الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider –Biskra
Faculté des Sciences Economiques, commerciales et des Sciences de Gestion
Le Conseil Scientifique de La Faculté

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد خيضر- بسكرة
كلية العلوم الإقتصاديةوالتجارية وعلوم التسيير
المجلس العلمي للكلية
رقم: 1030 /م.ع.ك. ع.إ.ت/2020

# مستخرج من محضر اجتماع المجلس العلمي للكلية رقم:2020/06
# المنعقد بتاريخ 2020/06/02 (الجلسة الثانية)

في دورة المجلس المنعقدة بتاريخ **الثاني** من شهر **جوان** ألفين **وعشرون** وعلى الساعة **التاسعة صباحاً**.

- **وافق** أعضاء المجلس العلمي على **التقارير الإيجابية** المقدمة من طرف الدكتور: **فالته اليمين** جامعة: **بسكرة** و الدكتور: **رابح بلعباس** جامعة: **المسيلة**، بخصوص المطبوعة المقدمة من طرف الدكتور(ة) :**جبيرات سناء** والمعنونة: " **دروس وتمارين تطبيقية في مقياس تقنيات كمية في العلوم التجارية** " موجهه لطلبة **السنة الأولى ماستر** تخصص:**مالية وتجارة دولية** ،تحوي :**154 صفحة** .

بسكرة في: **2020-06-07**

رئيس المجلس العلمي

نائب العميد المكلف بما بعد التدرج
والبحث العلمي والعلاقات الخارجية

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة محمد خيضر – بسكرة –

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير
قسم علوم التسيير

# مطبوعة موجهة لطلبة السنة أولى ماستر مالية و تجارة دولية

## بعنوان :

# دروس و تمارين تطبيقية في مقياس تقنيات كمية في العلوم التجارية

اعداد الدكتورة:

جبيرات سناء

السنة الجامعية : 2020/2019

## فهـرس المحتــويــات

**مقدمة:**

تعتبر الطرق الكمية من العلوم التطبيقية التي أحرزت انتشارا واسعا خاصة بعد الحرب العالمية الثانية وامتدت تطبيقاتها لتشمل القطاع الصناعي و الخدمي على حد سواء ، لكونها تتسم بالأساس العلمي و المنهجي القادر على التعامل مع المشكلات المختلفة و التوصل الى الحلول الممكنة .فهي تعتمد على التكميم و امكانية القياس الموضوعي لمتغيرات المشكلة و معايير القرار ، باستخدام طرق و نماذج رياضية متعددة يمكن جمعها تحت نماذج بحوث العمليات و الأساليب الاحصائية اللتين تم تناولهما في هذه المطبوعة، على الرغم من أن العديد من المتغيرات يصعب السيطرة عليها و اخضاعها للطرق العلمية و تحليلها و التعامل معها على أساس رقمي ، لأنها ترتبط بالعنصر البشري و العوامل المؤثرة فيه.

ويفسر بحوث العمليات كطريقة كمية في العلوم التجارية من خلال النظر للمشكلة من زاوية كمية ، أي أنه يتم تأطير المشكلة و نمذجتها وفق تكنيك رياضي معين حسب طبيعة و متغيرات المشكلة من أجل التوصل الى أحسن الوضعيات الممكنة في ظل ما هو متاح . أما الأساليب الإحصائية التي تعتبر كذلك من الطرق العلمية التي تطورت في القرن الماضي ، فإنها تتيح للمؤسسات الصناعية و التجارية تحليل نتائج التغيرات الحاصلة على الظواهر المدروسة و التوقعات المستقبلية بما يحتمل أن تكون عليه الحال فيها ،مما يجعلها قاعدة أساسية مساعدة في عملية اتخاذ القرار .

وقد جاءت هذه المطبوعة المعنونة ب " دروس و تطبيقات في مقياس التقنيات الكمية في العلوم التجارية " والموجهة لطلبة سنة أولى ماستر مالية و تجارة دولية ، ضمن خمسة فصول وفق المقرر الوزاري وهي : البرمجة الخطية، البرمجة بالأعداد الصحيحة ، شبكات الأعمال، تحليل الانحدار الخطي البسيط و المتعدد، وأخيرا الطرق اللامعلمية ، بحيث اعتمدنا البساطة و الوضوح في اخراج هذه المادة من خلال الابتعاد عن البراهين الرياضية التي تثقل كاهل الطالب غير المتخصص من جهة ، و ربط المفاهيم و القواعد النظرية بأمثلة تطبيقية و مجموعة من التمارين المحلولة و المقترحة من جهة أخرى. هدفنا في ذلك تمكين الطالب من تطبيق الجانب النظري على الحياة العملية أو في أبحاثه التطبيقية، كما يطلب من هذا الأخير ادراكه لبعض المعارف و المتعلقة خاصة بالاحصاء التطبيقي، رياضيات المؤسسة و تسيير المشاريع من أجل تسهيل و تسريع عملية الفهم و الاستيعاب .

في الأخير، أرجو أن أكون قد وفقت بتقديم الأحسن و أن تكون هذه المطبوعة عونا لأبنائنا الطلبة و مرجعا يستوفون منها معلوماتهم و احتياجاتهم في مجال النماذج الرياضية المطبقة في المجال الاقتصادي و التجاري، و أن تلقى اهتماما من زملائنا الأساتذة بتقديم الانتقادات البناءة الكفيلة بتحسينها مستقبلا.

# الفصل الأول : البرمجة الخطية

## أهداف الفصل:

ينتظر من الطالب بعد قراءة هذا الفصل أن يصبح قادرا على:

- تحديد بنية نموذج البرمجة الخطية.
- فهم الافتراضات الأساسية لنموذج البرمجة الخطية.
- ايجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي بالطريقة البيانية مهما كان نوع مسألة البرمجة الخطية.
- ايجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي بطريقة السمبلاكس مهما كان نوع مسألة البرمجة الخطية

## محتوى الفصل:

I . بنية و فرضيات البرمجة الخطية.

1. بنية البرمجة الخطية.
2. فرضيات البرمجة الخطية.

II .صياغة نموذج البرمجة الخطية.

1. خطوات صياغة نموذج البرمجة الخطية.

III.طرق حل البرنامج الخطي.

1. الطريقة البيانية.
2. طريقة السمبلاكس.

IV . تمارين تطبيقية.

1. تمارين محلولة.
2. تمارين مقترحة.

**تمهيد:**

تعتبر البرمجة الخطية من أهم التطورات العلمية التي توصل اليها الانسان في النصف الثاني من القرن العشرين ، حيث مكنت متخذ القرار من النظر الى المشاكل الادارية بشكل علمي و بمنظور يختلف عن الطريقة التي كانت تعالج بها الأمور من قبل، مما نتج عن ذلك تحقيق في الأرباح و وفرة في الخسائر.

ومن الناحية التاريخية ، يعتبر عالم الرياضيات السوفياتي Leonid Kantorovich الأول الذي وضع لبنة بنائها من خلال تقديم أول مجلة في البرمجة الخطية بعنوان "الطرق الرياضية في تنظيم و تخطيط الانتاج" في جامعة لينينقراد ، وذلك في عام 1939.[1] أما سنة 1947 فقد شكلت نقطة تحول في تاريخ البرمجة الخطية حيث تمكن العالم الأمريكي George Dantzig من التوصل الى حل بعض مشكلات التخطيط و الصيانة في سلاح الطيران الأمريكي ،بالاعتماد على ما يسمى بطريقة السمبلاكس(la méthode du simplexe) و التي نشرت لاحقا في سنة 1951.

## I . بنية و فرضيات البرمجة الخطية:

### 1. بنية البرمجة الخطية :

اصطلاحا ، تعني كلمة **البرمجة** سلسلة من الخطوات المنظمة يدويا أو آليا للوصول إلى الحل الذي يعظم أو يدني دالة النموذج في ظل مجموعة من القيود خلال فترة زمنية، و كلمة **خطية** تعني وجود علاقة خطية بين متغيرات دالة الهدف أي تتغير قيم المخرجات تبعا لتغير قيمة المدخلات بنفس النسبة أو في نفس الاتجاه زيادة أو نقصاً . أما **مصطلح البرمجة الخطية** فيعرف على أنه أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي يكون توزيعها مثاليا . فهو يتكون من المكونات الأربع التالية:[2]

- **المتغيرات(les variables)**: تمثل الخيارات المتاحة لمتخذ القرار، و قيمها في البرمجة الخطية تحدد الحل الأمثل ، ويرمز لهذه المتغيرات بـ $X_1, X_2, X_3,..............,X_n$

حيث $n$ عدد المتغيرات في المسألة المدروسة .

هذه المتغيرات تعبر عن أحد المفاهيم التالية :

[1] Gerald Baillargeon, ***programmation linéaire appliqué, outille à l'aide de décession*** , éditions SMG, Québec, 1996, p24

[2] علي العلاونة ، محمد عبيدات ،عبد الكريم عواد ، ***بحوث العمليات في العلوم التجارية*** , ط1، دار المستقبل للنشر و التوزيع ، الأردن، 2000 ،ص 153.

- ✓ كميات إنتاج لمنتجات معينة .
- ✓ ساعات عمل في أقسام معينة من مصنع أو شركة أو مؤسسة .
- ✓ مبالغ من المال المخصص لأنشطة أو فعاليات معينة .
- ✓ كمية المواد الأولية اللازمة لتصنيع منتج معين .

**دالة الهدف(la fonction objective)**: هي دالة رياضية تمثل الهدف الذي نريد الوصول إليه وتحقيقه، يعبر عنها رياضيا بـ

$$Z=\sum_{J=1}^{n} C_J X_J \; = C_1X_1+C_2X_2+...........+C_nX_n$$

حيث $C_J$ أعداد حقيقية تدعى بمعاملات دالة الهدف .

تصنف الأهداف التي تعالجها البرمجة الخطية إلى :

- ✓ **تعظيم دالة الهدف**: تستخدم هذه الدالة عندما نسعى الى تحقيق أكبر قيمة ممكنة كزيادة الانتاج الى اقصى حد ممكن. يرمز للدالة في هذه الحالة بـ :

$$MaxZ=C_1X_1+C_2X_2+..............+C_nX_n$$

- ✓ **تخفيض دالة الهدف**: تستخدم هذه الدالة عندما نسعى الى الحصول على أدنى قيمة ممكنة كتقليل تكلفة الانتاج الى أدنى حد ممكن. يرمز للدالة في هذه الحالة بـ :

$$MinZ=C_1X_1+C_2X_2+..............+C_nX_n$$

**القيود(les contraintes)**: تمثل مجموعة المحددات أو العوائق التي يجب الخضوع لها من أجل تحقيق الهدف ، فهي تعبر عن الموارد المتاحة التي يجب أن تكون محددة وقابلة للقياس . يتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متباينات أو معادلات من الدرجة الأولى اذ يمثل الطرف الأيسر المتغيرات و معاملاتها الخاصة أما الطرف الايمن فيمثل قيمة ثابتة ، كما تأخذ أحد الأشكال التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad i=1,2,.........,m.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \qquad i=1,2,.........,m.$$ أو

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i=1,2,.........,m.$$ أو

حيث أنه في كلا الأشكال :

$n$ : عدد المتغيرات في النموذج الخطي.

$m$ : عدد قيود المسألة ( عدد الشروط الخطية ).

$a_{ij}$ : أعداد حقيقية تدعى بالمعاملات التقنية.

$b_i$ : أعداد حقيقية تعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من قيود المشكلة

**و للإشارة فإن مسائل البرمجة الخطية يمكن تمثيلها وفق ثلاث صيغ هي:**

- ✓ **الصيغة العامة أو المختلطة ( la forme générale ou mixte):** عادة ما تكتب البرامج الخطية في بداية وضعها على شكل صيغة عامة تحتوي على كل الإشارات ( $\leq$ ، $=$ ، $\geq$ ).
- ✓ **الصيغة القانونية ( la forme canonique):** هي الصيغة التي تحتوي اما على قيود من نوع أقل من أو يساوي اذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم، أو قيود من نوع أكبر من أو يساوي اذا كانت دالة الهدف من نوع تصغير
- ✓ **الصيغة المعيارية ( la forme standard):** هي الصيغة التي تحتوي على قيود من شكل مساواة( معادلات) سواء كانت دالة الهدف من نوع تعظيم أو تخفيض.

**عدم سلبية المتغيرات(non négativité des variables):** وهذا يعني أنه يستوجب أن تكون جميع المتغيرات موجبة أو معدومة، ويعبر عنها رياضيا بـ:

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1,2,.........,n.$$

## 2. فرضيات البرمجة الخطية :

ذكرنا فيما سبق ، أن البرمجة الخطية تمثل أسلوبا رياضيا لتوزيع أو استخدام موارد محدودة على عدد من الاستخدامات البديلة ,بالطريقة التي تحقق أفضل استخدام ممكن لها ممثلا في شكل هدف محدود , وهذا ما يبين لنا أنها تستند إلى على فكرتين هما فكرة النشاط(Activité) , و فكرة البدائل ( Alternatives) حيث يقصد بالأولى في مجال الأعمال تلك الطريقة التي يمكن أن يتم الإنتاج بها , أما الثانية فتعني تلك الوسائل المختلفة التي يمكن أن تؤدي كل منها إلى تحقيق الهدف المحدد, و في هذه الحالة تقوم البرمجة الخطية في أساسها النظري على الافتراضات الرئيسية التالية :[1]

**التناسبية (proportionnalité):** و يعني ذلك أن كل نشاط قد يعتبر مستقلا عن الآخر , ذلك أن معيار الإنجاز هو حاصل جمع المساهمات العوامل المختلفة , كذلك فإن الكميات التي يتم استخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع احتياجات العوامل المختلفة من كل من هذه الموارد. فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة من منتج معين , فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا المنتج, و هذا الافتراض هو أساس افتراض الإضافية.

[1] Gerald Baillargeon, opcit, , p24

- **التجميع( additivité)**: ويعني هذا الافتراض أنه لا يوجد تداخل بين الأنشطة المختلفة، ما يستلزم أن الاثر الكلي يتم الحصول عليه بجمع الآثار الخاصة لكل متغير .فاذا مثلا كان الربح المحقق من بيع وحدة واحدة من المنتج الأول هو 3وحدات نقدية و الربح المحقق من بيع وحدة واحدة من المنتج الثاني هو 5وحدات نقدية فسيكون الحال كذلك سواء تم بيع المنتج الاول بمفرده أو المنتج الثاني بمفرده أو هما معا ، فمن الممكن مثلا أن يؤدي بيع المنتج الأول الى تغير اقبال الزبون على المنتج الثاني وفي هذه الحالة يتأثر الربح المحقق من مبيعات المنتج الأول و الربح المحقق من المنتج الثاني في حالة بيع كل منهما بمفرده أو بيعهما معا ، فاذا كان بيع الوحدة من المنتج الأول هي 3 في حالة بيعه منفردا فقد يصبح 3.5 في حالة بيعه مع المنتج الثاني.
- **قابلية التجزئة(divisibilité)**: يقصد بهذه الفرضية أن مستويات النشاط تتيح لمتغيرات القرار أن تأخذ قيم كسرية ، أي ليس بالضرورة أن تكون أعداد صحيحة ، لهذا يعتبر نموذج البرمجة الخطية نموذج مستمر . و اذا كان من الصعب انتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك يتم اللجوء الى استخدام الى أساليب أخرى كالبرمجة بالأعداد الصحيحة التي تعتبر حالة خاصة من البرمجة الخطية حيث تضمن الحصول على قيم صحيحة لكل متغيرات المسألة.
- **التأكد التام (certitude)**: يفترض النموذج الخطي أن كافة عناصر المشكلة محدودة ومؤكدة , فالشخص القائم بتعريف المشكلة لا تواجهه عملية التوقع حيث أنه يفترض العلم التام بالظروف و العلاقات التي سوف تسود في المستقبل, و منه يجب أن تكون الأرقام الموجودة في دالة الهدف (مساهمات العوامل ) و المحددات أو القيود (احتياجات العوامل و المصادر المتوفرة ) معروفة وثابتة و غير قابلة للتغيير أثناء فترة معالجة المشكلة موضوع البحث .

