 bits.

C'est très facile de créer des signaux non périodique comme (impulsion, échelon, rampe) avec Matlab par l'utilisation des commande ***zéros*** et ***ones***.

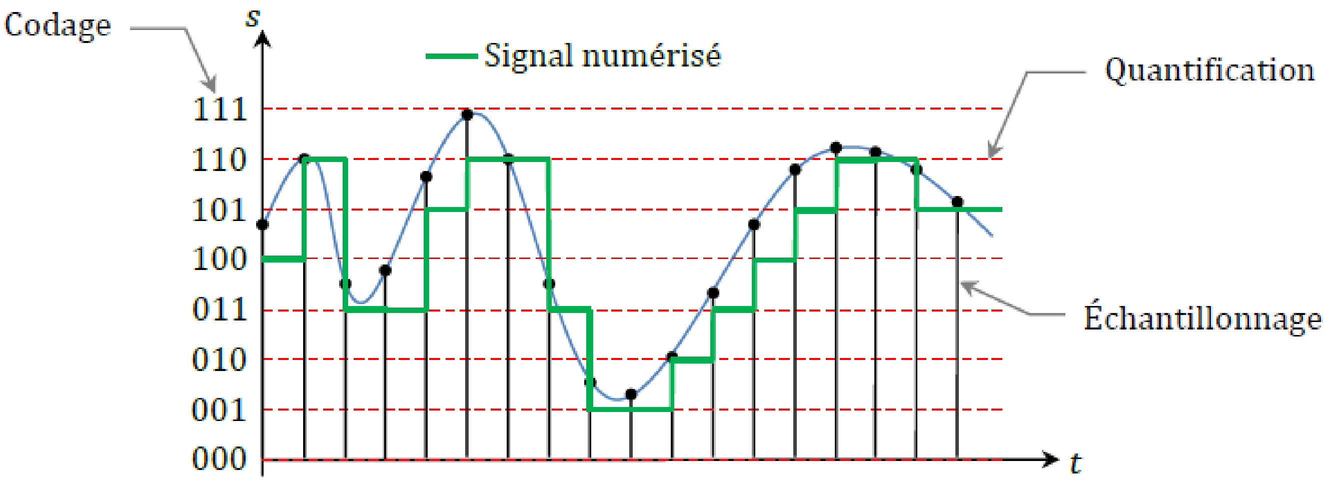


Figure 2.2: Échantillonnage, quantification et codage d'un signal

- Delta=[zeros(1,10), 1, zeros(1,10)]
- figure(1),stem(Delta)
- ramp=0:1:10;
- figure(2),stem(ramp)
- STEP=ones(1,10);
- figure(3),stem(STEP)

Exemple 1:

Tracer avec la commande "**stem**" la suite suivante :

$$x[n] = 0.8^n \quad avec \quad n = \{1, 2, , \ldots, 20\}$$

Exemple 2:

Soit le signal analogique suivant :

$$x = e^{-at}cos(2\pi t) \quad avec\ a = -4ln(0.9)$$

Tracer son signal discrétisé avec un pas d'échantillonnage Ts=0.25 s?

2.5 Effet de la période d'échantillonnage :

Exemple 3:

Soit le signal continu suivant

$$x(t) = cos(2.\pi.f.t) \quad avec \;\; f = 60hz$$

Tracer le signal échantillonné dans le cas où : $(f_e = 240hz \;\; et \;\; f_e = 1000hz)$

2.6 Réponses des systèmes régressifs

Exemple 4:

Considérons un système régressif représenté par l'équation différentielle suivante:

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n] + x[n-1]$$

Tracer la réponse impulsionnelle du système

Exemple 5:

Tracer la réponse impulsionnelle et indicielle du système désigné par l'équation de différence suivante:

$$y[n] - 1.143y[n-1] + 0.4128y[n-2] = 0.0675x[n] + 0.1349x[n-1] + 0.675x[n-2]$$

Exemple 6:

Supposons que nous avons seulement l'énergie initiale stockée dans le système (Pas de signal d'entré), et nous aimerions voir la réponse naturelle du système. Cela peut également être montré par La commande ***filtic***. Les conditions initiales sons $y[-1] = 1 \; et \; y[-2] = 2$ (le système est de second ordre)

Exemple 7:

Supposons les conditions initiales sont nulles, trouver la réponse du système précédent pour les 50 premiers échantillons si Le signal d'entrée est définit par $x[n] = sin(\pi/10.n)$.

Exemple 8:

Soit un système avec une réponse impulsionnelle connue définit par:

$$h[n] = 0.5^n.u[n]$$

Déterminer les 50 premières valeurs de sa réponse si il est excité par un échelon

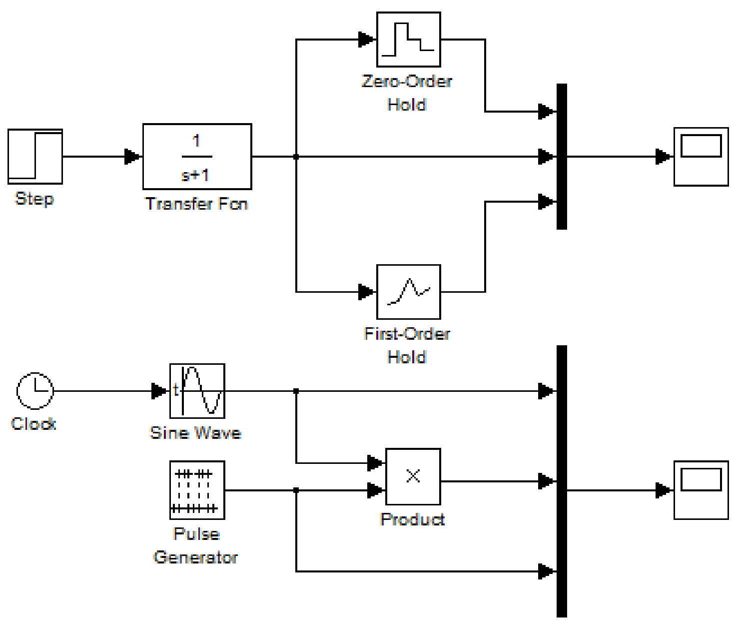
2.7 Discrétisation avec Simulink :

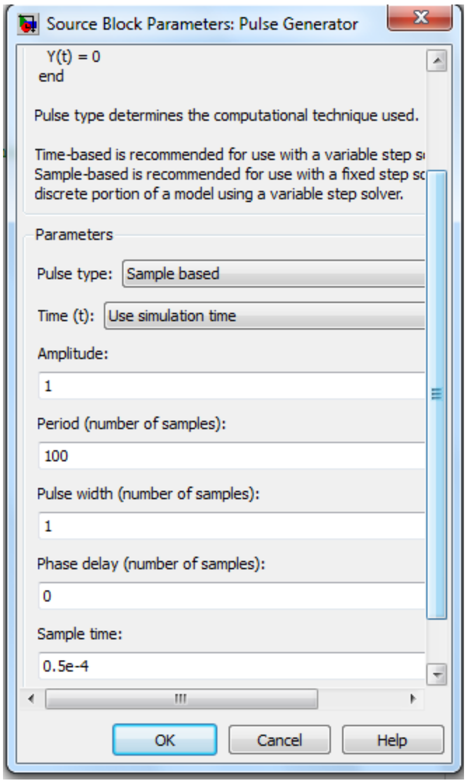
Soit un système continu défini par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{1+p}$$

On souhaite d'obtenir le modèle échantillonné de ce système, ainsi sa réponse indicielle en utilisant les deux bloquer d'ordre zéro (BOZ) et d'ordre un.

avec une période d'échantillonnage $T_e = 1s$.





