حل السلسلة الخامسة

حل التمرين الاول

1 / كتابة معادلة دالة الإنتاج :

بما أنه يوجد عنصر إنتاجي واحد فقط متغير و هو عدد العمال "L" و باقي العناصر ثابتة فإننا بصدد الفترة القصيرة للإنتاج و بالتالي فإن دالة الإنتاج تكون بالشكل التالي :

$$Q = \int (L , K') , K \quad \text{ثابت}$$

2 / إكمال الجدول و إيجاد كل من :ApL ، MpL:

$$ApL = \frac{Q}{L}, \; MpL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Q	4	9	18	30	47	67	86	99	110	119	126	119	110
ApL	4	4.5	6	7.5	9.4	11.16	12.28	12.38	12.22	11.9	11.45	9.91	8.46
MpL	—	5	9	12	17	20	19	13	11	9	7	−7	−9

3 / التمثيل البياني لكل من الإنتاج الكلي "Q" و الحدي "MpL" و المتوسط "ApL " :

4 / تحليل المراحل الثلاثة للإنتاج :

المرحلة I : مرحلة التزايد بمعدل متزايد : $L = 0 \longrightarrow MpL = ApL$

$<=> L = 0 \longrightarrow L = 8$

و تمثل مرحلة تزايد الإنتاج الحدي تماما (من نقطة الأصل إلى أن يصل الإنتاج الحدي إلى أعظم قيمة له ($L = 6$ $\quad$ $(L = 0)$)

و القانون السائد في هذه المرحلة هو قانون تزايد الغلة .

المرحلة II : مرحلة التزايد بمعدل متناقص $MpL = 0$ و $ApL = MpL$

$L = 8 \longrightarrow L = 11$

و تمثل مرحلة تناقص الإنتاج الحدي في المجال الموجب (من أعظم قيمته لـ MpL إلى أن ينعدم ($L = 11$ $\quad$ $L = 6$) و القانون السائد في هذه المرحلة هو قانون تناقص الغلة و هو قانون يعبر عن تناقص الإنتاج الحدي MpL في المجال الموجب و هو قانون خاص بالفترة القصيرة .

المرحلة III : مرحلة التناقص التام: $\infty \quad ApL = 0 \longrightarrow$

$L = 11 \longrightarrow \infty$

و تمثل دالة تناقص الإنتاج الكلي عندما يكون الإنتاج الحدي في حالة تناقص في المجال السالب و القانون السائد هو قانون تناقص الغلة في المجال السالب .

حل التمرين الثاني

لدينا دالة الانتاج لمؤسسة ما على الشكل التالي:

$Q = 20L + 16L^2 - L^3$

1- إيجاد دالتي الانتاج الحدي والانتاج المتوسط للعمل:

- دالة الانتاج الحدي:

$$Pm_L = \frac{dQ}{dL} = 20 + 32L - 3L^2$$

- دالة الانتاج المتوسط:

$$PM_L = \frac{Q}{L} = 20 + 16L - L^2$$

2- كميات العمل التي تعظم كلا من:

أ- الانتاج الكلي:

- رياضيا: يصل الانتاج الكلي إلى حده الأقصى لما يكون مشتقه الأول يساوي الصفر

- اقتصاديا: يصل الانتاج الكلي إلى حده الأقصى لما يكون الانتاج الحدي معدوما.

لدينا الانتاج الحدي:

$Pm_L = 20 + 32L - 3L^2$

$Max\ Q = PT \Rightarrow Pm_L = 0$

$Pm_L = 20 + 32L - 3L^2 = 0$

$-3L^2 + 32L + 20 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (32)^2 - 4(-3)(20)$

$\Delta = 1264 \ , \ \sqrt{\Delta} = 35,55$

$$L_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-32+35,55}{-6} = -0,5$$ مرفوض

$$L_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-32-35,55}{-6} = 11,2$$ مقبول

ومنه ينعدم الانتاج الحدي أو يصل الانتاج الكلي إلى حده الأقصى عند مستوى العمل $L = 11,25$

ب- الانتاج المتوسط:

- يصل الانتاج المتوسط إلى حده الأقصى عندما يكون مشتقه الأول يساوي الصفر.