## II-.صياغة نموذج البرمجة الخطية:

### 1. خطوات صياغة نموذج البرمجة الخطية:

ان صياغة مشكلة تسييرية معينة بشكل مسألة برمجة خطية تقتضي الى تطوير نموذج رياضي يمثل مكونات المشكلة المراد حلها ، و الذي يعتمد بدرجة كبيرة على الفهم الدقيق للمشكلة التي يواجهها المسير بحيث يوفر له نوعين من المعلومات، وهما:

- ✓ أ/. معلومات خاصة بالهدف المراد تحقيقه من خلال المسألة ( المشكلة) ، فمثلا في حالة البحث عن تحقيق أقصى ربح نحتاج الى المعلومات الخاصة بالربح الوحدوي مثلا، و اذا كان الهدف تخفيض التكاليف يجب توفر معلومات حول التكلفة الوحدوية .
- ✓ **ب/.** معلومات تتعلق بالقيود ، و هي تمثل المعلومات الخاصة بالاستخدامات وفق الامكانيات الممكنة و التي يشترط فيها عدم تجاوز الكميات المتاحة ، فمثلا استخدام ساعات العمل في العملية الانتاجية يجب أن

لا تتجاوز عدد الساعات المتوفرة أو عدد الوحدات التي يمكن انتاجها و التي يجب أن تفوق مستوى معين و الذي يتحدد من طرف المؤسسة و يجنبها الوقوع في خسارة مثلا.

وعلى العموم، فان صياغة البرنامج الخطي يستدعي تحليل مشكلة الدراسة عبر الخطوات التالية :[1]

- **الخطوة الأولى: عن ماذا نبحث أو ماهي المجاهيل التي تهدف المسألة الى ايجاد قيم لها؟**

تتعلق هذه الخطوة بتحديد ماهية النشاطات المتعلقة بالمسألة حيث يمكن تمثيل كل نشاط بواسطة متغير وحيد ، و التي يجب أن تتم بطريقة واضحة و دقيقة مع تعريف وحدات القياس المستعملة و أي خطأ في تحديدها يؤدي الى وضع نموذج خاطئ ، لذا تعتبر هذه الخطوة من أهم مراحل صياغة النموذج .

- **الخطوة الثانية: ما هو الهدف الذي تصبو المؤسسة الى تحقيقه؟**

و تعني تحديد المعيار المتبع في قياس المتغيرات ، أي تحديد الهدف المنشود مع التأكد من استخدام وحدة القياس نفسها ، علما أنه يجب أن يكون في النموذج هدف واحد معبر عه رياضيا في صورة دالة الهدف سواء كانت تعظيم(Max) أو تخفيض (Min).

- **الخطوة الثالثة: ما هي القيود المفروضة على تحقيق هدف المسألة؟**

ترتبط هذه الخطوة بتحديد قيود المسألة من خلال بناء مختلف المعادلات و المتراجحات التي تقيد القيم التي يمكن أن تأخذها مختلف المتغيرات، و ذلك بإدراج كل من الكميات المتاحة لمختلف الموارد و المعبر عنها بالثوابت التي تكون على الجانب الأيمن من القيد، و استغلال الموارد من طرف مختلف المنتجات في الطرف الأيسر من القيد. مع الاشارة الى أن شرط عدم السلبية يجب أن يعبر عنه بقيد أخير في النموذج .

- **الخطوة الرابعة: التحقق من فرضيات نموذج البرمجة الخطية**

بمعنى آخر ، مراعاة توفر شرط خطية النموذج ( دالة الهدف و القيود) ، و في الحقيقة يمكن تجاوز بعض الفرضيات اذا رأينا أنها لا تبعدنا بشكل كبير عن الحل الأمثل .

- **الخطوة الخامسة: كتابة النموذج الخطي للمسألة**

جمع كل المعطيات على الشكل الرياضي للنموذج (دالة الهدف، القيود وشرط عدم السلبية) و التحقق من عدم نسيان أي عنصر من عناصر المسألة.

**ان اتباع هذه الخطوات في صياغة النموذج الخطي سوف يقلل الى حد كبير من حجم الأخطاء التي يمكن أن نقع فيها . و قد تم التوسع فيها نظرا لأهميتها، الا أنه يمكن صياغة النموذج من خلال الاجابة على الأسئلة الثلاثة السابقة و التي سوف يتم تطبيقها على المثاليين التاليين.**

[1] Michel Nedzela, ***introduction a la science de la gestion, méthodes déterministes en recherche opérationnelle***, 2édition, presses de l'université du Québec , 1984, pp 72, 73

**مثال رقم(01):**

تقوم مؤسسة بصناعة الطاولات و الكراسي ، بحيث انتاج طاولة واحدة يتطلب استعمال 2وحدات خشبية و تستغرق في ورشة التصنيع 3ساعات عمل ، بينما يتطلب انتاج كرسي واحد 1صفيحة خشبية و 6ساعات عمل بورشة التصنيع. ويتوفر أسبوعيا لدى المؤسسة 1000صفيحة خشبية و 2400ساعة عمل في ورشة التصنيع، كما أن الربح الوحدوي للطاولات و الكراسي على الترتيب هو 20، 30 وحدة نقدية.

**المطلوب**: صياغة المسألة في شكل نموذج البرمجة الخطية من أجل تحديد البرنامج الانتاجي الأمثل الذي يعظم أرباح المؤسسة.

**الحل:**

- ✓ لتسهيل فهم المسألة نضعها في شكل جدول ( نعتمد على هذه الخطوة في هذا التمرين فقط لتعلم الحل بسهولة)

| المنتوج/ الموارد | مادة الخشب | ورشة التصنيع | الربح الوحدوي |
|---|---|---|---|
| **الطاولات** | 2 | 3سا | 20و.ن |
| **الكراسي** | 1 | 6سا | 30و.ن |
| **كميات و ساعات العمل المتاحة أسبوعيا** | 1000وحدة | 2400سا | |

- ✓ نحاول بناء النموذج الرياضي للمسألة من خلال الاجابة عن الأسئلة الثلاثة السابقة:

**أولا/ تحديد المتغيرات : عن ماذا نبحث أو ماهي المجاهيل التي تهدف المسألة الى ايجاد قيم لها؟**

من خلال نص المسألة نلاحظ أن نشاط المؤسسة يكمن في تصنيع الطاولات و الكراسي بحيث أن ربح الوحدة الواحدة منهما معلوم للمؤسسة ،في حين أن عدد الوحدات الواجب انتاجها لكليهما و الذي يحقق الربح الاجمالي هو المجهول في المسألة . و عليه فأن متغيرات المسألة يمكن التعبير عنها كما يلي:

. $X_1$: عدد الوحدات الواجب انتاجها أسبوعيا من الطاولات

. $X_2$ : عدد الوحدات الواجب انتاجها أسبوعيا من الكراسي

**ثانيا/ تحديد دالة الهدف: ما هو الهدف الذي تصبو المؤسسة الى تحقيقه؟**

ان الهدف الاساسي للمؤسسة هو تعظيم الربح الناتج عن الوحدات الممكن انتاجها من المنتوجين ، أي ان :

الربح الاجمالي = ربح الطاولات+ ربح الكراسي

=( ربح الوحدة الواحدة من الطاولات ×عدد الوحدات الواجب انتاجها من الطاولات) +( ربح الوحدة الواحدة من الكراسي ×عدد الوحدات الواجب انتاجها من الكراسي)

وعليه يمكن ترجمة الصيغة اللغوية لدالة الهدف في شكل رياضي كما يلي :

$$MaxZ = 20\, x_1 + 30\, x_2$$

**ثالثا/ تحديد القيود: ما هي القيود المفروضة على تحقيق هدف المسألة؟**

ان تحقيق أعظم قيمة لدالة الهدف في هذه المسألة يجب أن يتم في ظل احترام القيود المفروضة على الهدف , و المتمثلة في :

- **قيد مادة الخشب**: يتم التعبير عن هذا القيد بطرفين:

1. طرف الاستخدامات ( الطرف الايسر):الذي يمثل مجموع الوحدات التي يتطلبها انتاج المنتوجين ، بتعبير لغوي نقول:

عدد الوحدات من الخشب المخصصة للطاولات+ عدد الوحدات من الخشب المخصصة للكراسي

=

(عدد وحدات الخشب المخصصة لإنتاج طاولة واحدة ×عدد وحدات المنتجة من الطاولات) +(عدد وحدات الخشب المخصصة لإنتاج كرسي واحد ×عدد وحدات المنتجة من الكراسي)

=

$$2\, x_1 + x_2$$

2.طرف المتاحات أو الامكانيات( الطرف الأيمن ) الذي يمثل الوحدات المتاحة من مادة الخشب الواجب عدم تجاوزها ( أي عدم استخدام أكثر مما هو متاح) و المقدرة بـ 1000وحدة.

و بتركيب طرفي القيد ( الاستخدامات و المتاحات) تكون العبارة الرياضية لهذا القيد وفق الصياغة التالية:

$$2\, x_1 + x_2 \leq 1000$$

- **قيد ورشة التصنيع**: بنفس الطريقة المتبعة في صياغة القيد الأول يتم التعبير عن قيد ساعات العمل :

طرف الاستخدامات: و يساوي هنا:

عدد ساعات العمل المخصصة للطاولات+ عدد ساعات العمل المخصصة للكراسي

=

(عدد ساعات العمل المخصصة لطاولة واحدة ×عدد وحدات المنتجة من الطاولات) +( عدد ساعات العمل المخصصة لكرسي واحد× عدد وحدات المنتجة من الكراسي)

=

$$3\, x_1 + 6\, x_2$$

طرف المتاحات: الزمن المتاح و الذي لا يمكن تجاوزه بأي حال من الأحوال هو 2400ساعة عمل أسبوعيا.

وبتركيب طرفي القيد ، نكتب:

$$3\, x_1 + 6\, x_2 \leq 2400$$

- قيد عدم سلبية المتغيرات: بما أن المتغيرات المستعملة في البرنامج تعبر عن مقادير فيزيائية ( وحدات) فلا يمكن أن تكون اشارتها سالبة ، و عليه نكتب:

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

✓ كتابة البرنامج الخطي بناء على الخطوات السابقة بالشكل التالي:

$$MaxZ = 20 x_1 + 30 x_2$$

$$\begin{cases} 2 x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 3 x_1 + 6 x_2 \leq 2400 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ بعد التأكد من عدم اهمال أي عنصر من عناصر المسألة و مراجعتها مع النموذج، يمكن التحقق من توفر الفرضيات الأساسية للنموذج الخطي: ( نستعملها في هذا التمرين فقط من أجل التوضيح لهذه النقطة).

. الفرضية التناسبية: محققة لأن كل معاملات دالة الهدف و المعاملات التقنية ثابتة.

. فرضية التجميع: محققة بحيث كل نشاط مستقل عن الآخر ، فكل منتج لا يدخل في انتاج منتج آخر.

. فرضية قابلية التجزئة: محققة لأن المتغيرات مستمرة( عدد وحدات).

**مثال رقم(02):**

قررت مؤسسة وطنية شراء نوعين من الآلات حيث تكلفة شراء النوع الأول و الثاني على الترتيب هو 3000دج و 1000دج. يمكن لآلة من النوع الأول أن تنتج 60وحدة يوميا و 40وحدة بالنسبة للآلة من النوع الثاني ، كما تريد المؤسسة شراء على الاقل 3آلات من النوع الثاني وهذا لتحقيق انتاج يومي لا يقل عن 2000وحدة.

**المطلوب:** تحديد عدد الآلات الواجب شراؤها من النوعين من لأجل تحقيق أقل تكلفة.

**الحل:**

✓ **تحديد المتغيرات:**

يتمثل القرار في هذا المثال في تحديد عدد الآلات الواجب شراؤها، لذا نفترض أن :

$x_1$: عدد الآلات من النوع الأول الواجب شراؤها

$x_2$: عدد الآلات من النوع الثاني الواجب شراؤها

✓ **تحديد دالة الهدف:**

بما أن الهدف في هذه المسألة هو تخفيض تكاليف شراء النوعين من الآلات ،فعليه تكون الصيغة كالتالي:

$$MinZ= 3000x_1 + 1000 x_2$$

✓ **تحديد القيود:**

قيد الانتاج اليومي: $60x_1 + 40x_2 \geq 2000$

قيد عدد آلات النوع الثاني: $x_2 \geq 3$

قيد شرط عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq 0$

## III. طرق حل البرنامج الخطي:

بعد صياغة النموذج للمشكلة و المتضمنة بطبيعة الحال بحث العلاقات المنطقية المتبادلة فيما بين العديد من المتغيرات الواقعة تحت تأثير قيود نوعية وكمية و غيرها ،تأتي خطوة حله التي تعنى بإيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود سواء كانت الدالة في حالة تعظيم أو في حالة التخفيض، وهذا يكون باستخدام احدى أهم طرق البرمجة الخطية وهما:

- ✓ طريقة السمبلاكس(méthode du simplexe)
- ✓ الطريقة البيانية التي تعتبر مدخلا لفهم طريقة simplexe التي تكون عادة معقدة و صعبة الى حد ما ، كما تعطي تصورا عن صورة احتمالات الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية

### 1. الطريقة البيانية:

تعتمد الطريقة البيانية على التمثيل التصويري لمسألة البرمجة الخطية ولكنها لا تطبق الا على الحالات البسيطة حيث أن التمثيل البياني لا يمكن أن يتجاوز السطح المحدد بمحوري الاحداثيات الأفقي و الرأسي، لذلك فان استخدامها في الحياة العملية معدومة لان عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جدا تفوق المتغيرين . و سنقوم بتوضيح الخطوات العملية للطريقة البيانية وفقا لنوعي دالة الهدف لمسائل البرمجة الخطية:

#### أولا. في حالة التعظيم:

لحل برنامج خطي في حالة التعظيم بالطريقة البيانية نتبع ما يلي:[1]

- تمثيل كل متغير بأحد الإحداثيات ( الأفقي أو العمودي) ، وهنا من الضروري أن يعلم الدارس أن الأخذ بعين الاعتبار بقيد عدم سلبية المتغيرات يطلب أن يقع المتغيرين في الربع الأول من الرسم البياني( أي الجهتين الموجبتين من المحورين).
- تمثيل كل قيد بخط مستقيم بعد تحويله من متباينة الى معادلة ، وذلك بإيجاد نقطتين لكل قيد يتم تعيين أحدهما على المحور الافقي و الآخر على المحور العمودي . وبشكل مبسط نأخذ الجزء الأول من القيد الذي يكون على شكل المساواة ونضع أحد المتغيرات مساو للصفر ، فنتمكن من تحديد قيمة المتغير الثاني و العكس صحيح.