2.8 Travail demandé:

Créez un fichier-m qui produit les signaux suivants.

Remarque: Utilisez les sous-tracés ou la commande pause pour séparer les signaux les uns des autres.

1- Créer une fonction d'échelon avec une amplitude de 10 qui s'apparaisse après 10.5 *secondes* ?

2- Créer une fonction d'impulsion à l'instant $t = 46\ s$ et une amplitude de 5 ?

3- Créer une fonction rampe avec une pente de 3. La rampe commence après 2.5 *secondes* ?

4- Tracer la réponse impulsionnelle et indicielle d'un système décrit par l'équation différentielle suivante:

$$y[n] - 0.85 * y[n-1] = 0.25 * x[n-1] + 0.675 * x[n-2]$$

5- Utilisez le même système précédent, Mais supposons que nous avons un autre signal d'entrée tel que $x(t) = 3.exp^{-2t} * sin(4\pi.t)$

Afficher la réponse du système en supposant que les conditions initiales sont nulles pour les 5 premières secondes.

6- Utiliser le même système mais avec des conditions initiales non nulles, $Y[-1] = 2 \;\; et \;\; y[-2] = 0$. Le signal d'entré est un échelon d'amplitude 2 et et il apparait après 5 échantillons?

Exemple 01

- n = 0:20;
- x = $0.8.^n$;
- stem(n,x,'filled','b','LineWidth',2), grid,xlabel('Time Index (n)'), ylabel('x[n]')

Exemple 02

- a =-4*log(0.9);
- Ts = 0.25;
- alpha = exp(-a*Ts);
- n = 0:30;
- $y = alpha.^n.cos(pi.n/2)$;
- t = 0:0.001:max(n)*Ts;
- x = exp(-a*t).*cos(2*pi*t);
- stem(n, y, 'r');
- hold on,plot(t/Ts, x); grid; legend('y[n]', 'x(t)'); hold off

Exemple 03

- t = 0:1/2000:.02;
- x = cos(2*pi*60*t);
- t240 = 0:1/240:.02;
- n240 = 0:length(t240)-1;
- x240 = cos(2*pi*60/240*n240);
- axis([0 4.8 -1 1])
- t1000 = 0:1/1000:.02;
- n1000 = 0:length(t1000)-1;
- x1000 = cos(2*pi*60/1000*n1000);
- stem(t240,x240,'k'),hold on stem(t1000,x1000,'r') ,plot(t,x)

Exemple 04

- a = [1 -0.5]; b = [1 1];
- d = [1 zeros(1, 99)];
- R_{imp} = filter(b, a, d);
- figure(1),stem(R_{imp})

Exemple 05

- a=[1 -1.143 0.4128];
- b=[0.0675 0.1349 0.675];
- figure(1),impz(b,a,30)
- figure(2),stepz(b,a, 30)

Exemple 06

- a=[1 -1.143 0.4128];
- b=[0.0675 0.1349 0.675];
- x=zeros(1,50);
- zi=filtic(b,a,[1, 2]);
- y=filter(b,a,x,zi);
- stem([0:49],y)

Exemple 07

- a=[1 -1.143 0.4128]
- b=[0.0675 0.1349 0.675]
- x=sin(pi/10*[0:49]);
- y=filter(b,a,x);
- stem([0:49],y)

Exemple 08

- $h = 0.5.^{[}0 : 49]$;
- x=ones(1,50);
- y=conv(x,h);
- stem([0:49],y(1:50));

Chapitre 3

Transformée en Z

3.1 Transformée en Z des signaux échantillonnés

3.1.1 Définition

Soit $S(t)$ un signal continu que l'on échantillonne à une fréquence F_e, en respectant le théorème de SHANNON. On a

$$S(k) = S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n \quad avec \quad S_n = S(kT_e)$$

Cette suite n'est rien d'autre que la somme d'impulsions unités décalées dans le temps et multipliées chacune par le coefficient S_k.

$$S(k) = S_0.\delta^*(t) + S_1.\delta^*(t - T_e) + \cdots + S_n.\delta^*(t - kT_e)$$

D'où

$$S(k) = \sum_{k=0}^{n} S_k \delta^*(t - k.T_e) = \sum_{k=0}^{n} S_k \delta_k$$

La transformée de Laplace de $S(k)$:

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^{n} S_k {\Delta_k}^*(p)$$

$${\Delta_k}^*(p) = \int_0^{+\infty} {\delta_k}^*(t) e^{-pt} dt$$

$${\Delta_k}^*(p) = {\Delta_0}^*(p) e^{-pkT_e}$$

Avec

$${\Delta_0}^*(p) = \int_0^{+\infty} {\delta_0}^*(t) e^{-pt} dt = 1$$

Alors

$${\Delta_k}^*(p) = e^{-pkT_e}$$

D'où

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^{n} S_k e^{-pkT_e}$$

En posant $z = e^{pT_e}$, on définit la transformée en z d'un signal $S(t)$ par :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n} S_k z^{-k}$$

La transformée en Z d'un signal n'existe pas que si la somme qui la définit converge.

3.2 Propriétés de la transformée transformée en Z des signaux échantillonnés

3.2.1 Linéarité

Soit $S_1(t)$ et $S_2(t)$ deux signaux possédant chacun une transformée en Z : $S_1(z)$ et $S_2(z)$. La transformée en Z d'une combinaison linéaire $\lambda S_1(t)+\mu S_2(t)$ est égale à $\lambda S_1(z)+\mu S_2(z)$.

3.2.2 Théorème de retard

Soit s(t) un signal possédant une transformée en Z, et soit $x(t) = s(t - aT_e)$.

$x(t)$ correspondant au même signal retardé d'un temps aT_e La transformée en Z de $x(t)$ est égale à $X(z) = z^{-a}S(z)$.

