ومنه المصفوفة $A$ قابلة للتقطير.

*So the matrix $A$ is distillable.*

4) في الأساس $(X_1, X_2, X_3)$، التشاكل الذاتي الممثل بالمصفوفة $A$ (في الأساس القانوني) له المصفوفة:

*In the base $(X_1, X_2, X_3)$, the endomorphism represented by the matrix $A$ (in the canonical basis) has the matrix:*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

بصفة أخرى، نضع $P$ مصفوفة العبور التي أشعة أعمدتها $X_1$، $X_2$ و $X_3$ على الترتيب أي:

*In other words, we put $P$ the transit matrix whose column vectors are $X_1$, $X_2$ and $X_3$ in order, i.e.:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ومنه $P^{-1}AP = D$.

*then, $P^{-1}AP = D$.*

## 4.2 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 2*

**Exercise N°– 1 – تمرين رقم**

لتكن $A$ مصفوفة من $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ المعرفة كمايلي :

*Let $A$ be a matrix of $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ defined as follows:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) هل المصفوفة $A$ قابلة للتقطير ؟

*Is the matrix $A$ diagonalizable?*

2) أحسب $(A-2I_3)^2$ ثم $(A-2I_3)^n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$. إستنتج $A^n$.
*Calculate* $(A-2I_3)^2$ *then* $(A-2I_3)^n$ *for each* $n\in\mathbb{N}$. *Deduce* $A^n$.

**Solution - الحــل**

1) حساب كثير الحدود المميز للمصفوفة $A$.
We compute the characteristic polynomial of the matrix $A$.

$$P_A(X)=\begin{vmatrix}-X & 1 & 0\\ -4 & 4-X & 0\\ -2 & 1 & 2-X\end{vmatrix}=(2-X)(X^2-4X+4)=(2-X)^3.$$

**المصفوفة $A$ تقبل قيمة ذاتية واحدة هي 2 إذا كان قطرية، فستكون مشابهة للمصفوفة $2.I_3$، لذلك ستكون مساوية لـ $2I_3$ وهذا ليس هو الحال ، لذلك لا يمكن أن تكون قابلة للتقطير.**

The matrix $A$ accepts a single eigenvalue is 2. If it were a diagonal, it would be similar to the matrix $2.I_3$, so it would be equal to $2I_3$ which is not the case, so it cannot be diagonalizable.

2) **لدينا:**
we have

$$(A-2I_3)^2=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

**وبالتالي** $(A-2I_3)^0=I$،
So $(A-2I_3)^0=I$,

$$(A-2I_3)^1=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

**و من أجل** $n\geq 2$ **لدينا** $(A-2I_3)^n=0$.
and for $n\geq 2$ we have $(A-2I_3)^n=0$.

**نلاحظ أن الفضاء الشعاعي الذاتي للقيمة 2**
We note that the eigen-vectorial space associated to 2

$$\begin{aligned}E_{\lambda=2} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x-y=0\right\}\\ &= \left\{(x,2x,z) : x,y\in\mathbb{R}^3\right\}\\ &= \langle(1,2,0),(0,0,1)\rangle\end{aligned}$$

ذو بعد يختلف عن بعد الفضاء $\mathbb{R}^3$ :

It has a dimension different from the space dimension of $\mathbb{R}^3$ :

$$\dim(E_{\lambda=2}) = 2 \neq 3$$

وهذا ما يؤكد أيضا أن المصفوفة $A$ غير قابلة للتقطير.

This also confirms that the matrix $A$ is not diagonalizable.

نضع $B = A - 2I_3$ ولدينا $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ حيث $B^n = 0$ من أجل $n \geq 2$. علاوة على ذلك ، المصفوفات $B$ و $2I_3$ متبادلة، لذلك

We put $B = A - 2I_3$ and we have $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ where $B^n = 0$, for $n \geq 2$. Furthermore, the matrices $B$ and $2I_3$ are interchangeable, therefore:

$$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}$$

حيث $C_n^k$ هي معاملات نيوتن ذات الحدين :

where $C_n^k$ are Newton's binomial coefficients:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ومع ذلك ، من أجل $k \geq 2$ لدينا $B^k = 0$ من أجل $n \geq 2$،

However, for $k \geq 2$ we have $B^k = 0$, for $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n B \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n (A - 2I_3) \\ &= 2^n (1-n) I_3 + 2^{n-1} n A. \end{aligned}$$

then                                                                                     ومنه

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n(1-n)I_3 + n2^{n-1}A. \\ &= 2^n(1-n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(n-1)2^n & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n & 0 \\ -n2^n & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Exercise N°– 2 – تمرين رقم**

*Let the matrix* لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) أوجد كثير الحدود المميز للمصفوفة $A$.
*Find the characteristic polynomial of the matrix* $A$.