---

[1] Amor Farouk Benghezal , ***programmation linéaire***, 2édition, office des publications universitaires, Alger, 2006 , pp16,17

- رسم كل قيد على الرسم البياني بالتوصيل ما بين النقاط المستخرجة، ثم تحديد مجال الحل للقيد حسب طبيعته حيث:
  - اذا كان القيد من نوع أقل من أو يساوي فان مجال الحل يقع تحت القيد باتجاه نقطة الأصل ( المساحة الواقعة على يسار المستقيم).
  - اذا كان القيد من نوع أكبر من أو يساوي فان مجال الحل يقع فوق القيد نقطة الأصل( المساحة الواقعة على يمين المستقيم) .
  - اذا كان القيد من نوع مساواة فان مجال الحل يقع على القيد نفسه .
- تحديد منطقة الحلول المشتركة التي تظهر من تقاطع الخطوط المستقيمة الممثلة للقيود، فهي تمثل مساحة تستجيب لشروط جميع قيود المشكلة.
- ايجاد الحل الأمثل الذي يجعل دالة الهدف في نهايتها العظمى باتباع احدى الطريقتين التاليتين:[1]
  - **الطريقة الأولى**: وهي طريقة بسيطة وسهلة جدا تقوم على تعويض احداثيات نقاط أركان منطقة الحلول الممكنة بدالة الهدف ، ومن ثم اختيار النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف.
  - **الطريقة الثانية**: نرسم مستقيم لدالة الهدف على نفس المعلم يدعى بالمستقيم ($\Delta$ ) ، و الذي يتم الحصول عليه بجعل الدالة معدومة ، أي أن $Z=0$، ثم نقوم بتحريكه بصفة متوازية اتجاه رؤوس منطقة الحلول الممكنة وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة هي آخر نقطة يصل اليها المستقيم.

ولتطبيق هذه الخطوات سنستعين بمثالنا السابق رقم 01 :

**مثال**:

النموذج الخطي للمسألة: حيث

$X_1$ : عدد الوحدات الواجب انتاجها أسبوعيا من الطاولات

$X_2$. : عدد الوحدات الواجب انتاجها أسبوعيا من الكراسي

$$MaxZ = 20\,x_1 + 30\,x_2$$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 3\,x_1 + 6\,x_2 \leq 2400 \\ x_1\,,\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ تمثيل قيود البرنامج بخط مستقيم:

. نقاط القيد الأول( مادة الخشب): $2\,x_1 + x_2 \leq 1000$

[1] عبد الستار أحمد محمد الآلوسي ، *أساليب بحوث العمليات* ، *الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار*، ط1، دار القلم للنشر و التوزيع، الامارات العربية المتحدة، 2003، ص 64.

نحول المتباينة الى مساواة : $2\,x_1 + x_2 = 1000$

نفرض أن $x_1 = 0$ و نعوض في معادلة القيد فتكون قيمة $x_2 = 1000$، وهذه هي النقطة الأولى ، و بنفس الأسلوب نستخرج النقطة الثانية بافتراض أن $x_2=0$ فتكون قيمة $x_1= 500$.

ب. نقاط القيد الثاني( ورشة التصنيع) : $3\,x_1+ 6\,x_2 \leq 2400$

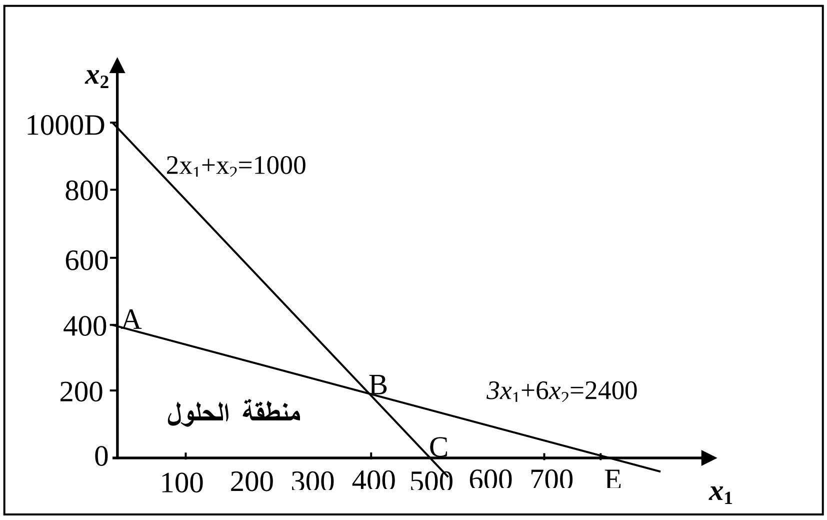
يتم استخراج النقاط بنفس الاجراءات التي طبقت على القيد الأول ، فبافتراض أن $x_1=0$ فان قيمة $x_2= 400$ ، وبافتراض أن $x_2=0$ فان قيمة $x_1= 800$.

ويمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي:

| القيود | $x_1= 0$ | $x_2=0$ |
|---|---|---|
| $2\,x_1 + x_2=1000$ | 1000 | 500 |
| $3\,x_1+ 6\,x_2= 2400$ | 400 | 800 |

✓ تمثيل القيود على الرسم البياني و تحديد منطقة الحل لكل قيد:

وبما أن قيدي المثال من نوع أقل من أو يساوي فان مجال الحل لكل منهما يقع باتجاه نقطة الأصل التي يمكن التعبير عنه بأسهم تتجه نحو هذا المجال، و الشكل التالي يبين تمثيل القيدين:




✓ تحديد منطقة الحلول المشتركة :

حسب الرسم البياني أعلاه ، فان منطقة الحل لقيد مادة الخشب هي الواقعة الى أسفل و يسار المستقيم ( DC) و المحددة بالمساحة (OCD) ، أما منطقة القبول الممكنة لقيد ورشة التصنيع فهي المنطقة الواقعة الى أسفل و يسار المستقيم ( AE) و المحددة بالمساحة (OAE) . وبالتالي فان منطقة القبول المشتركة للقيدين معا تتحدد بالمساحة ( OABC) حيث أن أي نقطة ضمن هذه المنطقة المضللة (داخلها أو على حدودها) يمكن اعتبارها حلا ممكنا تتحقق فيه قيدي المسألة

✓ تحديد الحل الأمثل:

- الطريقة الأولى: حسب مثالنا هناك أربعة نقاط تمثل أركان منطقة الحلول الممكنة حيث تظهر نتائج اختبار هذه النقاط في دالة الهدف لتحديد نقطة الحل الأمثل في الجدول التالي:

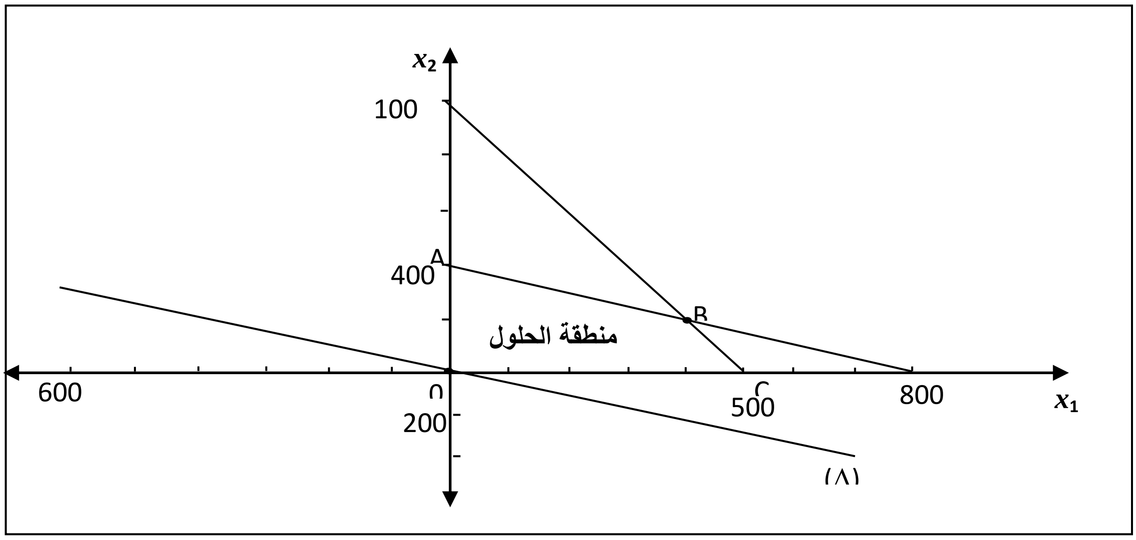
| النقاط | احداثيات النقاط | قيمة دالة الهدف |
|---|---|---|
| **0** | o :( $x_1$=0, $x_2$=0) | $MaxZ_O$=0 |
| **A** | A:( $x_1$=0, $x_2$=400) | $MaxZ_A$=12000 |
| B | **B**:( **$x_1$=400, $x_2$=200**) | **$MaxZ_B$=14000** |
| **C** | C:( $x_1$=500, $x_2$=0) | $MaxZ_C$=10000 |

وبمقارنة الحلول المختلفة عند النقاط O,A,B,C يتبين أن الحل الأمثل يكون عند النقطة B أي أن البرنامج الانتاجي الأمثل للمسألة يتمثل في انتاج 400 طاولة و 200 كرسي مع تحقيق أقصى ربح قدره 14000وحدة نقدية .

- الطريقة الثانية: نرسم مستقيم لدالة الهدف على نفس المعلم يدعى بالمستقيم (Δ ) ، و الذي يتم الحصول عليه بجعل الدالة معدومة ، أي أن Z=0، وعليه فالمستقيم (Δ ) يمر بالنقطتين:

| $20\ x_1 + 30\ x_2=0$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 300 | 200- |
| 600- | 400 |

ويكفي تحديد نقطة واحدة فقط لكونه يمر الزاما بنقطة المبدأ



و بتحريك المستقيم($\Delta$ ) ،نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول الممكنة هي النقطة B ،و بالتالي تشكل لنا الحل الأمثل ، حيث يمكن لنا ايجاد احداثياتها اما :

. هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة $x_1$ وامداد مستقيم موازي للمحور الأفقي انطلاقا من النقطة B فنجد قيمة $x_2$.

. حل معادلتي المستقيمين باعتبارها تمثل نقطة تقاطع القيدين:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1000 \\ 3x_1 + 6x_2 = 2400 \end{cases}$$

وبحلها نجد أن $x_1 = 400$ و $x_2 = 200$ وهما القيمتان اللتان تجعلان دالة الهدف في أعلى قيمة لها .

✓ شرح الحل الأمثل و التحقق منه :

يكون ذلك من خلال التعويض بإحداثيات الحل في كل من دالة الهدف و قيود المسألة كما هو مبين أدناه:

**. دالة الهدف:** $MaxZ = 20x_1 + 30x_2$

$$20(400) + 30(200) = 14000$$

**. القيد الأول:** $2x_1 + x_2 \leq 1000$

$$2(400) + 200 \leq 1000$$

$$1000 \leq 1000$$

وعليه ، فان القيد الأول محقق كما أن كمية مادة الخشب المتاحة تساوي كمية مادة الخشب المستغلة. وهذا يعني أن هذه المادة قد استغلت بالكامل، ويسمى القيد في هذه الحالة **بالقيد المشبع**(**contrainte saturée**).

**. القيد الثاني:** $3x_1 + 6x_2 \leq 2400$

$$3(400) + 6(200) \leq 2400$$

$$2400 \leq 2400$$

وعليه ، فان القيد الثاني محقق كما أن زمن ورشة التصنيع المتاح يساوي الزمن المستغل ، ما يعني ذلك أن زمن ورشة التصنيع قد استغل بالكامل. و بذلك فهو قيد مشبع.

**. قيد عدم سلبية المتغيرات:** محقق هو أيضا حيث قيمة اشارة المتغيرات موجبة : $x_1 = 400$ ، $x_2 = 200$ .

وبالتالي، فان هذا الحل مقبول نظرا لتحقيقه جميع قيود المسألة من جهة و تعظيمه للأرباح من جهة أخرى.

## ثانيا. في حالة التخفيض:

تتشابه خطوات حل مسائل التخفيض بالطريقة البيانية مع استخدامها في حل مسائل التعظيم كما سبق الاشارة اليها في الحالة السابقة، الا أن هناك فارقين أساسيين ناتجين عن اختلاف طبيعة كل من داله الهدف والقيود بحيث نتعامل هنا مع دالة من نوع تخفيض و قيود من نوع أكبر من أو يساوي[1]. لذا فان الفارقين يتمثلان في :

[1] محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، ***بحوث العمليات و تطبيقاتها في ادارة الاعمال***، ط1، دار الوراق، الاردن، 2004، ص29

- منطقة الحلول الممكنة و التي تقع فوق مستقيمات معادلات القيود ( أي على يمين المستقيم).
- الحل الأمثل الذي يتواجد دائما في اقرب نقطة الى الاصل ضمن منطقة الحلول الممكنة لأنها تعطي أقل قيمة ممكنة لدالة الهدف.

و لتوضيح الفروقات بين استخدام طريقة الحل البياني في حل مسائل التعظيم و مسائل التخفيض سنعتمد على المثال السابق رقم (02):

**مثال** :

النموذج الخطي لمثالنا على الشكل التالي:

$$MinZ= 3000x_1 + 1000\ x_2$$

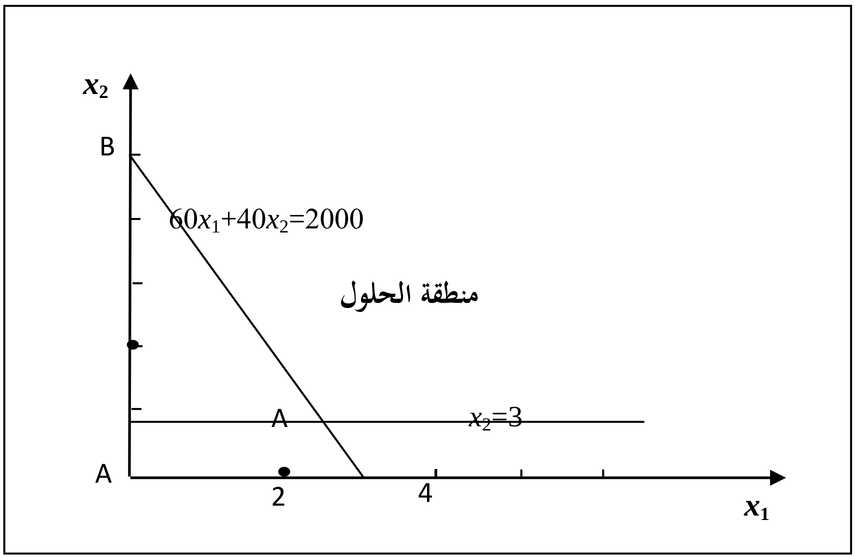
$$\begin{cases} 60\ x_1 + 40x_2 \geq 2000 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ تمثيل كل قيد بخط مستقيم وذلك من خلال ايجاد النقاط الممثلة لكل قيد بنفس القواعد التي تم شرحها في حالة التعظيم:

بالنسبة للقيد الأول : نفرض أن $x_1= 0$ و نعوض في معادلة القيد فتكون قيمة $x_2= 50$، وهذه هي النقطة الأولى ، و بنفس الأسلوب نستخرج النقطة الثانية بافتراض أن $x_2=0$ فتكون قيمة $x_1=100/3$.