3.2.3 Théorème de la valeur finale

soit $s(t)$ un signal possédant une transformée en Z, et soit s_k la suite échantillonnée correspondant au signal $s(t)$. Le théorème de la valeur finale permet de connaitre la valeur vers laquelle tend la suite s_k lorsque $k \longrightarrow \infty$, autrement dit lorsque $t \longrightarrow \infty$

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{z\to 1}[(1 - z^{-1})S(z)]$$

3.2.4 Multiplication par le temps

soit $s(t)$ un signal possédant une transformée en Z, soit $x(t)$ le signal défini par $x(t) = t.s(t)$. Alors :

$$X(z) = -zT_e \frac{dS(z)}{dz}$$

3.2.5 Changement d'échelle

Soit s_k la suite échantillonnée correspondant au signal $s(t)$, et soit x_k la suite d'échantillons définie par : $x_k = a^k s_k$avec $a \neq 0$ Alors :

$$X(z) = S(\frac{z}{a})$$

3.3 La Transformée en Z des signaux usuels

3.3.1 Impulsion unité

L'impulsion unité étant définie par :

$$\begin{cases} \delta_k = 1 \quad pour \quad k = 0 \\ \delta_k = 0 \quad pour \quad k \neq 0 \end{cases}$$

On a

$$\Delta(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k . z^{-k} = \mathbf{1}$$

3.3.2 Echelon unité

L'échelon unité étant défini par $u_k = 1$ pour $k \geq 0$

On a :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

3.3.3 Rampe unité

La rampe unité est défini par $v(t) = t.u(t)$, en utilisant la propriété de multiplication par le temps, on obtient :

$$V(z) = -zT_e \frac{dU(z)}{dz} = -zT_e \frac{d(\frac{z}{z-1})}{dz} = \frac{zT_e}{(z-1)^2}$$

3.3.4 Exponentielle décroissante

Soit $s(t) = e^{-at}$ pour $t \geq 0$.

La transformée en z de ce signal :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-akT_e} z^{-k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{aT_e}.z}} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

3.4 Méthodes de calcul de la TZ

Il est rare qu'il soit nécessaire de calculer la transformée en z selon la formule $S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_k z^{-k}$. En général, on dispose de tables où les transformées en z d'un certain nombre de signaux de base sont données. Un signal ne figurant pas dans la table peut souvent s'exprimer par une combinaison linéaire de signaux élémentaires dont les transformées sont alors dans la table.

3.5 Inversion de la transformée en z

On examine ici deux méthodes souvent utilisées pour inverser la transformée en z d'un signal discret.

3.5.1 Décomposition en éléments simples

L'inversion de la transformée en z s'effectue le plus souvent à l'aide de tables. La transformée à inverser doit être décomposée en éléments simples à l'aide de l'usage du théorème des résidus.

Exemple : Soit la transformée en z d'un signal discret $x[k]$:

$$X(z) = \frac{0.1z(z+1)}{(z-1)^2(z-0.6)}$$

Avec $T_e = 1s$, on peux écrire

$$X(z) = \frac{a.z}{(z-1)} + \frac{b.z}{(z-1)^2} + \frac{c.z}{(z-0.6)}$$
$$X(z) = \frac{-z}{(z-1)} + \frac{0.5z}{(z-1)^2} + \frac{z}{(z-0.6)}$$

D'après la table de la transformée en z :

$$x[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = (-1 + 0.5kT_e + 0.6^k)u(k)$$

3.5.2 Inversion par division polynomiale

Soit $X(z)$ la transformée en z d'un signal discret $x(k)$

$$X(z) = \frac{0.1z(z+1)}{(z-1)^2(z-0.6)}$$

$$X(z) = \frac{0.1z^2 + 0.1z)}{z^3 - 2.6z^2 + 2.2z - 0.6}$$

On effectue la division formelle :

$$\begin{array}{l|l}
0.1z^2 + 0.1z & z^3 - 2.6z^2 + 2.2z - 0.6 \\ \hline
0.1z^2 - 0.26z + 0.22 - 0.06z^{-1} & 0.1z^{-1} + 0.36z^{-2} + 0.716z^{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0.716\ldots\ldots &
\end{array}$$

Ce qui donne directement les valeurs des échantillons cherchés :

$x(0) = 0, x(1) = 0.1, x(2) = 0.36, x(3) = 0.716, \ldots$

$u_0 = 1$ $u_n = 0$ si $n > 0$	1	$\mathbb{C}$
$u_k = 1$ $u_n = 0$ si $n \neq k$	z^{-k}	$\mathbb{C}^*$
1	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > a$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > a$
$\cos(\omega n)$	$\frac{z^2 - z\cos(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega n)$	$\frac{z\sin(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega n)$	$\frac{z^2 - az\cos(\omega)}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2}$	$\lvert z\rvert > a$
$a^n\sin(\omega n)$	$\frac{az\sin(\omega)}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2}$	$\lvert z\rvert > a$

3.6 Objectif de TP

L'objectif de ce TP est de mettre en évidence la transformée et la transformée en z inverse des systèmes échantillonnées, ainsi les réponses des systèmes discrets. Ce TP s'effectuera entièrement en simulation avec Matlab.

3.7 Transformé en z et son inverse

Le calcul du transformée en Z avec les fonction MATLAB est similaire à celui de Laplace, par l'utilisation des symboles toolbox MATLAB.

Transformée en z

Calculer la transformée en Z des fonctions suivantes:

$h1[n] = 0.9u[n]$

$h2[n] = u[n] - u[n-10]$

$h3[n] = cos(\omega_0 n)u[n]$

Transformée en z inverse

Calculer la transformée inverse en Z du système défini par:

$$G(z) = \frac{z(z+1)}{(z+0.5)(z-0.5)}$$

3.8 Discrétisation d'un système continu

3.8.1 Transmittance échantillonnée

Soit le système continu décrit par sa fonction de transfert suivante:

$$G(p) = \frac{p+2}{p^2+p+10}$$

Représenter la tansmittance échantillonnée G(z) par l'utilisation de la commande ***tf*** et ***flit***, sachant que la période d'échantillonnage $T_e = 0.1s$

3.8.2 Discrétisation d'un système

Reprenons le même système défini par

$$G(p) = \frac{p+2}{p^2+p+10}$$

nous allons discrétiser celle-ci par la transformée en z en utilisant un bloqueur d'ordre zéro ***BOZ***.

La formulation théorique et les résultats attendus sont les suivants :

$$Z[(\frac{1-e^{-Te.p}}{p}).\frac{p+2}{p^2+p+10}] = \frac{0.1032z - 0.08431}{z^2 - 1.81z + 0.9048}$$

Remarques:

1- Il faut indiquer à la fonction ***c2d*** la méthode de discrétisation utilisée. Ici, **zoh** spécifie l'utilisation d'un bloqueur d'ordre zéro (zero order hold).

2- On utilise la commande ***d2c***, pour faire le passage d'un système discret au celle continu.

3-Pour accéder au gain, aux zéros et aux pôles d'un système discret il faut utiliser la fonction ***zpkdata***.

3.8.3 Analyse temporelle et fréquentielle des systèmes discrets

Les principales fonctions permettant de tracer les réponses temporelle et fréquentielle d'un système discret sont:***impulse,step lsim,bode,nyquist,nichols***.

3.9 Travail demandé

1) Trouver par deux méthodes la transformée en Z inverse des systèmes suivants :

$$G(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{1}{(1-0.9z^{-1})^2(1+0.9z^{-1})}$$

$$F(z) = \frac{1+0.4\sqrt{2}z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}}$$

2) Soit le système causal suivant:

$$y(k) = 0.9y(k-1) + x(k)$$

a- Trouver la transmittance en z et illustrer ces pôles?

b-Tracer $|H(e^{j\omega})|$ et $arg(H(e^{j\omega}))$?

c-Déterminer sa réponse impulsionnelle ?