2) أثبت أن المصفوفة $A$ قابلة للتقطير ثم أوجد المصفوفة $D$ القطرية ومصفوفة العبور $P$ العكوسة حيث $A = PDP^{-1}$.
*Prove that the matrix* $A$ *is diagonalizable and then find the diagonal matrix* $D$ *and the invertible transit matrix* $P$ *where* $A = PDP^{-1}$.

3) أحسب $A^n$ من أجل $n \in \mathbb{N}$.
*Calculate* $A^n$ *for* $n \in \mathbb{N}$.

**Solution - الحـــل**

1) حساب كثير الحدود المميز $P_A$ للمصفوفة $A$.
Compute the characteristic polynomial $P_A$ of the matrix $A$.

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} &= (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(X^2-6X+8) \\ &= (4-X)(X-4)(X-2) \\ &= (2-X)(4-X)^2 \end{aligned}$$

2) كثير الحدود المميز $P_A$ يقبل جذرين ومنه المصفوفة $A$ تملك قيمتين ذاتيتين $\lambda_1 = 2$ قيمة ذاتية بسيطة و $\lambda_2 = 4$ قيمة ذاتية مضاعفة .

The characteristic polynomial $P_A$ accepts two roots, of which the matrix $A$ has two eigenvalues $\lambda_1 = 2$ simple eigenvalue and $\lambda_2 = 4$ a double eigenvalue.

**لنحدد الفضاءات الشعاعية الذاتية المرافقة. ليكن**

Let's define the associated eigen-vectorial spaces. So let

$$E_1 = \{V = (x, y, z) : AV = 2V\}$$

We solve the system: **نقوم بحل الجملة:**

$$\begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 4y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

**الفضاءالشعاعي الذاتي** $E_1$ **المرافق للقيمة الذاتية** 2 **هو مستقيم شعاع توجيهه هو** $e_1 = (1, -2, 1)$.

The eigen-vectorial space $E_1$ associated to the eigenvalue 2 is a straight line whose directional vector $e_1 = (1, -2, 1)$.

Let **ليكن**

$$E_2 = \{v = (x, y, z) : Av = 4v\}$$

We solve the system: **نقوم بحل الجملة:**

$$\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \iff z = -x$$

**الفضاءالشعاعي الذاتي** $E_2$ **المرافق للقيمة الذاتية** 4 **هو المستوي ذو المعادلة:** $z = -x$ **التي يتم إعطاء أساسها ، على سبيل المثال من قبل الأشعة** $e_2 = (0, 1, 0)$ **و** $e_3 = (1, 0, -1)$.

The eigen-vectorial space $E_2$ associated to the eigenvalue 4 is the plane with the equation: $z = -x$ whose basis is given, for example by the vectors $e_2 = (0, 1, 0)$ and $e_3 = (1, 0, -1)$.

**لاحظ أنه يمكننا القراءة مباشرة من المصفوفة** $A$**، حقيقة أن الشعاع** $\vec{e}_2$ **هو شعاع ذاتي مرتبطة بالقيمة الذاتية** 4.

Note that we can read directly from the matrix $A$, the fact that the vector $\vec{e}_2$ is an eigenvector associated with the eigenvalue 4.

**أبعاد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية تساوي تعدد القيم الذاتية المرافقة وبالتالي، الفضاء $\mathbb{R}^3$ يقبل أساس الأشعة الذاتية والمصفوفة $A$ قابلة للتقطير.**

The dimensions of the sub-eigen-vectorial spaces are equal to the multiplicity of the associated eigenvalues. Thus, the space $\mathbb{R}^3$ accepts the basis of the eigenvectors and the matrix $A$ is diagonalizable.