أما القيد الثاني : $x_2=3$ هو خط مستقيم موازي للمحور الأفقي

✓ رسم القيود على المعلم ، ثم تحديد مجال الحل لكل قيد و التي تنحصر بين الخط المستقيم صعودا الى الأعلى على اعتبار ان اشارة القيود من نوع ($\geq$) .



- ✓ تحديد منطقة الحلول الممكنة التي تمثل المنطقة غير المحددة من الأعلى اذ تحددت بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل لكون المتراجحات من نوع أكبر من أو يساوي ومن ثم يوجد عدد غير منته من الحلول في هذه المنطقة.
- ✓ ايجاد الحل الأمثل الذي يقع الحل الامثل على الحدود الداخلية لمنطقة الحلول الممكنة الغير محددة . والتي يمكن تحديدها بالنقطتين A, B:

| النقاط | احداثيات النقاط | قيمة دالة الهدف |
|---|---|---|
| A | A:( $x_1$=94/3, $x_2$=3) | $MinZ_A$=97000 |
| B | **B:( $x_1$=0, $x_2$=50)** | **$MinZ_B$=50000** |

وبالتالي فان أقل تكلفة تكون عند النقطة B ما يعني شراء 50آلة من النوع الثاني فقط لتحقيق أقل تكلفة قدرها 50000وحدة نقدية

## 2. طريقة السمبلاكس:

هي عبارة عن خوارزمية تبحث عن الحل الأمثل بطريقة متدرجة بدءا من الحل الممكن الأولي وصولا الى الحل النهائي الذي لا يمكن تحسين دالة الهدف بعده على الاطلاق، من خلال فحص ذروات منطقة الامكانات بشكل متسلسل و باستخدام مفاهيم رياضية بسيطة وثابتة ، معتمدة بذلك على قاعدة الطريقة البيانية التي تنص على أن أي حل لمسألة البرنامج الخطي سيكون على أحد أركان منطقة الحلول الممكنة فقط.

ويمكن تلخيص الخطوات التي تتضمنها طريقة السمبلاكس في الخطوات الأربع التالية:[1]

- ✓ تحويل النموذج الخطي الى نموذج معياري
- ✓ ايجاد الحل الأولي الممكن.
- ✓ اختبار أمثلية الحل.
- ✓ تحسين الحل الى غاية بلوغ الحل الأمثل.

وكل خطوة من هذه الخطوات تتم وفق عدة عمليات حسابية في جداول تسمى بجداول السمبلاكس ذات الشكل العام التالي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | معاملات دالة الهدف($C_j$) |
| $C_k$ | V | $b_i$ | متغيرات النموذج ($X_i$, $e_i$, $A_i$) |
| معاملات دالة الهدف المقابلة للمتغيرات الاساسية | المتغيرات الاساسية المجهولة | كمية الموارد | مصفوفة القيود($a_{ij}$) |
| قيمة دالة الهدف: $Z=\sum C_k b_i$ | | | سطر التقييم: $\Delta C = \sum C_k a_{ij} - c_j$ |

[1] Michel Nedzela, opcit , pp145 ;148

ولتبسيط خطوات ايجاد الحل الأمثل بطريقة السمبلاكس سنعمل على توضيحها وفقا لنوعا دالة الهدف لمسائل البرمجة الخطية:

## أولا. في حالة التعظيم:

سنوضح خطوات تطبيق طريقة السمبلاكس في حالة التعظيم انطلاقا من المثال العددي الذي استخدم في شرح الطريقة البيانية ، رغبة في مقارنة النتيجة المترتبة عن هاتين الطريقتين :

**مثال** :كان البرنامج الخطي هو:

$$MaxZ = 20\,x_1 + 30\,x_2$$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 3\,x_1 + 6\,x_2 \leq 2400 \\ x_1\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **الخطوة الأولى: تحويل النموذج الخطي الى نموذج معياري**

يتم ذلك من خلال تحويل جميع المتراجحات الى معادلات بإضافة متغيرات جديدة غير سالبة تسمى بمتغيرات الفجوة(**Les variables d'écart**) الى الطرف الأيسر للمتراجحات ( أي الى الطرف الأقل من المتراجحة لكي تتحول الى معادلة) ، و التي تعبر اقتصاديا عن الطاقة العاطلة أو غير المستغلة حيث أن عائدها يساوي الصفر (أي أن قيمتها في دالة الهدف معدومة). يرمز لها بالرمز e. وعليه يصبح النموذج المعياري لهذه المسألة بالشكل التالي:

$$MaxZ = 20\,x_1 + 30\,x_2 + 0\,e_1 + 0\,e_2$$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 + \mathbf{e_1} = 1000 \\ 3\,x_1 + 6\,x_2 + \mathbf{e_2} = 2400 \\ x_1\,,\ x_2\,,\ e_1,\ e_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **الخطوة الثانية: ايجاد الحل الأولي الممكن**

يقصد بها اعداد جدول الحل الأولي من خلال تنظيم بيانات النموذج المعياري في حالة التعظيم كما هو مبين في الشكل التالي ، مع مراعاة أن تكون متغيرات الفجوة كمتغيرات أساسية أما متغيرات القرار فتكون خارج خانة المتغيرات الأساسية( خارج الاساس) :

جدول الحل رقم **1**:

| | | | 20 | 30 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $\mathbf{x_2}$ | $e_1$ | $e_2$ |
| 0 | $\mathbf{e_1}$ | 1000 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | $\mathbf{e_2}$ | 2400 | 3 | **6** | 0 | 1 |
| | Z= 0 | | -20 | **-30** | 0 | 0 |

كما نلاحظ من الجدول أعلاه أنه يناظر نقطة الأصل في طريقة الحل البياني ، وهي الحالة التي تعبر عن عدم وجود أي انتاج (أي $x_1=0,\ x_2=0$)، وبالتالي لم يتم تحقيق أي ربح.

- **الخطوة الثالثة: اختبار الأمثلية**

يتحقق شرط الأمثلية في مسائل التعظيم Max عندما تكون جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة (أي $\Delta C\geq 0$). ووجود قيمة سالبة في هذا السطر يعني أن هناك امكانية لتحسين الحل أي الانتقال من حل مقبول الى آخر أكثر قبولا و اقترابا من الحل الأمثل بهدف زيادة قيمة دالة الهدف .وفي مثالنا نلاحظ أن سطر التقييم للجدول الأولي يضم أكثر من قيمة سالبة، ما يعني امكانية تحسين الحل من خلال اعداد جدول جديد (ثاني) يمثل حلا محسنا .

- **الخطوة الرابعة: تحسين الحل**

للقيام بهذه الخطوة ، يتطلب الأمر تحديد ثلاثة عناصر و المتمثلة في:

✓ المتغيرة الداخلة(variable entrante): هي تلك المتغيرة خارج الأساس التي تتحول إلى متغيرة أساس موجبة يتم اختيارها في حالة التعظيم عن طريق اختيار **أقل قيمة سالبة من قيم سطر التقييم** ( أكبر قيمة بالقيمة المطلقة) . وحسب مثالنا هذا فان $x_2$ تمثل المتغيرة الداخلة ، و يسمى عمودها **بعمود المحور**.

✓ المتغيرة الخارجة (variable sortante) : هي متغيرة أساس موجبة و التي تتحول إلى متغيرة خارج الأساس يتم تحديدها من خلال قسمة عناصر عمود الثوابت ($b_i$) على عناصر عمود المتغيرة الداخلة ($a_{ijk}$) و اختيار **أصغر حاصل قسمة موجب** لأنه يحقق جميع قيود المسألة أي:

$\mathbf{Min\ b_i/\ a_{ijk}}$ حيث تشير k الى عمود المتغيرة الداخلة

و السطر الذي يحقق تلك النتيجة يسمى **بسطر المحور**. وعليه فان:

$$Min\{1000/1=1000,\ 2400/6=400\}=400$$

وهذا يعني أن $e_2$ تمثل المتغيرة الخارجة التي ستحل مكانها المتغيرة الداخلة $x_2$

✓ نقطة المحور(pivot): هي نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة. وكما هو واضح فان نقطة المحور هي الرقم 6 في مثالنا.

وبناءا على تحديد العناصر الثلاثة السابقة يمكن تشكيل جدول سمبلاكس جديد كما يلي:

✓ قسمة عناصر سطر المحور على نقطة المحور فنحصل على سطر ا $x_2$ كما يلي:

$$x_2 = 400 \quad 1/2 \quad 1 \quad 0 \quad 1/6$$

✓ جعل كل عناصر عمود المحور أصفارا ما عدى نقطة المحور.

✓ حساب بقية عناصر المصفوفة و كذلك الثوابت($b_i$) بالعلاقة التالية:

**القيمة الجديدة للعنصر = القيمة القديمة للعنصر –[ ( عنصر سطر المحور× عنصر عمود المحور)÷ نفطة المحور]**

وفقا لهذه العلاقة فان قيم السطر الأول الجديد كما يلي:

$$e_1 = 600 \quad 3/2 \quad 0 \quad 1 \quad -1/6$$

وبالتالي نسجل تلك النتائج في جدول الحل الثاني الموالي ، كما نعيد حساب قيمة كل من $Z$ و $\Delta C$ :

**جدول الحل رقم2:**

| | | | 20 | 30 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ |
| 0 | $e_1$ | 600 | **3/2** | 0 | 1 | -1/6 |
| 30 | $x_2$ | 400 | ½ | 1 | 0 | 1/6 |
| Z= 12000 | | | **-5** | 0 | 0 | 5 |

نلاحظ أن الحل المتوصل اليه في الجدول الثاني قد تحسن بحيث انتقلت قيمته من 0 الى 12000 ، وهو نفس الحل المتوصل اليه بطريقة الرسم البياني الذي يظهر عند النقطة A . وهذا الحل يشير الى أن المؤسسة بإمكانها انتاج 400وحدة من $x_2$ وعدم انتاج أي وحدة من $x_1$ ( لأنها لم تظهر في عمود V) من أجل تحقيق ربح قدره 12000وحدة نقدية. و أما متغيرة الفجوة $e_1$ فتبين أن عدد الوحدات غير المستخدمة من مادة الخشب هو 600وحدة ، في حين متغيرة الفجوة $e_2$ هو متغير غير أساسي لذا كانت قيمته تساوي الصفر ، ما يعني أن زمن ورشة التصنيع قد استغل بالكامل.

**والسؤال الذي يطرح نفسه الآن : هل توصلنا الى الحل الأمثل؟**

والجواب هو أنه مادامت هناك قيم أقل من الصفر في سطر التقييم فان الحل الأمثل لم يتحقق بعد ، مما يتطلب الأمر اجراء خطوة أخرى لتحسينه باتباع نفس الاجراءات السابقة حيث تكون $x_1$ هي المتغيرة الداخلة و $e_1$ المتغيرة الخارجة في حين تمثل القيمة 3/2 نقطة المحور . و بذلك يكون الجدول الثالث بعد اجراء التحويلات المشابهة للخطوة السابقة كما يلي:

**جدول الحل رقم3:**

| | | | 20 | 30 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ |
| 0 | $x_1$ | 400 | 1 | 0 | 2/3 | -1/9 |
| 30 | $x_2$ | 200 | 0 | 1 | -1/3 | 2/9 |
| **Z= 14000** | | | **0** | **0** | **10/3** | **40/9** |

نلاحظ أن جميع عناصر سطر التقييم أكبر أو تساوي الصفر ، ما يعني أنه لا توجد امكانية لتحسين الحل،لذلك فان هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل حيث تكون النتائج المحصل عليها كما يلي:

$$x_1 = 400 ,\ x_2 = 200 ,\ e_1 = 0,\ e_2 = 0 ,\ Z = 140000$$

أي أنه سيتم انتاج 400وحدة من الطاولات و 200وحدة من الكراسي لتحقيق ربح أعظمي قدره 14000وحدة نقدية ،و هذا في ظل استغلال تام لمادة الخشب و زمن ورشة التصنيع ( لأنه لا تظهر أي متغيرة الفجوة في عمود V) و هذه النتيجة نفسها المتوصل اليها في الطريقة البيانية و التي تمثلها النقطة B.

ويمكن التحقق من الحل المتوصل اليه من خلال التعويض في القيود و دالة الهدف:

. دالة الهدف: $MaxZ = 20\, x_1 + 30x_2 \Rightarrow Maxz= 20\times400 + 30\times200= 14000$

. القيد الأول محقق: $2x_1+x_2\leq1000 \Rightarrow 2\times400+200= 1000$

. القيد الثاني محقق : $3x_1+6x_2\leq2400 \Rightarrow 3\times400+ 6\times200= 2400$

. شرط عدم السلبية محقق: فقيم كل من $x_1, x_2$ في الحل النهائي موجبة أما قيم كل من $e_1, e_2$ فهي مساوية للصفر لأنها غير موجودة في الحل النهائي.

## ثانيا. في حالة التخفيض:

تتشابه خطوات حل مسائل التخفيض بطريقة السمبلاكس مع استخدامها في حل مسائل التعظيم كما سبق الاشارة اليها في الحالة السابقة، الا أن هناك فارقين أساسيين والمتمثلين في [1]:

- كتابة الصيغة المعيارية للنموذج الرياضي.
- اختبار أمثلية الحل.

ولتوضيح هذه الفروقات سنعتمد على العددي الذي استخدم في شرح الطريقة البيانية ، رغبة في مقارنة النتيجة المترتبة عن هاتين الطريقتين :

**مثال**: كان البرنامج الخطي كالتالي:

$$MinZ= 3000x_1 + 1000\, x_2$$

$$\begin{cases} 60\, x_1 + 40x_2 \geq 2000 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1 ,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **الخطوة الأولى: تحويل النموذج الخطي الى نموذج معياري**

يتم ذلك من خلال تحويل جميع المتراجحات الى معادلات بطرح متغيرات فجوة من الطرف الأكبر ( أي الطرف الأيسر للمتراجحة) مع اضافة متغيرات جديدة تدعى بالمتغيرات الاصطناعية (variables artificiel ) يرمز له بالرمز A و وجوب اظهارها في دالة الهدف بإشارة موجبة و بمعامل M وهي قيمة كبيرة جدا , وهذا لكي تتحقق مبادئ البرمجة الخطية . اذ أن تحويل القيد ≥ الى الصيغة المعيارية بطرح فقط متغيرة الفجوة يخل بمبدأ عدم سلبية

[1] Michel Nedzela, opcit, p157

المتغيرات في الحل الأولي الذي تكون فيه قيمة المتغيرات $x_n$ مساوية للصفر، وفي هذه الحالة تكون قيمة متغيرة الفجوة تساوي قيمة سالبة ، وهذا أمر غير منطقي.