أو يصل PM_L إلى حده الأقصى عند إلتقائه مع Pm_L (أي مساواته مع الانتاج الحدي)

• يكون PM_L أعظمي عندما يكون مشتقه الأول معدوما

لدينا دالة الانتاج المتوسط:

$PM_L = 20 + 16L - L^2$

$Max\ PM_L \Rightarrow \frac{dPM_L}{dL} = 0$

$$\frac{dPM_L}{dL} = 0 \Rightarrow 16 - 2L = 0$$

$$\Rightarrow L = 8$$

ومنه يصل PM_L إلى حده الأقصى عند مستوى العمل $L = 8$

ج- الانتاج الحدي:

- يصل الانتاج الحدي إلى حده الأقصى عندما يكون مشتقه الأول معدوما.

لدينا: $Pm_L = 20 + 32L - 3L^2$

$$Max\ Pm_L \Rightarrow \frac{dPm_L}{dL} = 0$$

$$\frac{dPm_L}{dL} = 32 - 6L = 0$$

$$\Rightarrow L = 5,33$$

3- تحديد مناطق الانتاج الثلاث.

المنطقة ① حدودها من نقطة الأصل إلى نقطة وصول الانتاج المتوسط إلى حده الأقصى.

وجدنا سابقا أن PM_L يصل إلى حده الأقصى عند مستوى العمل $L=8$ ومنه المنطقة الأولى
$L=0$ إلى $L=8$

المنطقة ② حدودها من نقطة وصول الانتاج المتوسط إلى حده الأقصى إلى نقطة انعدام الانتاج الحدي.
وجدنا سابقا أن Pm_L ينعدم عند مستوى العمل $L=11,25$ ومنه المنطقة الثانية $L=8$ إلى $L=11,25$

المنطقة ③ حدودها من نقطة انعدام الانتاج الحدي إلى ما لا نهاية ومنه المنطقة الثالثة $L=11,25$ إلى ∞

4- تحديد النقطة التي تجعل الانتاج الكلي يتزايد بمعدل متناقص
وهي النقطة التي يكون فيها منحنى الانتاج الحدي في أقصى قيمة له. وتسمى نقطة الانعطاف أي قبلها كان الانتاج الكلي يتزايد بمعدل متزايد.
- رياضيا: يتحقق ذلك لما يكون المشتق الثاني للانتاج الكلي يساوي الصفر.
- اقتصاديا، نقطة الانعطاف يقابلها وصول الانتاج الحدي إلى حده الأقصى.

$$Max\ Pm_L \Rightarrow \frac{dPm_L}{dL} = 0$$

ووجدنا سابقا، أن ذلك يتحقق عند مستوى العمل $L=5,33$
وهي النقطة التي تجعل الانتاج الكلي يتزايد بمعدل متناقص.

5- تحديد مرحلة الغلة عند كل كمية من كميات العمل التالية: $L=4$ ، $L=7$ ، $L=12$
يمر الانتاج في المدى القصير بثلاث مراحل للغلة:
- تزايد الغلة: Pm_L متزايد
- تناقص الغلة: Pm_L متناقص حتى يصبح معدوما.
- الغلة السالبة: Pm_L سالب

وجدنا سابقا أن الانتاج الحدي يصل إلى نهايته العظمى عند $L=5,33$ ويصبح معدوما عند $L=11,25$
ومنه تكون مراحل الغلة كالتالي:
- تزايد الغلة: $L=0$ إلى $L=5,33$
- تناقص الغلة: $L=5,33$ إلى $L=11,25$
- الغلة السالبة: $L=11,25$ إلى ∞

وبالتالي عند مستويات العمل:
* $L=4$ - يمر الانتاج بمرحلة تزايد الغلة أي أن المنتج لم يصل بعد إلى نسبة المزج المثلى من عوامل الانتاج.
* $L=7$ - يمر الانتاج بمرحلة تناقص الغلة أي أن المنتج قد تجاوز نسبة المزج المثلى من عوامل الانتاج والتي قد وصل إليها عند النهاية العظمى لـ Pm_L أي عند $L=5,33$
* $L=12$ يمر الانتاج بمرحلة الغلة السالبة، أي تجاوز المنتج وابتعد أكثر فأكثر عن نسبة المزج المثلى من عوامل الانتاج.