**نضع $P$ مصفوفة العبور، ومنه:**

We put $P$ as the transit matrix, from which:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**و المصفوفة القطرية $D$ المرافقة لها**

and the associated diagonal matrix $D$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

We have the relationship: **لدينا العلاقة:**

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3) **حساب $A^n$ من أجل $n \in \mathbb{N}$.**

Compute $A^n$ for $n \in \mathbb{N}$.

**من السؤال السابق لدينا $A = PDP^{-1}$ ومنه من أجل $n \in \mathbb{N}$، $A^n = P^{-1}D^nP$ و**

From the previous question we have $A = PDP^{-1}$, then for $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$ and

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

يبقى علينا حساب $P^{-1}$. ونعلم أن

We are left with the calculation of $P^{-1}$ and we know that

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \left(P^*\right)^T$$

where أين

$$\det P = -2, \quad P^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

then, we have: ومنه لدينا:

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 0 & (1 - 2^n) \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} & 2^{n+1} - 2 \\ (1 - 2^n) & 0 & 2^n + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Exercise N°– 3 – تمرين رقم

*Let the matrix $A$* لتكن المصفوفة $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أقطر المصفوفة $A$.

*Diagonalize the matrix $A$.*

2) عبر عن حلول الجملة التفاضلية $X' = AX$ في قاعدة الأشعة الذاتية وأرسم مساراتها.

*Express the solutions of the differential system $X' = AX$ in the eigenvector rule and draw their paths.*

## Solution - الحـــل

1) تقطير المصفوفة $A$.

Diagonalization of the $A$ matrix.

كثير الحدود المميز

characteristic polynomial

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

المصفوفة $A$ تقبل قيمتين ذاتيتين مختلفتين ومنه فهي قابلة للتقطير.

The matrix $A$ accepts two different eigenvalues, therefore it is diagonalizable.

إيجاد الأساس الذاتي لـ $A$.

Finding the eigen-basic vectors of $A$.

ليكن $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$،

Let $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Au = u \iff x = y \quad \text{و} \quad Au = -u \iff x = -y.$$

نلاحظ أن $u_1 = (1, 1)$ و $u_2 = (-1, 1)$ ، حيث : $u_1$ الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية 1 و $u_2$ الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية $-1$ هما مستقلان خطيا، لذا فيشكلان أساسا لـ $\mathbb{R}^2$ وبالتالي لدينا $A = PDP^{-1}$ حيث

Note that $u_1 = (1, 1)$ and $u_2 = (-1, 1)$, where: $u_1$ eigenvector of eigenvalue 1 and $u_2$ eigenvector of eigenvalue $-1$ are linearly independent, so they form the basis of $\mathbb{R}^2$ and thus we have $A = PDP^{-1}$ where

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) ليكن $Y$ حيث $PY = X$ لدينا إذن

Let $Y$ where $PY = X$ then we have

$$X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY.$$

حلول الجملة التفاضلية $X' = AX$ في أساس الأشعة الذاتية $(u_1, u_2)$ هي حلول الجملة $Y' = DY$.
إذا كان $Y = (x, y)$ لدينا $x'(t) = x(t)$ و $y'(t) = -y(t)$ بالتالي حلول الجملة هي $x(t) = ae^t$ و $y(t) = be^{-t}$ حيث $a$ و $b$ ثوابت حقيقية. وتكون مساراتها في الأساس الذاتي $(u_1, u_2)$ عبارة عن منحنيات ذات المعادلة $y = c/x$ مع $c \in \mathbb{R}$ فروع من القطوع الزائدة.

The solutions of the differential system $X' = AX$ in the eigenvector $(u_1, u_2)$ are the solutions of the system $Y' = DY$. If $Y = (x, y)$ we have $x'(t) = x(t)$ and $y'(t) = -y(t)$ then the solutions to the system are $x(t) = ae^t$ and $y(t) = be^{-t}$ where $a$ and $b$ are real constants, and their trajectories in the eigenvalue $(u_1, u_2)$ are curves of the equation $y = c/x$ with $c \in \mathbb{R}$ branches of hyperboles.