وبناءا على ذلك يصبح النموذج المعياري لمثالنا على الشكل التالي:

$$MinZ= 3000x_1 + 1000\,x_2 + 0\,e_1 + MA_1 + 0\,e_2 + MA_2$$

$$\begin{cases} 60\,x_1 + 40x_2 - e_1 + A_1 = 2000 \\ x_2 - e_2 + A_2 = 3 \\ x_1\,,\, x_2, e_1, e_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **الخطوة الثانية: ايجاد الحل الأولي الممكن**

يتم تكوين جدول الحل الأولي بنفس القواعد التي تم شرحها في حالة التعظيم مع وجود فارق أساسي يتمثل في أن متغيرات الحل الأساس تصبح المتغيرات الاصطناعية بدلا من متغيرات الفجوة.

و يكون الحل الأولي لنموذج حالتنا كما يلي:

**جدول الحل رقم 1:**

| | | | 3000 | 1000 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $\mathbf{x_2}$ | $e_1$ | $A_1$ | $e_2$ | $A_2$ |
| M | $A_1$ | 100 | 3 | 2 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| M | $\mathbf{A_2}$ | 3 | 0 | **1** | 0 | 0 | -1 | 1 |
| Z= 103M | | | 3M-3000 | **3M-1000** | -M | 0 | -M | 0 |

كما نلاحظ من الجدول أعلاه، أنه عندما $x_1=x_2=0$ و المؤدية الى حل أولي أساسي بـ $A_1=100$ و $A_2= 3$ يعطي قيمة لدالة الهدف قدرها 103M ، وهي تكلفة باهضة للمؤسسة على اعتبار أن رقم M كبير جدا.

- **الخطوة الثالثة: اختبار الأمثلية**

ان الوصول الى الحل الأمثل في مسائل التخفيض مشروط بأن تكون جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة (أي$\Delta C\leq 0$) . وبما أن قيم سطر التقييم في الجدول السابق ليست كلها سالبة أو معدومة ، فهذا يعني عدم تحقق الحل الامثل ، لذلك نتابع البحث عن الحل الأمثل من خلال عملية التحسين الموالية.

- **الخطوة الرابعة: تحسين الحل**

لاجراء عملية التحسين الهادفة الى تخفيض التكاليف عن طريق اخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل .، يتطلب الأمر تطبيق نفس القواعد التي تم شرحها في حالة التعظيم مع وجود فارق وحيد و المتمثل في تحديد المتغيرة الداخلة و التي تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم. فيكون بذلك:

✓ $X_2$ المتغيرة الداخلة لأن القيمة 3M-1000 هي الأكبر في سطر التقييم.

- ✓ $A_2$ المتغيرة الخارجة لأن:

$$Min\ b_i/a_{ijk} = Min\{100/2,\ 3/1\}=3$$

- ✓ القيمة 1 هي نقطة المحور لأنها تمثل نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة.
- ✓ قيم سطر المحور في الجدول الجديد تصبح كالتالي:

$$X_2= 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0$$

- ✓ عمود المحور في الجدول الجديد تصبح قيمه كلها أصفارا ما عدى نقطة المحور .
- ✓ بقية قيم المصفوفة تحسب بالعلاقة السابقة التي تطبيقها في حالة التعظيم ، أي يصبح سطر $A_1$ هو:

$$A_1= 94 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 0$$

وبموجب النتائج السابقة نتحصل على الجدول التالي:

**جدول الحل رقم2:**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3000 | 1000 | 0 | M | 0 | M |
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $A_1$ | $e_2$ | $A_2$ |
| M | $A_1$ | 94 | 3 | 0 | -1 | 1 | 2 | 0 |
| 1000 | $X_2$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| Z= 94M+3000 | | | 3M-3000 | **0** | -M | 0 | 2M-1000 | 0 |

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الحل قد تحس بحيث انخفضت دالة التكاليف من القيمة 103M الى49M+3000 ، و لكنه لم يتم بعد الوصول الى الحل الأمثل نظرا لوجود قيم موجبة في سطر التقييم ، و بالتالي يجب تحسينه بإدخال $X_1$ محل $A_1$ وفق القواعد المعمول بها سابقا . وباجراء التحويلات اللازمة نحصل على جدول الحل الثالث بالشكل التالي:

**جدول الحل رقم3:**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3000 | 1000 | 0 | M | 0 | M |
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $A_1$ | $e_2$ | $A_2$ |
| 3000 | $x_1$ | 94/3 | 1 | 0 | -1/3 | 1/3 | 2/3 | 0 |
| 1000 | $X_2$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| Z= 97000 | | | 0 | 0 | -1000 | 1000-M | 1000 | -M |

نلاحظ من خلال هذا الجدول أنه يتم بعد الوصول الى الحل الأمثل نظرا لوجود قيمة موجبة في سطر التقييم ، و بالتالي يجب تحسينه بإدخال$e_2$ محل $x_1$ وفق القواعد المعمول بها سابقا . وباجراء التحويلات اللازمة نحصل على جدول الحل الرابع بالشكل التالي:

جدول الحل رقم4:

| | | | 3000 | 1000 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $A_1$ | $e_2$ | $A_2$ |
| 0 | $e_2$ | 47 | 3/2 | 0 | -1/2 | ½ | 1 | 0 |
| 1000 | $X_2$ | 50 | 3/2 | 1 | -1/2 | ½ | 0 | 0 |
| **Z= 50000** | | | **-1500** | **0** | **-500** | **500-M** | **0** | **-M** |

واضح أن الحل المتوصل اليه هو الحل الأمثل لأن جميع قيم $\Delta C\leq 0$ اذ لا يمكن ايجاد أية قيمة أخرى للمغيرات تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف و تحترم في نفس الوقت جميع القيود . و يتلخص هذا الحل في:

. عدد آلات النوع الثاني الواجب شراؤها هو 50آلةو وعدم شراء أي آلة من النوع الأول في ظل أدنى تكلفة تتحملها المؤسسة قدرها50000دج. و هذه النتيجة نفسها المتوصل اليها في الطريقة البيانية و التي تمثلها النقطة B.

**ملاحظة رقم 01:** لا يختلف حل النموذج المختلط بطريقة السمبلاكس عن حل النموذج النظامي الا فيما يتعلق بمعالجة أنواع القيود الأخرى التي قد يتضمنها النموذج المختلط ، والتي يمكن أن نلخص القواعد السابقة و الجديدة في الجدول التالي:

**جدول رقم 01: قواعد تحويل أنواع القيود الى معادلات**

| نوع القيد | الاجراء | دالة Max | دالة Min |
|---|---|---|---|
| $\leq$ | +e | $0^e$ | $0^e$ |
| $\geq$ | -e + A | 0e – MA | 0e + MA |
| = | +A | -MA | +MA |

**ملاحظة رقم 02:** ان تطبيق خطوات طريقتي حل البرنامج الخطي لا يمكننا من الوصول دائما الى الحل الأمثل ( وهي الحالة الطبيعية)، و انما قد نتحصل على احدى الحالات الخاصة التي تظهر في الجدول الموالي:

**جدول رقم 02 : الحالات الخاصة بطريقتي الحل البياني و السمبلاكس**

| الحالات الخاصة | الطريقة البيانية | طريقة السمبلاكس |
|---|---|---|
| **تعدد الحلول المثلى** | الخط الممثل لدالة الهدف يوازي الخط الممثل لأحد القيود | معامل أحد المتغيرات غير الاساسية يساوي صفر في سطر التقييم |
| **الانحلال** | وجود قيد فائض لا يؤثر على نقطة الحل الأمثل | واحد أو أكثر من المتغيرات الاساسية يساوي صفر في أحد مراحل الحل أو في المرحلة النهائية |
| **حلول غير محددة** | وجود منطقة حلول ممكنة مفتوحة وبدون نهاية | عدم وجود حاصل قسمة موجب لقيم عمود $b_i$ على قيم عمود المتغيرة الداخلة |
| **عدم وجود حلول** | عدم وجود منطقة حلول ممكنة تحقق جميع القيود | بقاء المتغير الاصطناعي في جدول الحل الأمثل |

## IV . تمارين تطبيقية:

### 1.تمارين محلولة:

**التمرين الأول:** تنتج احدى المؤسسات منتوجا معينا وعليها تحقيق المتطلبات للأشهر الثلاثة القادمة ، على أن الطاقة الانتاجية الشهرية القصوى للمؤسسة هي 18000وحدة وكلفة انتاج الوحدة الواحدة هي 2000وحدة نقدية.

| الشهر | أفريل | ماي | جوان |
|---|---|---|---|
| العدد المطلوب | 6000 | 12000 | 18000 |

تعاني المؤسسة من عدم توفر مكان للتخزين ، لذلك قامت بتأجير مكان للتخزين حيث كلفة تخزين الوحدة الواحدة هي 250و.ن/ شهريا . و يجري حساب الكلفة على أساس العدد الموجود في المخزن في نهاية الشهر ، مع العلم أن المؤسسة لا تمتلك أي مخزون أولي ولا ترغب في الاحتفاظ بمخزون معين .

**المطلوب:** تشكيل النموذج الخطي للمسألة من أجل تخفيض التكاليف.

**التمرين الثاني:** تمتلك مؤسسة ثلاث مصانع لإنتاج المحركات الكهربائية متواجدة في المناطق C,B,A بحيث الطاقة الانتاجية لكل مصنع على الترتيب هي 7000، 6000، 2500 وحدة. وتقوم هذه المؤسسة ببيع منتوجها في ثلاث نقاط بيع هي Y,Z,W حيث يقدر الطلب المتوقع في كل نقطة بيع على الترتيب 4000، 5500، 6000وحدة.

تهدف المؤسسة الى تحديد عدد المحركات الواجب نقلها من كل نقطة انطلاق( المصنع) نحو نقطة وصول معينة(نقاط البيع) وذلك بالأخذ بعين الاعتبار تكاليف القل المختلفة لكل مسار ، والجدول التالي يبين تكاليف النقل الوحدوية لكل مسار:

| نقاط الانطلاق/نقاط الوصول | W | Z | Y |
|---|---|---|---|
| A | 76 | 55 | 82 |
| B | 42 | 25 | 53 |
| C | 31 | 19 | 20 |

**المطلوب:** صياغة البرنامج الذي يسمح باختيار المسارات المثلى التي تخفض تكاليف النقل الكلية الى الأدنى

**التمرين الثالث:** ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ X_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب:**

1. في كل حالة من الحالات التالية بين عندما تحتوي منطقة الحلول على منطقة محددة، عدد غير محددة، لا توجد منطقة:

أ. في جميع القيود المعطاة في المسألة.

ب. اذا غيرنا القيد $x_1+x_2\leq 6$ الى $x_1+x_2\leq 2$.

ج. اذا غيرنا القيد $x_1+x_2\leq 6$ الى $x_1+x_2\geq 6$.

2. في الحالات المذكورة في (1) و التي توجد فيها منطقة حلول، حدد القيم العظمى و الدنيا ل Z .

**التمرين الرابع:** تقوم مؤسسة صناعة الألبسة التقليدية بخياطة نوعين من الألبسة هما C2,C1 وذلك باستعمال مادتين هما M2,M1، حيث الكميات المتاحة منهما هي على الترتيب 100متر/أسبوع و 90متر/أسبوع، وأيضا استخدام ورشتي عمل هما القص و الخياطة ومادة أولية أخرى للتزيين هي M3 .وقد توفرت لدينا المعلومات التالية:

| | M1 | M2 | ورشة القص | ورشة الخياطة | M3 |
|---|---|---|---|---|---|
| C1 | 2متر | 2متر | 2ساعة | 0.5ساعة | / |
| C2 | 1.5متر | 2متر | 3ساعة | 2ساعة | 4ساعة |
| تكلفة الوحدة | 500دج/م | 100دج/م | 15دج/س | 20دج/س | 100دج/س |
| عدد العمال | / | / | 4عمال | 2عمال | 3عمال |

علما أن هؤلاء العمال يشتغلون 8ساعات في اليوم على امتداد 6أيام في الأسبوع، وكان سعر البيع لـ C1 2000دج و ل C2 3000دج.

**المطلوب:** إيجاد حجم الإنتاج الأسبوعي من أجل تعظيم الربح بطريقة السمبلاكس.

**التمرين الخامس:** جزء من الحل الأساسي الأول لجدول السمبلاكس كما يلي:

| $c_k$ | $X_i$ | $b_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $X_3$ | 36 | 6 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $X_4$ | 40 | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $X_5$ | 28 | 2 | 4 | 0 | 0 | 1 |

و جزء من الحل الأمثل لجدول السمبلاكس كما يلي:

| $X_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta C$ | 0 | 0 | 1/2 | 2/5 | 0 | Z=34 |

**المطلوب:** إيجاد دالة الهدف لهذا النموذج.

**الحلول:**

## حل التمرين الأول:

✓ **تحديد المتغيرات:** نفرض أن متغيرات القرار هي:

$X_{11}$: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر أفريل لتسليمها في نفس الشهر

$X_{12}$: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر أفريل لتسليمها في شهر ماي

$X_{13}$: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر أفريل لتسليمها في شهر جوان

$X_{22}$: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر ماي لتسليمها في نفس الشهر

$X_{23}$: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر ماي لتسليمها في شهر جوان

$X_{33}$: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر جوان لتسليمها في نفس الشهر

✓ **كتابة البرنامج الخطي**: يأخذ نموذج هذه المشكلة الشكل التالي:

ان الهدف لهذه المسألة هو تقليل التكلفة الكلية و المرتبطة بتكلفة الانتاج و تكلفة التخزين وعليه نجد:

$$MinZ = 2000x_{11}+ 2250x_{12}+ 2500x_{13}+2000x_{22}+2250x_{23}+2000x_{33}$$

قيد الطاقة الانتاجية لشهر أفريل: $x_{11}+ x_{12}+ x_{13} \leq 18000$

قيد الطاقة الانتاجية لشهر ماي: $x_{22}+x_{23} \leq 18000$

قيد الطاقة الانتاجية لشهر جوان: $x_{33} \leq 18000$

قيد الطلب لشهر أفريل: $x_{11} = 6000$

قيد الطلب لشهر ماي: $x_{12}+ x_{22} = 12000$

قيد الطلب لشهر جوان: $x_{13}+ x_{23}+ x_{33} = 18000$

قيد عدم السلبية: $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{22}, x_{23}, x_{33} \geq 0$

## حل التمرين الثاني:

✓ **تحديد المتغيرات:**

تكمن نشاطات المؤسسة في نقل المحركات من نقاط الانطلاق (المصانع) نحو نقطة الوصول( نقاط البيع) حيث نستعين في هذا المثال بالمتغيرات من الشكل $x_{ij}$ بدلا من الشكل $x_j$ لتسهيل تحديد المسارات ، وعليه نفترض أن:

$X_{11}$: عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع A الى نقطة بيع W

$X_{12}$ عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع A الى نقطة بيع Z

$X_{13}$ عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع A الى نقطة بيع Y

$X_{21}$ عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع B الى نقطة بيع W