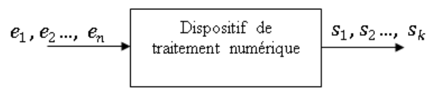
Chapitre 4

Systèmes échantillonnés

4.1 Fonction de transfert en z

4.1.1 Rrelation entre échantillons de sorite et d'entrée

On considère un système de traitement numérique à l'entrée du quel on injecte un signal échantillonné représenté par une suite de nombre e_k. Soit s_k la sortie du système.



Il est évident d?exprimer l?échantillon de sortie s_k à un instant quelconque kT_e en fonction des échantillons d?entrée.

Dispositif de type MA en temps réel

Les dispositifs de traitement numérique les plus simples sont décrits par une relation de type

$$s_k = \sum_{i=0}^{p} a_i e_{k-i}$$

Ces types de dispositifs sont appelés systèmes MA (Moving Average) c-à-d moyenne mobile. L?échantillon de la sortie à l?instant kT_e est calculé en temps réel, car il dépend uniquement aux échantillons d?entrée passés.

Dispositif de type ARMA

Dans les dispositifs de type ARMA (auto-regressive and moving average), l?échantillon de sortie à l?instant k est connu à partir d?échantillons d?entrée précédents et des q échantillons de sortie précédents.

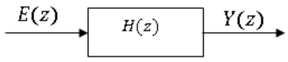
$$s_k = \sum_{i=-m}^{p} a_i e_{k-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j s_{k-j}$$

Dans le cas où la sortie s_k peut être calculée uniquement à partir de q échantillons de sortie précédents et du seul échantillon e_k, on a affaire à un modèle récurrent par type AR

$$s_k = a_0 e_k + \sum_{j=1}^{q} b_j s_{k-j}$$

4.2 Fonction de transfert en z (Transmittance échantillonnée)

Considérons un système régi par une équation de type ARMA. Soit $E(z)$ et $S(z)$ la transformée en z du signal d?entré et de sortie. On appelle la transmittance échantillonnée du système le rapport $H(z) = Y(z)/E(z)$



Remarque : pour obtenir rapidement la fonction de transfert en z à partir d?une équation MA ou ARMA, il suffit de remplacer chaque e_{k-i} et s_{k-i} respectivement par $z^{-i}E(z)$ et $z^{-j}S(z)$. L?équation

$$s_k = \sum_{i=-m}^{p} a_i e_{k-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j s_{k-j}$$

Donc on peut écrire

$$S(z) = \sum_{i=-m}^{p} a_i z^{-i} E(z) + \sum_{j=1}^{q} b_j z^{-j} S(z)$$

4.2.1 Exemple de transmittance échantillonnée

Système MA en temps réel

On considère un système régi par l?équation

$$s_k = \sum_{j=0}^{q} a_i e_{k-i}$$

La transmittance échantillonnée

$$S(z) = \sum_{i=0}^{p} a_i z^{-i} E(z)$$

$$G(z) = a_0 + a_1 z^{-1} E(z) + \dots a_p z^{-p}$$

Système AR en temps réel On considère un système régi par l?équation

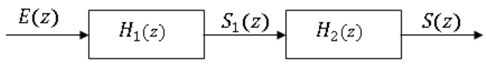
$$s_k = a_0 e_k + \sum_{j=1}^{q} b_j s_{k-j}$$

On déduit immédiatement la fonction de transfert en z :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{a_0}{1 - \sum_{j=1}^{q} b_j z^{-j}} = \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_q z^{-q}}$$

4.2.2 Transmittance en cascade

Soit deux transmittance $H_1(z)$ et $H_2(z)$ placées en cascade.

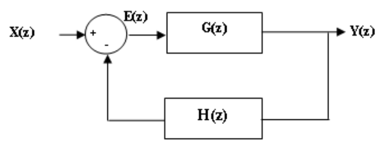


On a $S(z) = S_1(z).H_2(z) = E(z).H_1(z).H_2(z)$

La transmittance du système est donc $H_1(z).H_2(z)$

4.2.3 Boucle ouverte et fermée

Soit le système bouclé représenté ci-dessous, avec un retour de transmittance $H(z)$. La transmittance en BF est donnée par : $F(z) = Y(z)/X(z)$, où



$$E(z) = X(z) - Y(z).H(z) \rightarrow X(z) = E(z) + Y(z).H(z)$$

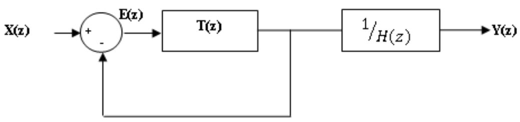
$$G(z) = Y(z)/E(z) = \frac{Y(z)}{X(z) - Y(z).H(z)} \rightarrow Y(z) = G(z).E(z)$$

Alors

$$F(z) = Y(z)/E(z) = \frac{Y(z)}{E(z) + Y(z).H(z)} = \frac{G(z).E(z)}{E(z) + G(z).E(z).H(z)} = \frac{G(z).E(z)}{E(z)(1 + G(z).H(z))}$$

$$F(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z).H(z)} = \frac{T(z)}{1 + T(z)}.\frac{1}{H(z)}$$

Avec $T(z) = G(z).H(z)$



4.3 Relation entre les modèles à temps continu et à temps discret

4.3.1 Équivalence à la dérivée

Une fonction de transfert en temps continu est issue d?une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette équation est formée de dérivées successives des signaux d?entrés et de sortie. Un des moyens les plus simples est de considérer que la variation dx/dt correspond à la variation du signal entre deux échantillons :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

Cette équivalence est d?autant plus vraie que la fréquence est grande.

On a :

$$Z\{\frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}\} = \frac{1}{T_e}X(z)(1 - z^{-1})$$

et

$$p\{\frac{dx}{dt}\} = pX(p)$$

Par conséquent, l?équivalence naturelle entre une fonction de transfert continu en p et sa fonction de transfert échantillonnée en z est :

$$p \to \frac{(1 - z^{-1})}{T_e}$$

4.4 Comparaison fréquentielle des deux modèles

Il est relativement aisé de constater après transformation que les fonctions de transfert en fréquence ne sont pas égales :

$$G(p) \rightarrow G(j\omega \;\; avec \;\; p = jw$$

$$G(Z) \rightarrow G(j\omega \;\; avec \;\; p = e^{j\omega T_e}$$

La transformation $p \rightarrow \frac{(1-z^{-1})}{T_e}$ va donc se traduire par $p \rightarrow \frac{(1-e^{-j\omega T_e})}{T_e}$

Il est clair que $\frac{(1-e^{-j\omega T_e})}{T_e} \neq j\omega$, mais pour des valeurs faibles de fréquence $\omega/2\pi$ on peut écrire $\frac{(1-e^{-j\omega T_e})}{T_e} \approx \frac{(1-(1-j\omega T_e))}{T_e} = j\omega$

Nous conclurons que le modèle échantillonné censé être équivalent au modèle à temps continu en utilisant l?équivalence à la dérivation est relativement correct pour les basses fréquences.