**Exercise N°– 4 – تمرين رقم**

لتكن المصفوفة $A$ :

*Let the matrix A*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) حلل كثير الحدود المميز لـ $A$ إلى جداء عوامل ثم أوجد القيم الذاتية للمصفوفة.
*Factorize the characteristic polynomial of A and then find the eigenvalues of the matrix.*

2) أوجد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية لـ $A$.
*Find the sub-eigen-vectorial spaces of A.*

3) هل المصفوفة $A$ قابلة للتقطير؟
*Is the matrix A diagonalizable?*

**Solution - الحـــل**

1) كتابة كثير الحدود المميز للمصفوفة $A$ على شكل جداء عوامل: لدينا

Writing the characteristic polynomial of the matrix $A$ as a product of factors: We have

$$P_A(X) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 4 \\ -1 & 3-X & -1 \\ -2 & -1 & -3-X \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} C_1 \longleftarrow C_1 - C_3 & & \\ -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 1+X & -1 & -3-X \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$$

$$= (-1-X)(X^2-4X+4) = -(X+1)(X-2)^2$$

**القيم الذاتية للمصفوفة $A$ هي $\lambda_1 = -1$ قيمة ذاتية بسيطة و $\lambda_2 = 2$ قيمة ذاتية مضاعفة.**

The eigenvalues of $A$ are $\lambda_1 = -1$ a simple eigenvalue and $\lambda_2 = 2$ multiplicative eigenvalue.

2) **إيجاد الفضاءات الشعاعية الذاتية الجزئية للمصفوفة $A$.**

Find the eigen-sub-vectorial spaces of the matrix $A$.

**بالنسبة للقيمة الذاتية $-1$ ليكن الفضاء الشعاعي الجزئي $E_{-1}$ المعرف**

For the eigenvalue $-1$ let the sub-vectorial space $E_{-1}$ be defined as

$$E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3,\ Au = -u\}.$$

let $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, **ليكن** $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$،

$$u \in E_{-1} \iff \begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

**الفضاء $E_{-1}$ هو مستقيم شعاع توجيهه هو**

The space $E_{-1}$ is a straight line whose directional vector

$$u_1 = (1, 0, -1).$$

**الفضاء الشعاعي الجزئي المرافق للقيمة 2 الفضاء الشعاعي $E_2$ المعرف**

The sub-vectorial space associated with the value 2 is the vectorial space $E_2$ defined by

$$E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3,\ Au = 2u\}.$$

let $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

ليكن $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in E_2 \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x - y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

3) الفضاء $E_2$ هو مستقيم شعاع توجيهه

The space $E_2$ is a straight line whose directional vector

$$u_2 = (2, 1, -1).$$

الفضاء الشعاعي الجزئي $E_2$ ذو بعد 1، ومنه المصفوفة $A$ ليست قابلة للتقطير.

The sub-vectorial space $E_2$ is of dimension 1, then the matrix $A$ is not diagonalizable.

## Exercise N°– 5 – تمرين رقم

نسمي مصفوفة $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ عشوائية إذا كانت معاملاتها أعداد حقيقية موجبة أو معدومة وإذا كان مجموع معاملات كل من أسطرها يساوي 1.

*We call a matrix $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ random if its coefficients are positive or null real numbers and if the sum of the coefficients of each of its rows is 1.*

1) أثبت أنه إذا كانت $\lambda \in \mathbb{C}$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ فإن $|\lambda| \leq 1$.

*Prove that if $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue of $A$ then $|\lambda| \leq 1$.*

2) أثبت أن 1 قيمة ذاتية ثم أوجد الشعاع الذاتي المرافق له.

*Prove that 1 is an eigenvalue and then find its eigenvector.*

## Solution - الحل

1) نفرض أن $\lambda \in C$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ وليكن $z$ شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية. ليكن $i \in \{1, \dots, n\}$ حيث $|z_i| = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$. العمود رقم $i$ من احداثيات المصفوفة $Az$ تحقق $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j$ وهذا يجب أن يساوي $\lambda z_i$. بأخذ القيمة المطلقة واستخدام القاعدة الثلاثية نحصل على

Let $\lambda \in C$ be an eigenvalue of the matrix $A$ and let $z$ be an eigenvector of the eigenvalue. Let $i \in \{1, \ldots, n\}$ where $|z_i| = \max_{j=1,\ldots,n} |z_j|$. be column number $i$ from the coordinates of the matrix $Az$, make $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j$ and this should equal $\lambda z_i$. By taking the absolute value and using the triple rule, we get

$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|z_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|z_i| \leq |z_i|$$

**حيث نستعمل أيضا** $a_{i,j} \geq 0$ **و** $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. **ومنه قد تحصلنا على** $|\lambda|\,|z_i| \leq |z_i|$ . **لأن** $|z_i| \neq 0$ **(وإلا** $z$ **يكون الشعاع المعدوم) هذا يعني أن** $|\lambda| \leq 1$.