$X_{22}$ عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع B الى نقطة بيع Z

$X_{23}$ عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع B الى نقطة بيع Y

$X_{31}$ عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع C الى نقطة بيع W

$X_{32}$ عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع C الى نقطة بيع Z

$X_{33}$ عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع C الى نقطة بيع Y

✓ **كتابة البرنامج الخطي**: يمكن كتابة البرنامج لمسألة تخفيض تكاليف النقل كالتالي:

$$MinZ= 76x_{11}+55x_{12} + 82x_{13}+ 42x_{21}+25x_{22}+ 53x_{23}+ 31x_{31}+ 19x_{32}+20x_{33}$$

قيد الطاقة الانتاجية للمصنع A: $x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 7000$

قيد الطاقة الانتاجية للمصنع B: $x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 6000$

قيد الطاقة الانتاجية للمصنع C: $x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 2500$

قيد نقطة البيع W: $x_{11}+x_{21}+x_{31}= 4000$

قيد نقطة البيع Y: $x_{12}+x_{22}+x_{32}=5500$

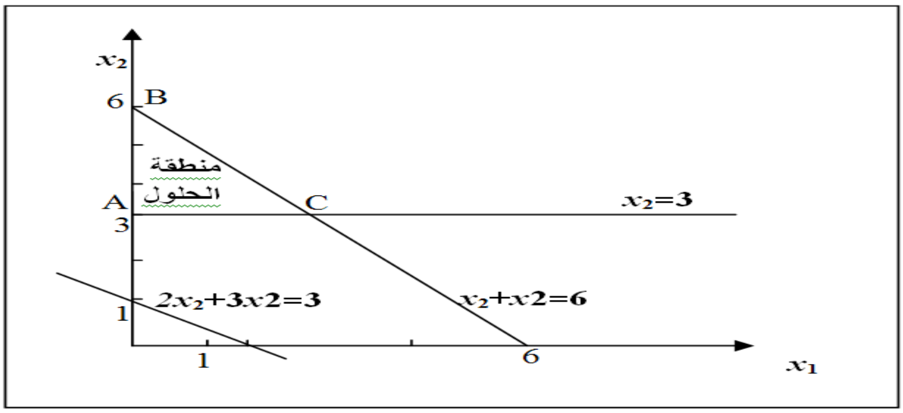
قيد نقطة البيع Z: $x_{13}+x_{23}+x_{33}= 6000$

قيد عدم السلبية: $x_{11},x_{12},x_{13}, x_{21},x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32},x_{33}\geq 0$

## حل التمرين الثالث:

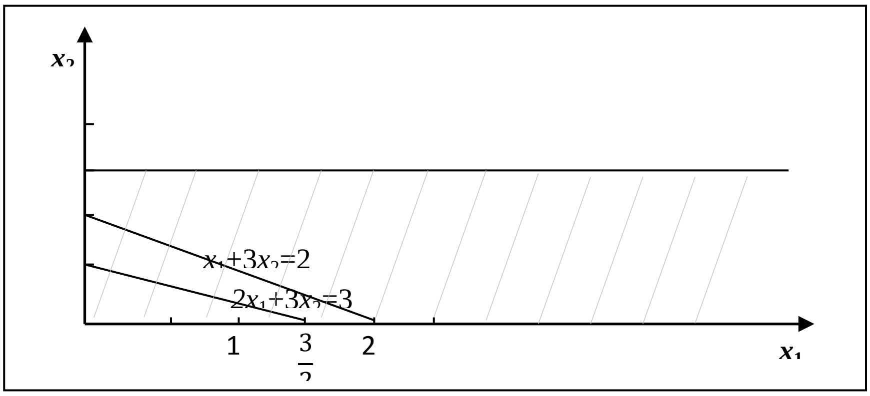
1. تحديد شكل منطقة الحلول في الحالات التالية:

✓ التمثيل البياني للحالة أ:



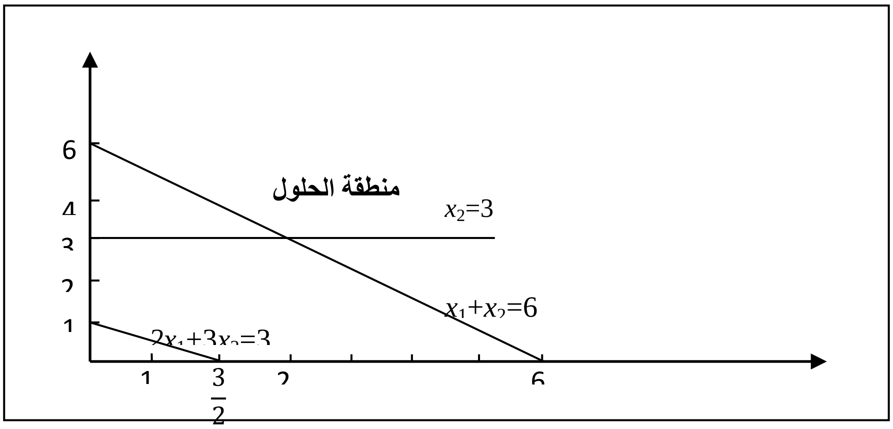

من الرسم البياني نجد أن منطقة الحلول محددة بالنقط A,B ,C

✓ التمثيل البياني للحالة ب:




من الرسم أعلاه يتبين عدم وجود منطقة حلول .

✓ التمثيل البياني للحالة ج:




نلاحظ أن منطقة الحلول غير محددة.

2. حساب قيمة Z:

✓ الحالة أ: $MaxZ_c= 5(3)+3(3)= 24$

$MinZ_a= 5(0)+ 3(3)= 9$

✓ الحالة ج: $MinZ_d= 5(3)+3(3) = 24$

## حل التمرين الرابع:

✓ تشكيل النموذج الخطي للمسألة:

تحديد المتغيرات: $x_1$: عدد الوحدات الواجب انتاجها أسبوعيا من $c_1$.

$X_2$: عدد الوحدات الواجب انتاجها أسبوعيا من$c_2$.

دالة الهدف: لتشكيل دالة الهدف يتطلب الأمر أولا ايجاد الربح الوحدوي و الذي يساوي سعر البيع مطروح منه مجموع التكاليف . و بالتالي نجد ما يلي:

| البيان | $C_1$ | $C_2$ |
|---|---|---|
| تكلفة $M_1$ | 1000=2*500 | 750=3/2*500 |
| تكلفة $M_2$ | 200=2*100 | 200=2*100 |
| تكلفة ورشة القص | 30=2*15 | 45=3*15 |
| تكلفة ورشة الخياطة | 10=1/2*20 | 40=2*20 |
| تكلفة $M_3$ | | 400=4*100 |
| مجموع التكاليف | 1240دج | 1435دج |
| سعر البيع | 2000دج | 3000دج |
| **ربح الوحدة** | **760دج** | **1565دج** |

وبالتالي فان دالة الهدف تكتب بالشكل التالي: $MaxZ= 760x_1 + 1565x_2$

القيود:

قيد المادة $M_1$: $2x_1+ 3/2x_2 \leq 100$

قيد المادة $M_2$: $2x_1+ 2x_2 \leq 90$

قيد ورشة القص: $2x_1+ 3x_2 \leq (4*8*6)$

قيد ورشة الخياطة: $1/2x_1+ 2x_2 \leq (2*8*6)$

قيد المادة $M_3$: $4x_2 \leq (3*8*6)$

قيد عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

- ✓ حل النموذج الخطي:

كتابة النموذج المعياري:

$$MaxZ= 760x_1 + 1565x_2+0 e_1+ 0 e_2+0 e_3+0 e_4+0 e_5$$

$$\begin{cases} 2x_1+ 3/2x_2 + e_1= 100 \\ 2x_1+ 2x_2 + e_2= 90 \\ 2x_1+ 3x_2 + e_3= 192 \\ 1/2x_1+ 2x_2 + e_4= 96 \\ 4x_2 + e_5= 144 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \geq 0 \end{cases}$$

| | | | 760 | 1565 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $\mathbf{x_2}$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ |
| 0 | $e_1$ | 100 | 2 | 3/2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $e_2$ | 90 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $e_3$ | 192 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $e_4$ | 96 | ½ | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $e_5$ | 144 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Z= 0 | | | -760 | -1565 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $e_1$ | 46 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $e_2$ | 18 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $e_3$ | 84 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $e_4$ | 24 | ½ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1565 | $x_2$ | 36 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ¼ |
| Z= 56340 | | | -760 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1565/4 |
| 0 | $e_1$ | 28 | 0 | 0 | 1 | 1- | 0 | 0 | 1/8 |
| 760 | $X_1$ | 9 | 1 | 0 | 0 | ½ | 0 | 0 | -1/4 |
| 0 | $e_3$ | 66 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | -1/4 |
| 0 | $e_4$ | 39/2 | 0 | 0 | 0 | -1/4 | 0 | 1 | -3/8 |
| 1565 | $x_2$ | 36 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ¼ |
| **Z=63180** | | | **0** | **0** | **0** | **380** | **0** | **0** | **805/4** |

ما نلاحظه من الجدول الأخير أن توليفة الحل الأمثل تتمثل في انتاج 9وحدات أسبوعيا من $c_1$ و 360وحدة من $C_2$ من أجل تحقيق ربح أعظمي قدره 63180 و.ن ، وهذا في ظل بقاء 28متر من المادة $M_1$ و 66 ساعة عمل غير مستغلة في ورشة القص.، و39/2 ساعة عمل غير مستغلة في و رشة الخياطة ، مع استغلال كلي للمادة $M_2$ و $M_3$.

**حل التمرين الخامس:**

نلاحظ في جدول الحل الأمثل أن قيم $X_1$، $X_2$، $X_5$ في سطر التقييم معدومة ، ما يعني أنها موجودة في خانة الأساس، و بالتالي سوف نقوم بإدخال تلك المتغيرات الى الأساس الواحدة تلوى الأخرى دون مراعاة الترتيب مع افتراض ما يلي:

$$MaxZ= Ax_1+ Bx_2$$

جدول الحل رقم 1

| | | | A | Á | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | $X_i$ | $b_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $b_{i/}$ $X_1$ |
| 0 | $X_3$ | 36 | 6 | 2 | 1 | 0 | 0 | 36/6=6 |
| 0 | $X_4$ | 40 | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 40/5=8 |
| 0 | $X_5$ | 28 | 2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 28/2=14 |
| Z=0 | | | -A | -Á | 0 | 0 | 0 | |

جدول الحل رقم 2

| | | | A | B | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | $X_i$ | $b_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $b_{i/}$ $X_1$ |
| A | $X_1$ | 6 | 1 | 1/3 | 1/6 | 0 | 0 | 6/1/3=18 |
| 0 | $X_4$ | 10 | 0 | 10/3 | -5/6 | 1 | 0 | 10/10/3=3 |
| 0 | $X_5$ | 16 | 0 | 10/3 | -1/3 | 0 | 1 | 16/10/3=24/5 |
| Z=6A | | | 0 | 1/3A-B | 1/6A | 0 | 0 | |

جدول الحل رقم 3

| | | | A | B | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | $X_i$ | $b_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ |
| A | $X_1$ | 5 | 1 | 0 | ¼ | -1/10 | 0 |
| B | $X_2$ | 3 | 0 | 1 | -1/4 | 3/10 | 0 |
| 0 | $X_5$ | 6 | 0 | 0 | ½ | -1 | 1 |
| Z=5A+3B | | | 0 | 0 | 1/4A-1/4B | -1/10A +3/10B | 0 |

و بمطابقة نتائج هذا الجدول مع الجدول الحل الأمثل المعطي نجد ما يلي:

$$1/4A-1/4B=1/2$$

$$-1/10A+3/10B=2/5$$

و بحل جملة المعادلتين نجد أن :

$$A=5\ ,\ B=3$$

وبالتالي تكون دالة الهدف بالصيغة التالية:

$$\mathbf{MaxZ=5x_1+3x_2}$$

## 2. تمارين مقترحة

**التمرين الأول**: يقوم مصنع بإنتاج سلعتين حيث يمر انتاجهما على آلة التصنيع ثم آلة التلميع حيث تقدر تكاليف تشغيلهما للساعة الواحدة بـ 1200دج و1500دج على الترتيب أما تكلفة المادة الأولية لوحدة واحدة من السلعة الأولى فهي 65دج وللسلعة الثانية فهي 90دج . كما يبين الجدول التالي طاقة كل آلة في الساعة الواحدة:

| الآلات / السلع | السلعة الاولى | السلعة الثانية |
|---|---|---|
| آلة التصنيع | 30وحدة/سا | 20وحدة/سا |
| آلة التلميع | 25وحدة/سا | 12وحدة/سا |

بالإضافة الى أن كل آلة لا يمكن تشغيلها أكثر من ساعة كما أن سعر البيع الوحدوي للسلعتين هما على الترتيب 200و 320دج.

**المطلوب**: تكوين النموذج الرياضي للمسألة بهدف الحصول على أقصى ربح ممكن مع الشرح.

**التمرين الثاني**: تنتج مؤسسة معينة ثلاث منتوجات $P_1$، $P_2$ ، $P_3$ استعمالا للأجزاء A و B بحيث أن:

وحدة من $P_1$ تتطلب 2وحدة من A ووحدة منB ، ووحدة من $P_2$ تتطلب 3 وحدات من A ووحدة من B كما وحدة من $P_3$ تتطلب 3 وحدات من B فقط .

يستهلك إنتاج A و B للمواد الأولية $M_1$ ، $M_2$ بالنسب التالية :

وحدة من Aتتطلب 1 كغ من $M_1$ و 3 كغ من $M_2$ ، و وحدة من B تتطلب 3 كغ من $M_1$ و 1 كغ من $M_2$، و للمؤسسة مخزون بكمية 4000 كغ من $M_1$ و 6000 كغ من$M_2$. وتتم عملية الإنتاج في ورشتين بحيث يشتغل في الورشة الأولى 10 عمال لمدة 8 ساعات في اليوم و 30 يوم في الشهر ويشتغل في الورشة الثانية 20عامل لمدة 8 ساعات في اليوم 30 يوم في الشهر.

يحتاج المنتوج $P_1$ إلى 20 % من وحدة النشاط( عدد العمال )في الورشة الأولى و 20 % من وحدة النشاط في الورشة الثانية ، ويحتاج المنتوج $P_2$ إلى 50 % من وحدة النشاط في الورشة الأولى و 10 % من وحدة النشاط في الورشة الثانية، كما يحتاج المنتوج $P_3$ إلى 10 % من وحدة النشاط في الورشة الأولى و 15 % من وحدة النشاط في الورشة الثانية . متطلبات السوق بالنسبة للمنتوجات الثلاثة هي كالتالي :200 وحدة للمنتوج الأول شهريا و 100 وحدة للمنتوج الثاني شهريا و 500 وحدة للمنتوج الثالث شهريا.

سعر البيع للمنتوج الأول هو 500دج ، 700 دينار للمنتوج الثاني، 800 دينار للمنتوج الثالث . كما أن التكاليف الإجمالية تقدر ب 200 دينار للمنتوج الأول، 200 دينار للمنتوج الثاني، 300 دينار للمنتوج الثالث.