4.4.1 Equivalence à l?intégration

Cette équivalence propose une correspondance plus précise que l?équivalence à la dérivée, elle est appelée aussi transformation bilinéaire.

$$p \rightarrow \frac{2(1+z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}$$

Chapitre 5

Stabilité et performances des systèmes échantillonnés

5.1 Stabilité des systèmes discrets asservis

5.1.1 Stabilité des systèmes discrets asservis

Un système à temps discret est stable si : à une entrée finie doit correspondre une sortie finie.

Soit la transmittance échantillonnée :

$$H(z) = \frac{a_0 \prod_{i=1}^{p}(1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^{q}(1 - p_j z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_p z^{-p}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_q z^{-q}}$$

Les z_i et $p_j$sont les zéros et les pôles de la transmittance respectivement.

Un système linéaire échantillonné est stable si tous ses pôles sont situés dans le plan complexe à l'intérieur du cercle de rayon unité.

$$\mid p_i \mid < 1$$

Exemple :

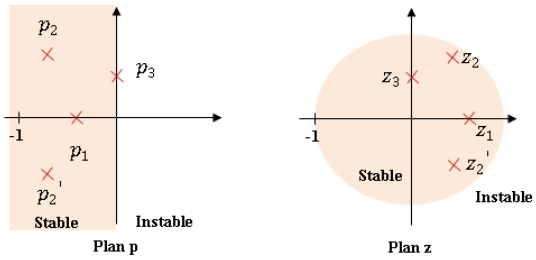
Pour $T_e = 1s$, on a $z_i = e^{p_i}$

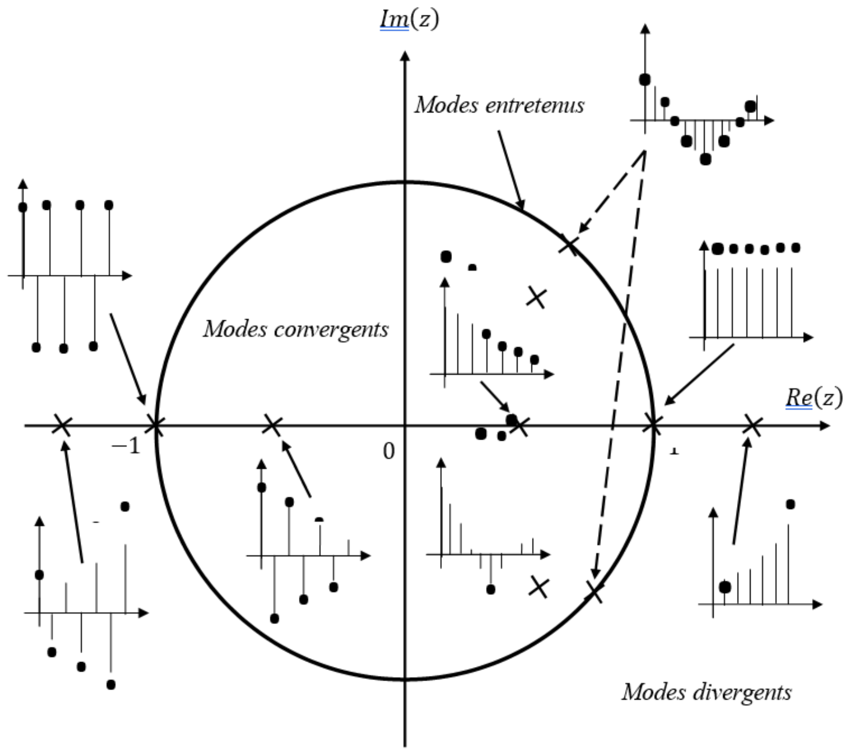
$z = a + jb = \mid z \mid e^{j\theta} = \mid z \mid cos(\theta) + \mid z \mid jsin(\theta)$

$p_1 = -0.5 \longrightarrow z_1 = e^{-0.5} = 0.6$

$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + j) \longrightarrow z_2 = 0.37 + j0.31$ et $\bar{p_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - j) \longrightarrow \bar{z_2} = 0.37 - j0.31$

$p_3 = 0.5j \longrightarrow z_3 = e^{0.5j} = 0.87 - j0.47$





5.2 Stabilité d'un système bouclé (Analyse en boucle fermé)

5.2.1 Critère de Jury

Il existe un critère algébrique dit de Jury, permet de diagnostiquer la stabilité d'un système sans avoir à calculer ses pôles. Il ressemble beaucoup au critère de Routh.

Enoncé de critère

Soit un système échantillonné bouclé, sa transmittance en boucle fermé est :

$$H(z) = \frac{z^q(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_p z^{-p})}{b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \cdots + b_q} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Remarque : Il faut s'arranger pour que b_0 soit positif. A partir du dénominateur de

H(z) ainsi placé sous la forme d'un polynôme en z, on construit un tableau similaire à celui de critère de Routh, de la manière suivante :

$$
\begin{array}{cccccc}
 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_q \\
- & b_q & b_{q-1} & b_{q-2} & \cdots & b_0 \\
 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{q-1} \\
 & c_{q-1} & c_{q-2} & c_{q-3} & \cdots & c_0
\end{array}
$$

Avec :

$$c_j = b_0 b_j - b_q b_{q-j}$$

La 5ème ligne est calculée à partir des 2 lignes précédentes :

$$d_j = c_0 c_j - c_{q-1} c_{q-j-1}$$

Le système est stable si toutes les conditions suivantes sont réunies simultanément :

$$
\begin{cases}
D(1) > 0 \\
D(-1) > 0 \text{ si n est pair sinon } D(-1) < 0 \\
b_0 > \mid b_q \mid \\
\mid c_0 \mid > \mid c_{q-1} \mid \\
\mid d_0 \mid > \mid d_{q-2} \mid \\
\vdots \\
\mid x_0 \mid > \mid x_2 \mid
\end{cases}
$$

Exemple

Soit $H(z)$ la transmittance en BF d'un système discret asservis :

$$H(z) = \frac{1}{(z-(1-k))(z^2 - kz + 0.5)}$$

Avec $k > 0$, déterminer les conditions de stabilité du système.

On a : $D(z) = z^3 - z^2 + (0.5 + k - k^2)z + 0.5(k-1)$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & -1 & 0.5 + k - k^2 & 0.5(k-1) \\
0.5(k-1) & 0.5 + k - k^2 & -1 & 1 \\
c_0 & c_1 & c_2 &
\end{array}
$$

Avec

$c_0 = 1^2 - (0.5(k-1))^2$

$c_1 = -1 - (0.5(k-1))(0.5 + k - k^2) = 0.25k^2 - 0.5k - 0.75$

$c_2 = +(0.5 + k - k^2) + 0.5(k-1) = -k^2 + 1.5k$

Critère de Jury :

- $b_0 >\mid b_q \mid$

  $1 > 0.5(k-1) \longrightarrow 1 > 0.5k - 0.5 \longrightarrow 0 < k < 3$

- $\mid c_0 \mid>\mid c_{q-1}$

  $1 - (0.5(k-1))^2 > c_2 \longrightarrow 0.75k^2 - k + 0.75 > 0$ Toujours vérifié car $\Delta > 0$