حل التمرين الثالث

$$Q = 100L^{0,7}.K^{0,3}$$

$$2500 = 50L + 100K.....(*)$$

1/ حجم الإنتاج :

شرط التوازن :

$$\boxed{:\frac{MpL}{MpK} = \frac{PL}{PK}}$$

$$= \frac{70L^{-0,3}.K^{+0,3}}{L^{0,7} - K^{-0,7}} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$=> \frac{7K}{3L} = \frac{1}{2} => \quad \boxed{K = \frac{3L}{14}}$$

نعوض في (*) نجد :

$$2500 = 50L + 100(\frac{3L}{14})$$

$$2500 = 50L + \frac{300L}{14} = \frac{100L}{14} \qquad \boxed{L = 35}$$

$$=> \quad \boxed{K = 7,5}$$

$$(L, K) = (35, 7,5)$$

$$Q = 100(35)^{0,7}.(7,5)^{+0,3} = 2203,32$$

2/هل الدالة متجانسة ، و ما درجة تجانسها مستنتجا طبيعة الحجم :

- $Z = 100L^{0,7}K^{0,3}.\lambda(2500 - 50L - 100K)$

$$Z'_L = 70\,L^{-0,3}.K^{0,7} - 50\,\lambda = 0$$

$$Z'_u = 30L^{0,7}.K^{-0,7} - 100\,\lambda = 0$$

$$Z_\lambda = 2500 - 50\,\lambda - 100K = 0$$

- تجانس دالة :

$$\boxed{Q = (\lambda L, \lambda K) = 100(\lambda L)^{0,7}.(\lambda K)^{0,3} = 100\lambda^{0,7}L^{0,7}.\lambda^{0,3}K^{0,3}}$$

$$\boxed{Q = (\lambda L, \lambda K) = \lambda Q}$$

الدالة متجانسة من الدرجة الأولى .

إذن غلة الحجم ثابتة .

$H = 0 + 8800 + 8800 + 205\ 75 + 3700 + 0 = 41875 > 0$ الحل الأمثل

3/ $TMST_{L,K}$ عند نقطة التوازن :

$$TMST_{L,K} = \frac{MPL}{MPK} = \frac{7K}{3L}$$

$$= \frac{7}{3,35} = 0,5$$

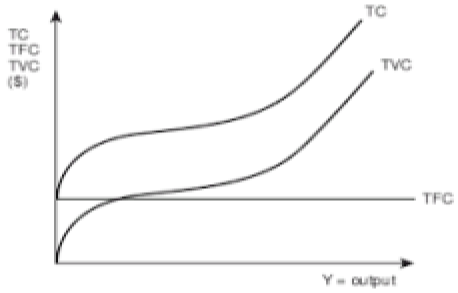
4 / حساب المرونة الكلية لـ L ,K للإنتاج :

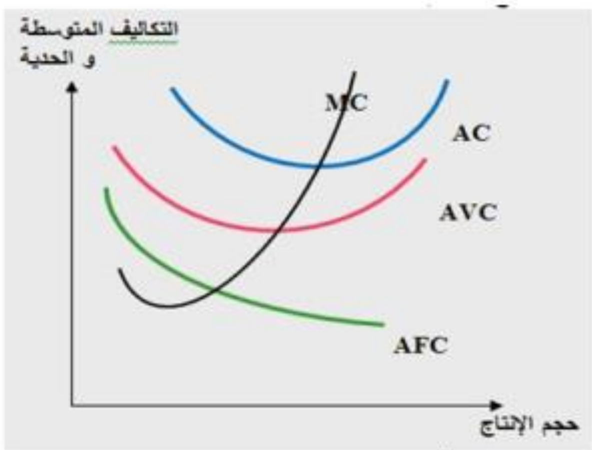
$$E = E_L + E_K = 0,7 + 0,3 = 1$$

▪ حل التمرين01:

Q	CT	CV	CF	ACF	ACV	MC
0	70	0	70	-	-	-
1	100	30	70	70	30	30
2	110	40	70	35	20	10
3	130	60	70	23.33	20	20
4	160	90	70	17.5	22.5	30
5	200	130	70	14	26	40
6	250	180	70	11.66	30	50
7	320	250	70	10	35.5	70

1- الرسم :





2- تعود هذه الأنواع من التكاليف الى الفترة القصيرة لأن هناك تكاليف ثابتة.

• التمرين02: إذا كانت دالة التكاليف الكلية للإنتاج هي: $CT=Q^3-6Q^2+15Q+2$

– نتحدث عن الفترة القصيرة لأن هناك قيمة ثابتة هي 2 تمثل التكاليف ثابتة.

– حساب كل أنواع التكاليف.