We also use $a_{i,j} \geq 0$ and $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Then, we get $|\lambda|\,|z_i| \leq |z_i|$. because $|z_i| \neq 0$ (otherwise $z$ is the zero vector). This means that $|\lambda| \leq 1$.

2) **يكفي أخذ**

Enough take

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

**كي نلاحظ أن** $Az = z$. **وبالتالي يكون** $z$ **شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية** 1.

To note that $Az = z$. So $z$ is an eigenvector associated to the eigenvalue 1.

## Exercise N°– 6 – تمرين رقم

**اشرح بدون حساب سبب عدم إمكانية تقطير المصفوفة التالية :** *Explain without calculating why the following matrix diagonalization is not possible:*

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

## Solution - الحـــل

**المصفوفة** $A$ **مثلثية علوية قيمها الذاتية هي عناصر قطرها المتمثلة في قيمة واحدة هي** $i$. **إذا كانت المصفوفة** $A$ **قابلة للتقطير فحتما نستطيع إيجاد مصفوفة عكوسة** $P \in GL_3(\mathbb{C})$ **تحقق:**

The matrix $A$ is an upper triangular matrix whose eigenvalues are the elements of a single value $i$ of diagonal. If the matrix $A$ is diagonalizable then we can find an invertible matrix $P \in GL_3(\mathbb{C})$ check:

$$A = P(iI_3)P^{-1}.$$

**لكن ولأن المصفوفة $I_3$ تبادلية مع جميع المصفوفات فإن:**

However, because the matrix $I_3$ is commutative with all matrices, then:

$$A = iI_3PP^{-1} = iI_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

**وليس هو الحال لهذا فإن المصفوفة $A$ غير قابلة للتقطير.**

this is not the case, so the matrix $A$ is not diagonalizable.

**Exercise N°– 7 – تمرين رقم**

**ليكن $m$ عدد حقيقي و $f$ تشاكل ذاتي على $\mathbb{R}^3$ ذو المصفوفة $A$ المعطاة في الأساس القانوني كما يلي:**

*Let $m$ be a real number and $f$ endomorphism of $\mathbb{R}^3$ with matrix $A$ given in canonical basis as follows:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1) **أوجد القيم الذاتية للتطبيق $f$ ؟**

*Find the eigenvalues of $f$?*

2) **ماهي قيم $m$ حتى يكون التطبيق الخطي قابل للتقطير ؟**

*What are the values of $m$ for a linear application to be diagonalizable?*

3) **نفرض أن $m = 2$. أحسب $A^k$ من أجل كل $k \in \mathbb{N}$.**

*Suppose that $m = 2$. Calculate $A^k$ for each $k \in \mathbb{N}$.*

**Solution : الحــل**

1) **إيجاد كثير الحدود المميز للمصفوفة** $A$.

Find the characteristic polynomial of the matrix $A$.

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} =_{C_1+C_2\to C_1} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-2 & -1 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \\ &=_{L_2-L_1\to L_2} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 2-m & X-m \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2)(X-m). \end{aligned}$$

**القيم الذاتية لـ** $f$ **هي** $1$ **و** $2$ **بشكل خاص إذا أخذنا** $m=1$ **أو** $2$ **فإن** $f$ **يقبل فقط قيمتين ذاتيتين.**

The eigenvalues of $f$ are 1 and 2 in particular if we take $m=1$ or 2 then $f$ accepts only two eigenvalues.