- $D(1) > 0$

  $1.5k - k^2 > 0 \longrightarrow 0 < k < 1.5$

- $D(-1) < 0$

  $(k+1.5)(k-2) < 0 \longrightarrow -1.5 < k < 2$

d'où la stabilité du système est pour $0 < k < 1.5$

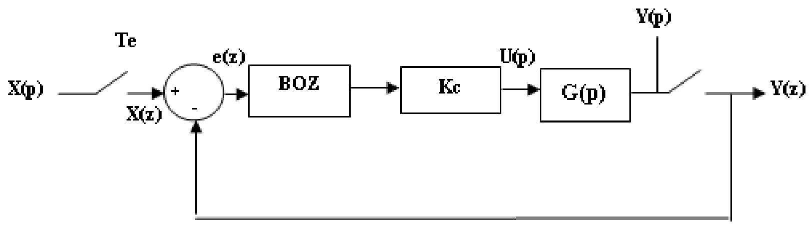
5.2.2 Transformation en w

Critère de Routh

Il est possible d'utiliser le critère de Routh pour étudier la stabilité des systèmes à temps discret, il suffit d'effectuer un changement de variable $w = (z-1)/(z+1)$, et puis d'appliquer le critère de Routh sur l'équation $D(w) = 0$

5.3 Analyse en boucle ouverte

L'analyse de la stabilité par le module des pôles de la transmittance en BF ne permet que l'établissement de la limite de stabilité du système. Il est toutefois intéressant de définir une marge de stabilité. Ce type d'étude est conduit en BO, mais la présence BOZ pose des problèmes liés au passage de la variable z au $j\omega$. Nous envisageons 3 méthodes d'analyse



5.3.1 Approximation de BOZ

Si on utilise l'approximation suivante

$$BOZ(p) \approx e^{-(T_e p)/2}$$

alors on peut écrire $H(p) = \frac{Y(p)}{e(p)} = e^{-T_e p/2}.G(p) = e^{\frac{-j\omega T_e}{2}}.G(p)$

$\mid H(j\omega) \mid = \mid G(j\omega) \mid$

$arg(H(j\omega)) = -\frac{\omega T_e}{2} + arg(G(j\omega))$

Le système dans ce cas la peut alors être représenté par les diagrammes de Bode et Black.

5.3.2 Utilisation de la transformée en w

on peut utiliser la transformation suivante:

$$w = \frac{z-1}{z+1} \longrightarrow w(j\omega) = \frac{e^{j\omega T_e} - 1}{e^{j\omega T_e} + 1} = jtan(\frac{\omega Te}{2})$$

On introduit une nouvelle variable $V = tan((\omega T_e)/2) \longrightarrow w = jV$ (pulsation fictive) On utilisera V pour une représentation de type diagramme de Bode / Black.

5.4 Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité

A partir d'un simple exemple, nous montrons que la stabilité d'un système discret peut être grandement influencée par le choix de T_e. Soit le système :

$$G(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$$

la transformée en z de G(p) est donnée par:

$$G(z) = \frac{k(1 - e^{-T_e/\tau})}{z - e^{-T_e/\tau}}$$

alors

$$H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{k(1-e^{-T_e/\tau})}{z - e^{-T_e/\tau} + k(1-e^{-T_e/\tau})}$$

Le système continu $H(p)$ est toujours stable, par contre le système échantillonné n'est pas toujours vérifier la stabilité. En effet, $H(z)$ possède un pôle dont le module est susceptible d'être supérieur à 1.

$$p = k(e^{-T_e/\tau} - 1) + e^{-T_e/\tau}$$

Le système sera stable si :

$$\mid k(e^{-T_e/\tau} - 1) + e^{-T_e/\tau} \mid < 1 \longrightarrow T_e < \tau ln \frac{1+k}{1+k}$$

La période d'échantillonnage doit donc être inférieur à une valeur qui dépend des paramètres du système.

5.5 Précision des systèmes échantillonnés

5.5.1 Définition

Sur le même principe que dans les asservissements analogiques, la précision d'un asservissement échantillonné est caractérisée par la différence entre la sortie commandée $x(kT)$ et la sortie réelle $y(kT)$.

5.6 Précision et rapidité des systèmes discrets

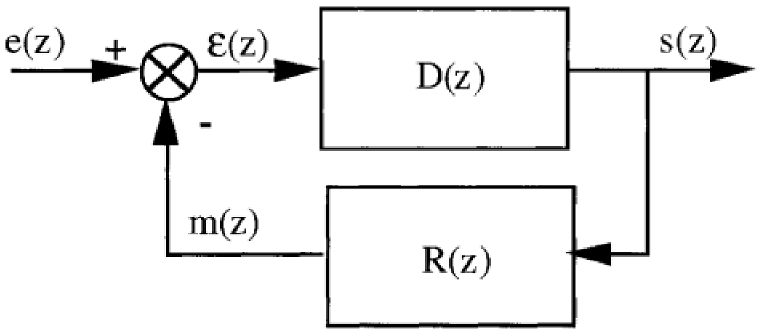
Nous nous proposons de donner dans ce paragraphe quelques notions sur la précision des systèmes à temps discret en régime établi aux instants d'échantillonnage ; ces notions ne sont que des extensions de celles concernant les systèmes continus.

5.6.1 Constantes d'erreur

Soit un asservissement à temps discret, représenté en z.

$$H_{bo} = D(z).R(z) =$$

$$\epsilon(z) = \frac{e(z)}{1+H_{bo}(z)} =$$



Sollicité par une commande, il présentera après disparition du régime transitoire une erreur statique permanente, obtenue à partir de :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \epsilon(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \epsilon(nT) = \lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)\frac{e(z)}{1+H_{bo}(z)} =$$

L'erreur permanente dépend de la forme de l'entrée et évidemment de celle de la fonction de transfert du système échantillonné étudié. Pour calculer cette erreur, il est intéressant d'introduire la notion de constante d'erreur, liée à l'ordre de l'entrée appliquée.

Considérons les entrées-test classiques de la forme :

$$e(t) = e_0 \frac{t^m}{m!}\Gamma(t)$$

On peut calculer ces constantes pour les quelques entrées canoniques couramment utilisées :

Échelon de position (m = 0) :

$$e_p(z) = e_0 \frac{z}{z-1}$$

$$\epsilon_p(\infty) = \lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)\frac{e_0 z}{z-1}\frac{1}{1+H_{bo}(z)} = \lim_{z \longrightarrow 1} \frac{e_0}{1+H_{bo}(z)} = \frac{e_0}{k_p}$$

la constante d'erreur de position est telle que :

$$k_p = \lim_{z \longrightarrow 1} [1 + H_{bo}(z)]$$

Échelon de vitesse (m = 1) :

$$e_v(z) = e_0 \frac{T_e z}{(z-1)^2}$$

$$\epsilon_v(\infty) = \lim_{z \longrightarrow 1} \frac{e_0 T_e}{(z-1)[1+H_{bo}(z)]} = \frac{e_0 T_e}{k_v}$$

et:

$$k_v = \lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)[1 + H_{bo}(z)]$$