**المطلوب** : كتابة البرنامج الخطي المناسب

**التمرين الثالث**: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z= 300\ x_1+400\ x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 \leq 60 \\ x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 6 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب**: - باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه؛

. هل الحل الأمثل يحقق القيود الوظيفية و قيود عدم سلبية المتغيرات ؟

**.** حدد القيود المشبعة و القيود غير المشبعة ، و ماذا يعني كل منها ؟

**.** حدد الربح المترتب عن الكمية المنتجة من المنتج الأول ثم الربح المترتب عن الكمية المنتجة من المنتج الثاني.

**التمرين الرابع**: ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 0.5x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب**: . ايجاد الحل الأمثل و تحديد قيمة دالة الهدف.

. هل يوجد في هذا البرنامج قيدا زائدا؟ اذا كان موجودا، فما هو؟

. هل يتغير الحل اذا أزيل القيد الزائد من البرنامج؟ وضح ذلك.

**التمرين الخامس**: تدير منشأة زراعية ثلاث مزارع ( c,b,a ) مساحتهم على الترتيب (14000، 20000، 18000) هكتار. تريد زراعتهم بنوعين من المحاصيل (m, n). الجدول التالي يوضح عدد الوحدات التي ينتجها الهكتار الواحد:

| المحصول / المزرعة | مزرعةa | مزرعةb | مزرعةc |
|---|---|---|---|
| **M** | 360 | 310 | 380 |
| **N** | 400 | 350 | 270 |

كما أن القدرة الاستيعابية للسوق من المحصول m تتجاوز 100000وحدة

**المطلوب**: حل النموذج الخطي من أجل تعظيم حجم الانتاج.

**التمرين السادس**: ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$MaxZ= 3\ x_1+5\ x_2$$

$$\begin{cases} x_2 \leq\ 6 \\ 3x_1+2\ x_2\ \leq 18 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب**: . ايجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلاكس.

. ايجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية.

. ماهي نقاط الاشتراك بين طريقة السمبلاكس و طريقة الرسم البياني في كل مرحلة من مراحل الحل.

# الفصل الثـــاني : البرمجة بالأعداد الصحيحة

## أهـــداف الفصـــل:

ينتظر من الطالب بعد قراءة هذا الفصل أن يصبح قادرا على:

- فهم بنية النماذج المختلفة البرمجة العددية.
- تطبيق مختلف طرق حل نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة.

## محتوى الفصل:

I. مفهوم و أنواع نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة.

1. مفهوم البرمجة بالأعداد الصحيحة.
2. أنواع نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة.

II. طرق حل نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة.

1. الطريقة البيانية.
2. طريقة قطع المستوي (Gomory).
3. طريقة التفريع و التحديد( Branch and Bound ).

III. تمارين تطبيقية.

1. تمارين محلولة.
2. تمارين مقترحة.

**تمهيد:**

تتطلب أكثر التطبيقات العملية لمسائل البرمجة الخطية تجاوز فرضية قابلية التجزئة ، اذ يكون من الضروري أن تأخذ متغيرات القرار في الحل الأمثل قيما صحيحة لأنه من غير الممكن انتاج أجزاء من المنتج كإنتاج سيارة ونصف مثلا . وفي هذه الحالة يتم اللجوء الى استخدام أسلوب البرمجة بالأعداد الصحيحة التي تعتبر حالة خاصة من البرمجة الخطية و أكثرها صعوبة في الحل الأمثل لأنه يمكننا حلها بحل متتابعة من مسائل البرمجة الخطية .

## I. مفهوم و أنواع نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة:

### 1. مفهوم البرمجة بالأعداد الصحيحة:

تمثل البرمجة بالأعداد الصحيحة أحد النماذج الرياضية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية ، حيث ينصب اهتمامها على ايجاد قيم المتغيرات الأساسية بأعداد صحيحة خالية من الكسور . بمعنى آخر، أنها برمجة خطية مضاف اليها شرط العدد الصحيح لقيم المتغيرات عند الحل الأمثل بحيث يضاف الى شرط عدم سلبية المتغيرات شرط العدد الصحيح.

ان الهدف الأساسي لبناء النموذج الرياضي للبرمجة بالأعداد الصحيحة نابع من الاستجابة لمتطلبات الواقع العملي حيث أنه من المفروض في الكثير من الحالات و المشاكل التطبيقية لا يمكن التعامل معها بقيم كسرية ، فهذه البرمجة تسمح بـ :

- ✓ تخصيص الموارد أين لا يسمح للنشاط بتجزئته مثل انتاج تجهيزات كبرى (سيارات، ناقلا بحرية....الخ).
- ✓ معالجة الوضعيات التي يكون فيها القرار من طبيعة ثنائية مثل الاستثمار X منجز أم لا؟

في مثل هذه الحالات لا نكتفي بتقريب الحل الذي نجده في تطبيق البرمجة الخطية المعروفة لأنه لا يضمن لنا أن يكون هذا الحل حلا أمثلا اما لعدم احترامه أحد قيود البرنامج و خاصة اذا كان من نوع معادلة ،و اما استحالة تقريب القيم الى أعداد صحيحة اذا كان أحد أو بعض المتغيرات الأساسية للنموذج متغيرات ثنائية من نوع (1،0).

### 2. أنواع نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة:

بشكل عام ، نجد أن البرمجة بالأعداد الصحيحة تقسم الى ثلاثة أنواع وهي: [1]

- **نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة التام** : و يسمى أيضا بالمطلق ، وذلك لأن كل قيم المتغيرات من النموذج $X_1, X_2, X_3,............, X_n$ ينبغي أن تكون أعداد كاملة كما هو موضح في النموذج الرياضي التالي:

[1] محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، مرجع سابق، ص ص 91،92

$$MinZ / MaxZ = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = 1,2,\dots\dots\dots, m. \\ x_j \ge 0 & j = 1,2,\dots\dots\dots, n. \\ X_j \text{ entier} & j=1\dots\dots\dots\dots\dots p \; (p=n) \end{cases}$$

- **نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة المختلط:** و يسمى أيضا بالجزئي، وذلك لأن قيمة المتغيرات من النموذج $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ بعضها أعداد صحيحة و البعض الآخر غير ذلك. و يمكن التعبير عنه كالتالي: أي:

$$MinZ / MaxZ = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = 1,2,\dots\dots\dots, m. \\ x_j \ge 0 & j = 1,2,\dots\dots\dots, n. \\ X_j \text{ entier} & j=1\dots\dots\dots\dots\dots p \; (p<n) \end{cases}$$

- **نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة الثنائي:** يبنى النموذج الرياضي لهذا النوع على أساس أن قيم المتغيرات لا يمكن أن تكون أكثر من قيمتين فقط ، وهي اما صفر أو واحد . ومن بين أهم المجالات التي تستعمل هذا النموذج هي اختيار المشاريع بحيث يأخذ المتغير القيمة 1 في حالة الاختيار و القيمة 0 في حالة عدم الاختيار .

$$MinZ / MaxZ = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = 1,2,\dots\dots\dots, m. \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1ou0 & j = 1,2,\dots\dots\dots, n. \end{cases}$$

## II.طرق حل نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة:

### 1. الطريقة البيانية

تعتبر الطريقة البيانية لهذا النوع من النماذج أفضل و اسهل الحلول ، لكن بمجرد أن يتجاوز عدد متغيرات النموذج اثنين تصبح غير قابلة للتطبيق ، و نضطر اللجوء الى طرق أخرى للحل. و على العموم ، فان هذه الطريقة تعتمد على تحديد الحل الأمثل للبرنامج وفق الطريقة المتبعة لحل نماذج البرمجة الخطية ( أي دون الأخذ بعين الاعتبار شرط العدد الصحيح) ، فاذا كانت قيم متغيرات النموذج صحيحة فهو حل أمثل أما اذا كان الحل المتوصل اليه يحتوي على أعداد غير صحيحة فانه يجب القيام بما يلي:[1]

- تحديد الحلول الممكنة ذات القيم الصحيحة و الواقعة ضمن منطقة الحل.
- رسم دالة الهدف التي عبارة عن خط مستقيم ذو ميل ثابت $(-c_1/c_2)$ .
- ازاحة مستقيم الدالة باتجاه منطقة الحل ليكون الحل الأمثل عند آخر نقطة ذات احداثيات صحيحة في حالة التعظيم و أول نقطة ذات احداثيات صحيحة في حالة التخفيض.

و لتوضيح هذه الخطوات نستعين بالمثال التالي:

**مثال:**

ترغب مؤسسة مختصة في صناعة السفن ،تحديد حجم ونوع السفن التي تحقق لها أكبر ربح قبل البدء في صناعتها .
و بعد دراسة ظروف العملية الانتاجية تم صياغة النموذج التالي:

$$\text{Max}Z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

حيث : $x_1$ : عدد السفن من النوع A

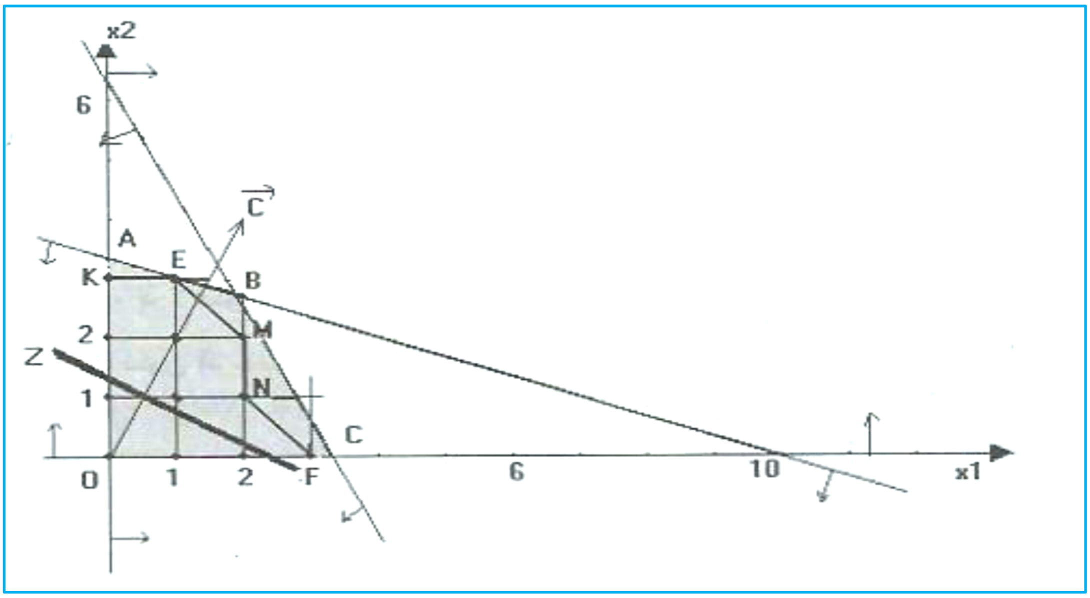
$x_1$ : عدد السفن من النوع B

**الحل:**

✓ ايجاد الحل الأمثل دون الأخذ بعين الاعتبار شرط الاعداد الصحيحة:

بحل هذه المسألة بيانيا كما سبقت الاشارة اليه ، نتوصل الى الرسم البياني و جدول منطقة الحلول الممكنة التاليين :

[1] محمد دباس الحميد، *البرمجة الرياضية*، مديرية الكتب و المطبوعات الجامعية، سوريا، 2010، ص 156




| قيمة دالة الهدف | احداثيات النقاط | النقاط |
|---|---|---|
| $MaxZ_0=0$ | o :( $x_1=0$, $x_2=0$) | 0 |
| $MaxZ_A=40/3$ | A:( $x_1=0$, $x_2=10/3$) | **A** |
| $\mathbf{MaxZ_b=218/5}$ | **B: $x_1=9/5$, $x_2=41/15$)** | Á |
| $MaxZ_C=19/3$ | C:( $x_1=19/6$, $x_2=0$) | C |

وبمقارنة الحلول المختلفة عند النقاط O,A,B,C يتبين أن الحل الأمثل يكون عند النقطة B أي أن البرنامج الانتاجي الأمثل للمسألة يتمثل في صنع 9/5 سفينة من نوع A و 41/15سفينة من نوع B مع تحقيق أقصى ربح قدره 218/5 وحدة نقدية .

لكن نلاحظ أن هذا الحل لا يحقق القيد الرابع ( كما أنه غير مقبول من الناحية العملية) ، فهو حل غير مقبول لمسألة برمجة خطية بقيم صحيحة ، ما يتطلب الأمر الذهاب الى الخطوة الموالية.

✓ تحديد الحلول الممكنة ذات القيم الصحيحة و الواقعة ضمن منطقة الحل:

نلاحظ أنه في منطقة الامكانيات توجد نقاط تحقق القيد الرابع و هي 12 نقطة مشار اليها في الرسم البياني أعلاه . لذلك من أجل ايجاد النقطة التي تمثل الحل الأمثل للمسألة الأصلية نأخذ بدلا من المنطقة **OABC** المنطقة **OKEMNF** المحتوية على كل النقاط الممكنة ذات الاحداثيات الصحيحة( 12 نقطة).

✓ رسم دالة الهدف و ازاحتها نحو منطقة الحلول :

بعد رسم المستقيم Z نقوم بتحريكه بصفة متوازية اتجاه رؤوس منطقة الحلول الممكنة ذات الاحداثيات الصحيحة، وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة هي آخر نقطة يصل اليها المستقيم . وحسب المثال نجد أن آخر نقطة

يصلها هي النقطة **E ذات الاحداثيات $x_1=1$ و $X_2=3$**، ونسمي عندئذ النقطة بالحل الأمثل الصحيح للبرنامج أي يجب على المؤسسة صناعة سفينة واحدة من النوع A و ثلاث سفن من النوع B من أجل تحقيق ربح أعظمي قدره 14وحدة نقدية.

**ملاحظة:**

**قيمة دالة الهدف لنموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة دائما اقل أو يساوي من قيمة دالة الهدف لنموذج البرمجة الخطية المقابل له.**

## 2. طريقة قطع المستوي (Gomory):

قدمت هذه الطريقة من طرف Ralph Gomory عام 1958 من أجل الوصول الى حل أمثل بأعداد كاملة حيث ننطلق من نفس الطرح للنموذج الرياضي مع شرط أن تكون المتغيرات كاملة ، وفي حالة الوصول الى الحل دون تحقق هذا الشرط نقوم بإضافة قيد جديد للمسألة الأولية يسمى قيد Gomory بحيث يتم تحديده باستعمال الأجزاء غير الكاملة ، وبعد اضافته الى النموذج يتم الحل وفقا للكيفية المعروفة مع تكرار العملية حتى الوصول الى حل أمثل بأعداد صحيحة. مع الاشارة الى أن ان القيد المضاف هو عبارة عن قيد قطع يقتطع جزء معين من حيز الحل الذي يحتوي على قيم ليست بأعداد صحيحة .

باختصار يمكن أن تتم هذه الطريقة في أربعة مراحل:[1]

- حل المسألة باستخدام طريقة السمبلاكس للبرمجة الخطية.
- اضافة قيد Gomory.
- حل المسألة الجديدة بطريقة السمبلاكس.
- اعادة العملية حتى الوصول الى حل أمثل بقيم صحيحة.