2) **إذا كان** $m \neq 1$ **و** $m \neq 2$ **فإن** $f$ **التشاكل الذاتي من** $\mathbb{R}^3$ **الذي يقبل ثلاث قيم ذاتية مختلفة : يكون هنا** $f$ **قابل للتقطير و إذا كان** $m=1$ **فإن كثير الحدود المميز لـ** $f$ **هو** $(1-X)2(2-X)$. **ويكون** $f$ **قابل للتقطير فقط إذا كان بعد الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي للقيمة الذاتية** $1$ **يساوي** $2$. **لنبحث عن هاته الفضاءات الشعاعية الجزئية (تذكر أن** $m=1$**). من أجل** $u=(x,y,z)$ **لدينا:**

If $m \neq 1$ and $m \neq 2$ then $f$ is an endomorphism of $\mathbb{R}^3$ which has three different eigenvalues: here $f$ is diagonalizable and if $m=1$. The characteristic polynomial of $f$ is $(1-X)2(2-X)$, and $f$ is diagonalizable only if the dimension of the eigen-sub-vectorial space of eigenvalue 1 is 2. Let's find these eigen-sub-vectorial space (remember that $m=1$). For $u=(x,y,z)$ we have:

$$f(u)=u \iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& 0 \\ -x+y+z &=& 0 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& x \\ z &=& 0 \end{array}\right.$$

**نأخذ كأساس للفضاء** $Ker(f-I)$ **الشعاع** $(1,1,0)$. **بُعد الفضاء الذاتي** $2 \neq 1$ **: ومنه المصفوفة غير قابلة للتقطير. نفرض الآن أن** $m=2$. **نبحث عن بُعد الفضاء** $Ker(f-2I)$. **لدينا من أجل** $u=(x,y,z)$:

We take as a basis for the space $Ker(f-I)$ the vector $(1,1,0)$. eigen-sub-vectorial space dimension is $1 \neq 2$ : of which the matrix is not diagonalizable. Now let $m=2$. We are looking for the dimension of space $Ker(f-2I)$. We have for $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=2u \iff \begin{cases} -x+z &= 0 \\ -x+z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= x \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-2I)$ الشعاعين $(1,0,1)$ و $(0,1,0)$. بشكل خاص بُعد الفضاء $Ker(f-2I)$ هو 2 و $f$ هنا قابل للتقطير.

We take as a basis for the space $Ker(f-2I)$ the vectors $(1,0,1)$ and $(0,1,0)$. Specifically the space dimension of $Ker(f-2I)$ is 2 and $f$ here is diagonalizable.

3) لنقطر $f$. وجدنا سابقا أساس ذاتي بالنسبة للقيمة الذاتية 2. من أجل القيمة الذاتية 1 ($m=2$) لدينا من أجل $u=(x,y,z)$ :

Let's diagonalize $f$. We previously found an eigenvector for the eigenvalue 2. For the eigenvalue 1, $(m=2)$ we have for $u=(x,y,z)$ :

$$f(u)=u \iff \begin{cases} z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= x \\ z &= 0 \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-I)$ الشعاع $(1,1,0)$. ليكن $u=(1,1,0)$، $v=(0,1,0)$ و $w=(1,0,1)$. ومنه $(u,v,w)$ أساس ذاتي لـ $f$ في هذا الأساس مصفوفة $f$ هي:

We take as a basis for the space $Ker(f-I)$ the vector $(1,1,0)$. Let $u=(1,1,0)$, $v=(0,1,0)$ and $w=(1,0,1)$. From which $(u,v,w)$ is an eigenvector of $f$. In this basis, the matrix $f$ is:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

لتكن $P$ مصفوفة العبور من الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^3$ الى الأساس $(u,v,w)$. المصفوفة $P$ المعطات بـ:

Let $P$ be the transit matrix of the canonical basis of space $\mathbb{R}^3$ to the base $(u, v, w)$. The matrix $P$ is given by:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولدينا $A = PDP^{-1}$. يجب أن نحسب $P^{-1}$. نجد:

We have $A = PDP^{-1}$. We have to calculate $P^{-1}$. We find:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

من $A = PDP^{-1}$ نستنتج بالتراجع أن $A^k = PD^kP^{-1}$. لكن و لأن المصفوفة $D$ قطرية لدينا:

From $A = PDP^{-1}$, we conclude bu induction that $A^k = PD^kP^{-1}$. But since the matrix $D$ is diagonal, we have:

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

After the calculations we find in the latter بعد الحسابات نجد في الأخير

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$