Échelon d'accélération (m = 2) :

$$e_a(z) = e_0 \frac{T_e^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$\epsilon_a(\infty) = \lim_{z \longrightarrow 1} \frac{e_0 T_e^2}{(z-1)^2[1 + H_{bo}(z)]} = \frac{e_0 T_e^2}{k_a}$$
$$k_a = \lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)^2[1 + H_{bo}(z)]$$

Généralisation à une entrée d'ordre m quelconque

D'après ce qui précède, on voit qu'à une entrée :

$$e_m(t) = e_0 \frac{t^m}{m!} \Gamma(t)$$

correspondra une constante d'erreur :

$$k_m = \lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)^m [1 + H_{bo}(z)]$$

et une erreur :

$$e_m(\infty) = e_0 \frac{T_e^m}{k_m}$$

Remarque : Les signaux d'entrée d'ordre très élevé sont rares : par contre, une entrée quelconque peut être décrite par un polynôme d'ordre élevé, tel que :

$$e(t) = \alpha\Gamma(t) + \beta t\Gamma(t) + \gamma \frac{t^2}{2}\Gamma(t) + \cdots + \lambda \frac{t^m}{m!}\Gamma(t)$$

Le système étant linéaire, l'erreur résultante sera la somme des erreurs constatées pour chaque type d'entrée.

Les constantes d'erreur que nous venons de déterminer dépendent en particulier de l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système étudié.

Celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$H_{bo}(z) = \frac{K.P(z)}{(z-1)^n Q(z)}$$

où : $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes en z qui ne possèdent pas de racines égales à 1 et qui tendent vers une constante quand z tend vers 1. De plus, $P(z)$ est de degré au plus égal à celui du dénominateur de la transmittance en boucle ouverte considéré.

n représente le nombre de pôles égaux à 1 de la fonction considérée (n joue un rôle équivalent au nombre d'intégrations de $H_{bo}(p)$ des systèmes continus).

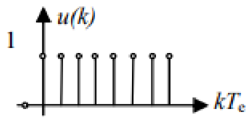
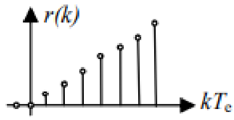
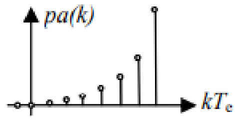
La valeur de la constante d'erreur, et donc de l'erreur, dépend des valeurs relatives de m et de n.

En particulier, si $m = n$:

$$k_m = \lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)^m [1 + \frac{K.P(z)}{(z-1)^n Q(z)}]$$

k_m tend vers une constante non-nulle.

Selon l'ordre de l'entrée appliquée au système étudié et le nombre de pôles égaux à 1 de sa fonction de transfert en boucle ouverte, on peut établir le tableau d'erreurs statiques ci-dessous :

Classe du Système ≡ Nbre d'integration	Echelon 	Rampe 	Parabole 
	Erreur de position : ε_p	Erreur de vitesse : ε_v	Erreur d'accélération : ε_a
0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
1	0	$\frac{T_e}{K}$	∞
2	0	0	$\frac{2T_e^2}{K}$
3	0	0	0

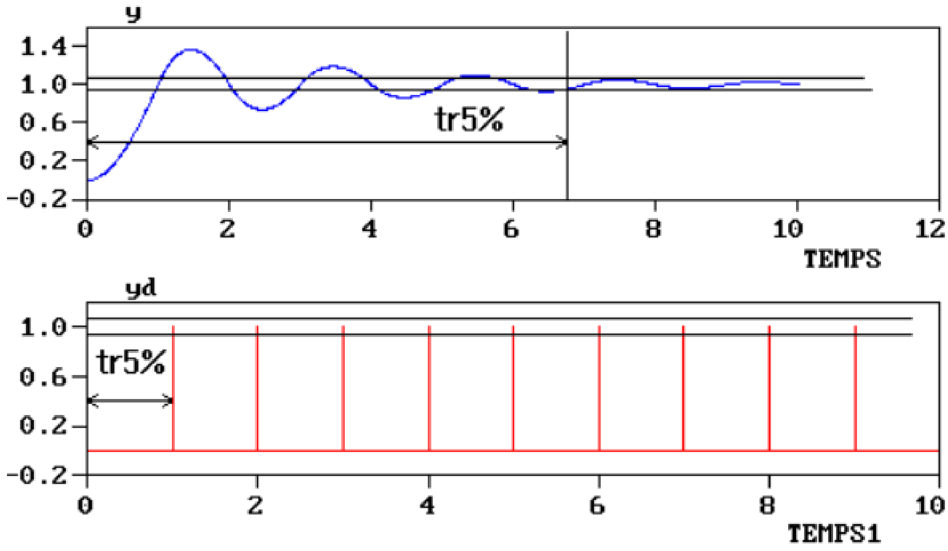
Conséquences :

5.7 Rapidité

5.7.1 Définition

La rapidité d'un système discret peut être définie par analogie avec la rapidité des systèmes continus. elle permet d'estimer le temps de réaction du système à différentes excitations.

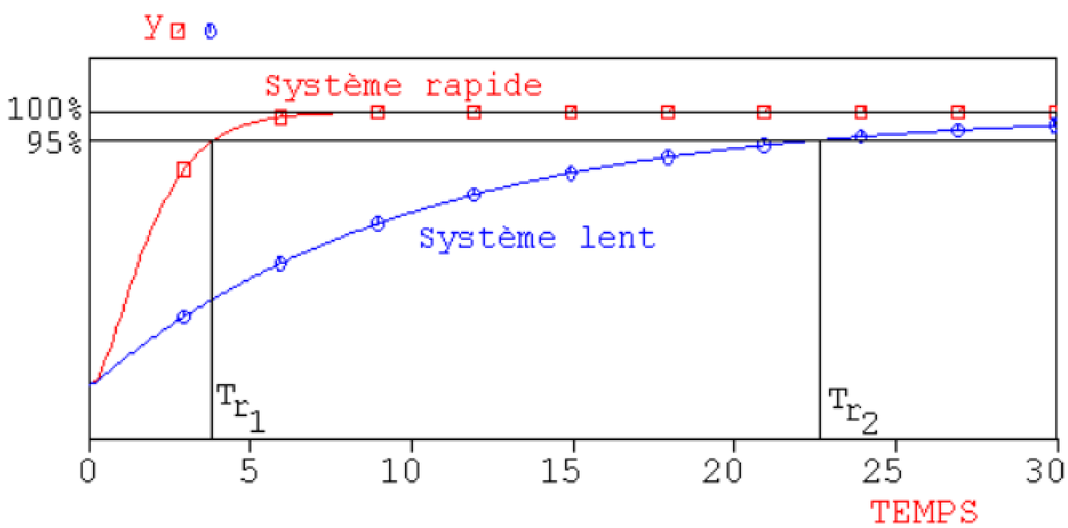
Relation qualitative entre la rapidité et la réponse indicielle



La présence des oscillations cachées rend impossible une estimation correcte de la rapidité d'un système échantillonné à partir des valeurs de sa réponse indicielle aux instants d'échantillonnage.