$CT = CV + CF$ ومنه $CT = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 2$,$CT = CV + 2$

$$CV = Q^3 - 6Q^2 + 15Q$$

$$CF = 2$$

$$ACT = \frac{CT}{Q} = ACV + ACF = Q^2 - 6Q + 15 + \frac{2}{Q}$$

$$ACF = \frac{CF}{Q} = \frac{2}{Q}$$

$$ACV = \frac{CV}{Q} = Q^2 - 6\,Q + 15$$

$$MC = \frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{\partial CV}{\partial Q} = 3Q^2 - 12Q + 15$$

– تبلغ التكلفة المتوسطة المتغيرة نهايتها الدنيا عندما:

$$ACV' = 0 \leftrightarrow 2Q - 6 = 0 \leftrightarrow Q = 3$$

– تبلغ التكلفة الحدية نهايتها الدنيا عندما:

$$MC' = 0 \leftrightarrow 6Q - 12 = 0 \leftrightarrow Q = 2$$

حل سلسلة تمارين حول تكاليف الإنتاج في الفترة الطويلة.

حل التمرين01:

تتحمل مؤسسة ما تكلفة كلية قدرها: $CT= Q^3-4Q^2+9Q$

1 –الفترة الزمنية التي تعبر عنها هذه الدالة هي الفترة الطويلة لعدم وجود تكاليف ثابتة (CF) ووجود تكاليف متغيرة فقط (CV)

2 -حساب التكلفة الحدية والمتوسطة، وأين يتقاطع منحنيا التكلفتين الحدية والمتوسطة

$ACT=\frac{CT}{Q}=Q^2-4Q+9$

$MC=\frac{\delta CT}{\delta Q}=\frac{\delta(Q^3-4Q^2+9Q)}{\delta Q}=3Q^2-8Q+9$

يتقاطع منحنى التكاليف المتوسطة (ACT) مع منحنى التكاليف الحدية (MC) عندما:

الطريقة 1: عندما يكون ACT=MC

اي :

$ACT=MC$

$Q^2-4Q+9=3Q^2-8Q+9$

$Q^2-3Q^2-4Q+8Q =+9-9$

$-2Q^2+4Q=0$

$2Q(-Q+2)=0$

$Q=2$

الطريقة 2: عندما يكون منحنى التكلفة الحدية (MC) يقطع منحنى التكاليف المتوسطة (ACT) في نهايته الدنيا أي أن (ACT' =0)

$ACT'=2Q-4=0$

$Q=2$

3 – شروط تعظيم الربح وقيمته حيث: سعر السلعة في السوق:($P_Q=12$)

$\pi=RT-CT$

$RT=P.Q=12Q$

$CT= Q^3-4Q^2+9Q$

π=12Q-(Q^3-4Q^2+9Q)

π=12Q- Q^3+4Q^2-9Q)

π=-Q^3+4Q^2+3Q

يكون الربح أعظميا إذا كان

$\frac{\delta\pi}{\delta Q}=0$

$\frac{\delta\pi}{\delta Q}=-3Q^2+8Q+3=0$

معادلة من الدرجة الثانية تحل باستخدام الميز Δ

Δ=b2-4ac

$\Delta=8^2-4(-3)(3)=100$

وعليه :

$Q1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8+10}{-6}=\frac{1}{-3}$

$Q2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8-10}{-6}=\frac{-18}{-6}=3$

Q=3

$\pi=-(3)^3+4(3)^2+3(3)=-27+36+9=18$

4 –حجم الإنتاج الذي يقابل أدنى متوسط تكلفة كلية، وقيمة التكلفة الحدية المقابلة له

نعلم أن منحنى متوسط التكلفة الكلية يبلغ نهايته الدنيا عند ما تكون ACT'=0 وعند هذه النقطة يتقاطع مع منحنى التكلفة الحدية MC

وعليه:

ACT'=2Q-4=0

Q=2

$MC=3Q^2-8Q+9$

نعوض ب Q=2 في معادلة منحنى التكلفة الحدية MC

$MC=3(2)^2-8(2)+9=5$

حل التمرين02:

1-حساب التكلفة الكلية و التكلفة الحدية في الأجل الطويل

LCT=LAC*Q

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
LAC	19.6	17	14.9	13	11.7	10.8	10.2	10	10.2	10.6
LCT	19.6	34	44.7	52	58.2	64.8	71.4	80	91.8	106
LMC	--	14.4	10.7	7.3	6.5	6.3	6.6	8.6	11.8	14.2

2-تمثيل منحنيات التكاليف أعلاه بيانيا