Sur les réponses échantillonnées, certains paramètres graphiques comme le dépassement, le temps de réponse, la période propre, etc., sont mesurables avec une précision suffisante seulement pour des valeurs très faibles de la période d'échantillonnage, comparées aux constantes de temps du système à échantillonner.

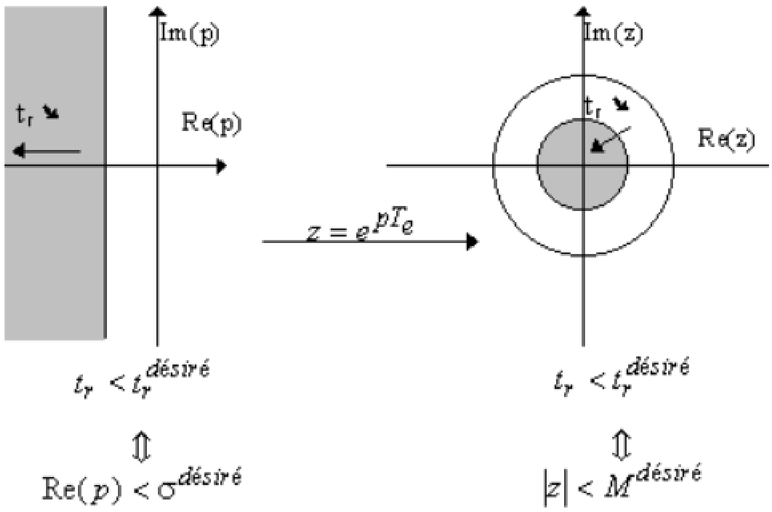
Pour les systèmes discrets, les réponses sont d'autant plus rapides que les modules des pôles sont faibles.



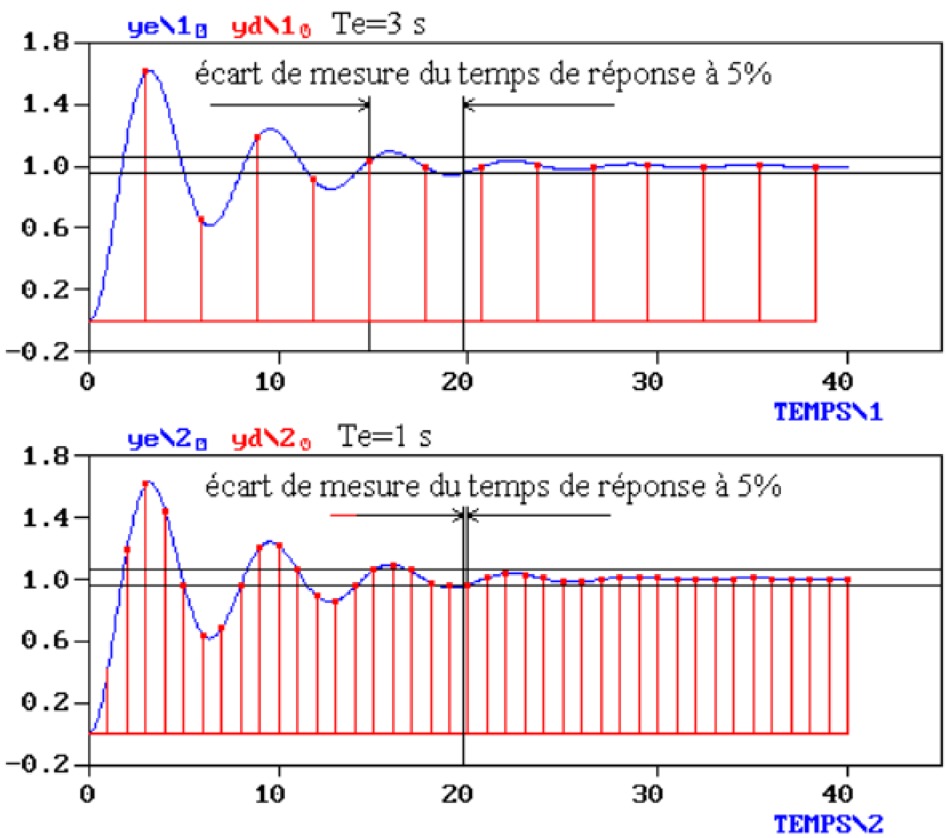
Par analogie avec le cas continu, on peut délimiter une zone dans le plan des pôles en z qui assure un temps de réponse inférieur à une valeur imposée.

Imposer à un système discret un temps de réponse maximal, revient à placer ses pôles à l'intérieur du cercle défini par le seuil supérieur du temps de réponse désiré.

Plus les pôles se rapprochent de zéro, plus le temps de réponse est faible.



Le temps de réponse d'un système discret d'ordre n ne sera jamais inférieur à nTe



Entre le temps de réponse d'un système échantillonné et le temps de réponse de son équivalent continu il existe un écart dû à l'ignorance du comportement entre les instants d'échantillonnage. Plus la période d'échantillonnage est grande, plus cet écart risque d'être important.

La période d'échantillonnage d'un asservissement numérique doit être choisie en fonction des performances désirées en boucle fermée. En particulier, il ne faut pas avoir le régime transitoire sous-échantillonné.

Une règle pratique pour le choix de la période d'échantillonnage est : $T_e \in [\frac{t_r^{5\%}}{20}, \frac{t_r^{5\%}}{10}]$

c.à.d., le régime transitoire doit être représenté par un nombre d'échantillons compris entre 10 et 20

5.8 Performances dynamiques d'un système échantillonné :

Les performances dynamiques d'un système sont mesurées en terme de quantités temporelles sur la réponse transitoire du système. Dans la pratique, puisque les systèmes à asservir sont en majorité à temps continu, les réponses (sorties) le sont aussi (à temps continu). De plus les signaux de commande issus du calculateur numérique sont ń convertis ż du temps discret au temps continu via un BOZ (Restitution). Et comme les réponses de la majorité des systèmes exhibent un transitoire oscillatoire amorti, les caractéristiques temporelles d'un second ordre fondamental peuvent décrire les performances dynamiques de ces systèmes :

$$G(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{p}{\omega_n} + 1}$$

soit

$$G(z) = \frac{1 + e^{-2\sigma T_e} - 2e^{-\sigma T_e} cos(\omega_p T_e)}{z^2 - 2e^{-\sigma T_e} cos(\omega_p T_e) z + e^{-2\sigma T_e}}$$

avec : $?_n$, la pulsation naturelle, ξ le facteur d'amortissement et $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, $\sigma = \xi\omega_n$

la réponse $s(t)$ est donnée par:

$$s(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_p} e^{-\xi\omega_n t} sin(\omega_p t + \beta) \ et \ \beta = arcos(\xi)$$

Caractéristique	Formule
Temps de monté : t_m 10 à 90% de la valeur finale	$t_m = \dfrac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$
Premier Dépassement : t_{D1}	$t_{D1} = \dfrac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$
D_1	$D_1 = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ en %.
Temps de réponse à ± 5 % : t_{r5}	$t_{r5} = \dfrac{3}{\xi\omega_n}$
Temps de réponse à ± 2 % : t_{r2}	$t_{r5} = \dfrac{4}{\xi\omega_n}$