**قاعدة:**

**لتطبيق طريقة قطع المستوي يجب أن تكون معاملات المتغيرات لجميع القيود التي تتضمنها المسألة ذات قيم عددية صحيحة.**

و لتبسيط خطوات هذه الطريقة سنعمل على توضيحها انطلاقا من المثال العددي الذي استخدم في شرح الطريقة البيانية ، رغبة في مقارنة النتيجة المترتبة عن هاتين الطريقتين :

[1] اليمين فالته، *بحوث العمليات*،ط1، ايتراك للنشر و التوزيع، مصر، 2006 ، ص227

**مثال** :كان البرنامج الخطي هو:

$$MaxZ = 2\,x_1 + 4\,x_2$$

$$(1)\quad \begin{cases} 2\,x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3\,x_2 \leq 10 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \\ x_1,\ x_2\ \text{entier} \end{cases}$$

- **الخطوة الأولى: حل المسألة باستخدام طريقة السمبلاكس**

يتم في هذه الخطوة تطبيق خطوات السمبلاكس المشار اليها سابقا دون الأخذ بعين الاعتبار لشرط القيم الصحيحة وذلك من اجل الحصول على الحل الأمثل. وفي مثالنا نلاحظ أن القيد الأول للمسألة لا يخضع لقاعدة طريقة القطع ، لذا يجب أولا تبسيطه بالتخلص من المقامات وذلك بضرب طرفي القيد في العدد (3) لنحصل على قيد جديد:

$$6x_1 + 3x_2 \leq 19$$

و بتطبيق طريقة السمبلاكس نحصل على النموذج المعياري للمسألة و جداول السمبلاكس التاليين:

$$MaxZ = 2x_1 + 4\,x_2 + 0\,e_1 + 0\,e_2$$

$$\begin{cases} 6\,x_1 + 3x_2 + e_1 = 19 \\ x_1 + 3\,x_2 + e_2 = 10 \\ x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2 \geq 0 \\ x_1,\ x_2\ \text{entier} \end{cases}$$

| | | | 2 | 4 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $\mathbf{x_2}$ | $e_1$ | $e_2$ |
| 0 | $e_1$ | 19 | 6 | 3 | 1 | 0 |
| 0 | $e_2$ | 10 | 1 | 3 | 0 | 1 |
| **Z= 0** | | | **-2** | **-4** | **0** | **0** |
| 0 | $e_1$ | 9 | 5 | 0 | 1 | -1 |
| 4 | $\mathbf{x_2}$ | 10/3 | 1/3 | 1 | 0 | 1/3 |
| **Z= 40/3** | | | **-2/3** | **0** | **0** | **4/3** |
| 2 | $\mathbf{x_1}$ | **9/5** | 1 | 0 | 1/5 | -1/5 |
| 4 | $\mathbf{x_2}$ | **41/15** | 0 | 1 | -1/15 | 2/5 |
| **Z= 218/5** | | | **0** | **0** | **2/15** | **6/5** |

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن قيم سطر التقييم جميعها معدومة أو موجبة، لذا فان شرط الأمثلية قد تحقق للبرمجة الخطية حيث تكون النتائج المحصل عليها كما يلي:

$$\mathbf{x_1 = 9/5 \ , \ x_2 = 41/15 \ , \ Z = 218/5}$$

و لكن هذه النتائج ليست بقيم صحيحة لمتغيرات القرار ، لذا يتطلب الأمر الانتقال الى الخطوة الموالية .

- **الخطوة الثانية : اضافة قيد Gomory**

من أجل الوصول الى العبارة الرياضية للقيد المضاف للبرنامج الرياضي نتبع الخطوات التالية:[1]

✓ اختيار المتغيرة التي تتم على أساسها كتابة القيد : يتم اختيار المتغير القاعدي الذي قيمته في الحل الأمثل يحتوي على أكبر جزء كسري، حيث يمكن أن يمثل بالصيغة التالية:

$$\mathbf{X_K = E_K + D_K}$$

حيث : $E_K$ : يمثل الجزء الصحيح ، $D_K$ : الجزء الكسري الذي يجب أن يكون دائما موجبا

وفي مثالنا فانه يمكن كتابة المتغيرين القاعديين على النحو التالي:

$$\mathbf{X_1 = 9/5 \ \Rightarrow \ 1 + 4/5 \ \Rightarrow \ E_1 = 1 \ , \ D_1 = 4/5}$$

$$X_2 = 41/15 \ \Rightarrow \ 2 + 11/15 \ \Rightarrow \ E_2 = 2 \ , \ D_2 = 11/15$$

نلاحظ أن الجزء الكسري لـ $\mathbf{X_1}$ هو الأكبر ، لذا سيتم اختياره لكتابة القيد المضاف

✓ كتابة القيد : يكتب القيد انطلاقا من قراءة سطر المتغيرة المختارة في الخطوة السابقة بالشكل التالي:

$$b_K = x_K + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j$$

$$E_K + D_K = x_K + \sum_{j=1}^{n} E_{kj} x_j + \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j$$

$$X_K = E_K + D_K - \sum_{j=1}^{n} E_{kj} x_j - \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j$$

$$X_K = \left(E_K - \sum_{j=1}^{n} E_{kj} x_j\right) + \left(D_K - \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j\right)$$

حتى يكون $X_K$ عدد صحيح يجب ان يكون الطرف الثاني عددا صحيحا ، و عليه فان قيد Gomory هو :

$$\boxed{\mathbf{D_K} - \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j \leq \mathbf{0}}$$

وحسب مثالنا فان قيد Gomory يكون كالتالي :

$$9/5 = x_1 + 1/5\, e_1 - 1/5\, e_2$$

$$1 + 4/5 = x_1 + 1/5\, e_1 + (-1 + 4/5)\, e_2$$

[1] اليمين فالته، مرجع سابق ، ص ص 228،229

$$x_1 = 1 + 4/5 - 1/5\, e_1 - (-1 + 4/5)\, e_2$$

$$x_1 = 1 + e_2 + (4/5 - 1/5\, e_1 - 4/5\, e_2)$$

فاذا أردنا أن يكون $x_1$ عدد صحيح يجب أن يكون الطرف الثاني $(4/5 - 1/5\, e_1 - 4/5\, e_2)$ عددا صحيحا ، ومنه:

$$(4/5 - 1/5\, e_1 - 4/5\, e_2) \leq 0$$

و بهذه النتيجة نكون قد حددنا أول مستوي قاطع، ولكن قبل إدخالها كقيد جديد في النموذج يجب تعويض متغيرات الفوارق بالمتغيرات الأساسية كما يلي:

من النموذج المعياري لدينا: $6x_1 + 3x_2 + e_1 = 19 \Longrightarrow e_1 = 19 - 6x_1 - 3x_2$

$$x_1 + 3x_2 + e_2 = 10 \Longrightarrow e_2 = 10 - x_1 - 3x_2$$

بالتعريض في العبارة السابقة نجد :

$$\boxed{2x_1 + 3x_2 \leq 11}$$

و بالتالي يصبح النموذج الجديد بعد ادخال قيد Gomory كالتالي:

$$\text{MaxZ} = 2x_1 + 4x_2$$

$$(2)\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

- **الخطوة الثالثة: حل المسألة الجديدة:**

يتم في هذه الخطوة حل نموذج البرمجة الخطية الجديدة باستعمال طريقة السمبلاكس و بالكيفية المعروفة سابقا.

وحسب مثالنا ،فان النموذج المعياري للمسألة الجديدة و جداول السمبلاكس هم كالتالي:

$$\text{MaxZ} = 2x_1 + 4x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + e_1 = 19 \\ x_1 + 3x_2 + e_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_3 = 11 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

| | | | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| 0 | $e_1$ | 19 | 6 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $e_2$ | 10 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $e_3$ | 11 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| **Z= 0** | | | **−2** | **−4** | **0** | **0** | **0** |
| 0 | $e_1$ | 9 | 5 | 0 | 1 | −1 | 0 |
| 4 | $x_2$ | 10/3 | 1/3 | 1 | 0 | 1/3 | 0 |
| 0 | $e_3$ | 1 | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 |
| **Z= 40/3** | | | **−2/3** | **0** | **0** | **4/3** | **0** |
| 0 | $e_1$ | **4** | 0 | 0 | 1 | 4 | −5 |
| 4 | $x_2$ | **3** | 0 | 1 | 0 | 2/3 | −1/3 |
| 2 | $x_1$ | **1** | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 |
| **Z= 14** | | | **0** | **0** | **0** | **2/3** | **2/3** |

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن قيم سطر التقييم جميعها معدومة أو موجبة، لذا فان شرط الأمثلية قد تحقق للبرمجة الخطية، كما أن هذا الحل مقبول لأن كل من $x_1$ و $x_2$ أعداد صحيحة ، وبالتالي فانه يجب على المؤسسة انتاج سفينة واحدة من النوع A و ثلاث سفن من النوع B من أجل تحقيق ربح أعظمي قدره 14 وحدة نقدية. و **هذه النتيجة نفسها المتوصل اليها في الطريقة البيانية و التي تمثلها النقطة E .**

**والسؤال الذي يطرح نفسه الآن : هل يتطلب الأمر هنا الانتقال الى الخطوة الرابعة؟**

و الجواب هو أنه ما دامت قيم $x_1$ و $x_2$ صحيحة لا يحتاج الامر الى تكوين قيد قطع جديد بالخطوات المذكورة آنفا و حل المسألة الجديدة بطريقة السمبلاكس ، لذا نتوقف عن الحل وهذه تمثل المرحلة النهائية المثلى لمثالنا .

**ملاحظة:**

**عند اختيار المتغيرة التي تتم على أساسها كتابة القيد، قد نجد قيمتين أو أكثر للجزء الكسري متساوية ، عندئذ يتم الاختيار بطريقة عشوائية.**

### 3. طريقة التفريع و التحديد( Branch and Bound ):

استعملت هذه الطريقة لأول مرة من قبل كل من G.Doig و A. Land لحل البرامج الخطية بشرط الأعداد الصحيحة ، و بعدها استعملت من طرف E. Balas في عام 1965 بتطويره للخوارزمية التجميعية لحل البرامج الخطية بالمتغيرات الثنائية . وتعتمد هذه الطريقة في البحث عن حل أمثل عددي صحيح على تطبيق عمليتين أساسيتين هما :[1]

- **التفريع ( Branching)**: يقصد بها تقسيم فضاء الحل المستمر الى فضاءات فرعية من أجل حذف أجزاء الفضاء المستمر و الذي يكون غير مقبول لمسألة البرمجة بالأعداد الصحيحة ، وذلك عن طريق القيود العددية الضرورية للحصول على الحلول العددية المثلى.
- **التحديد( Bounding)** : و يعني اضافة محددات جديدة مع غلق تفرعات لا تفي بالمطالب أو الشروط الواردة في أصل النموذج الرياضي. و هذا يعني أن قيمة دالة الهدف المثلى لكل مسألة فرعية للمسألة الأصلية من نوع تعظيم أو تخفيض يحصل عليها من عملية التجزئة ، اذ يتم ادراجها كحد أعلى أو أدنى لقيمة دالة الهدف المرتبطة مع القيم العددية المتاحة لمتغيرات القرار . هذا الحد أساسي لعملية ترتيب الحلول المثلى للمجموعات الفرعية .

وعليه، فان الفرق بين طريقة قطع المستوي و طريقة التفريع و التحديد تكمن في أن الأولى تعمل على تحديد قيود تأخذ شكل قيود في عدة اتجاهات، بينما تعمل الثانية على تحديد قيود موازية لأحد محاور المعلم باستعمال أحد متغيرات النموذج.

ولشرح خطوات ايجاد الحل العددي الصحيح الأمثل بطريقة التفريع و التحديد سنعتمد على نفس المثال المعطى في الطريقتين السابقتين للبرمجة بالأعداد الصحيحة:[2]

**مثال:** كان البرنامج الخطي هو:

$$MaxZ = 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

- **الخطوة الأولى: حل المسألة باستخدام طريقة السمبلاكس**

يتم ايجاد الحل الأمثل للمسألة باستخدام طريقة السمبلاكس ، فاذا كان الجواب مستوفي لشروط البرمجة العددية نتوقف عن الحل أما اذا كان لا ننتقل الى الخطوة الثانية . وكما أشرنا سابقا، فانه تم أولا التخلص من مقامات القيد

---

[1] ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغباري، *بحوث العمليات، سلسلة ملخصات شوم*، ط2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر ، 2004، ص ص 85،86 .

[2] سهيلة عبد الله سعيد، *الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات*، ط1 ،دار الحامد للنشر و التوزيع، عمان، 2007، ص ص 323،324

الأول للمسألة ، لنحصل على قيد جديد هو : $6x_1 + 3x_2 \le 19$ ، ثم التوصل الى الحل الأمثل للمسألة بعد تطبيق خطوات طريقة السمبلاكس وهو : $\mathbf{x_1 = 9/5}$ , $\mathbf{x_2 = 41/15}$ , $\mathbf{Z = 218/5}$

و بما أن هذا الحل لا يحترم شرط الأعداد الصحيحة لمتغيرات القرار ، فان الأمر يتطلب الانتقال الى الخطوة الموالية.

- **الخطوة الثانية: عملية التفريع**

تتضمن هذه الخطوة تجزئة المسألة الأصلية الى مسألتين فرعيتين مع اضافة قيود جديدة مشتقة من أصل النموذج الرياضي. ويتم ذلك من خلال اتباع ما يلي:

✓ اختيار المتغير المتفرع: وهو المتغير الذي يكون قيمته عند الحل الأمثل يحمل قيمة كسرية كبيرة اذ يمكن كتابته بالصيغة التالية: $X_k = E_k + D_k$. و حسب مثالنا لدينا :

$$X_2 = 41/15 \Rightarrow 2 + 11/15 \quad ، \quad \mathbf{X_1 = 9/5 \Rightarrow 1 + 4/5}$$

وبالتالي نختار المتغير $X_1$ كونه يحمل أكبر عدد بعد الفاصلة.

✓ كتابة القيدين الجديدين: بما أن $X_k$ يجب أن تكون قيمة صحيحة في الحل الأمثل ،فانه يمكن البحث عن قيمها الجديدة $X^*_k$ من خلال القاعدة التالية: $\mathbf{E \le X^*_k \le E+1}$

بحيث هذا المجال لا يحتوي على أي قيمة ذات عدد صحيح الا القيم E و E+1 لأن $X^*_k$ محصور بين عددين صحيحين متتاليين ، والذي يمكن من خلاله اشتقاق قيدين جديدين هما :

$$\mathbf{X^*_k \le E \quad , \quad X^*_k \ge E+1}$$

وفي المثال المعطى فانه يمكن كتابة $X_1$ كما يلي: $1 \le x_1 \le 2$ ، وبالتالي يمكن التعبير عن شرط الأعداد الصحيحة للمتغير $X_1$ بقيدين هما : $X_1 \ge 2$ , $X_1 \le 1$ .

✓ تشكيل البرنامجين الفرعيين: يتم اضافة كل قيد الناتج عن المرحلة السابقة الى البرنامج الأصلي ، لنتحصل على برنامجين آخرين يتم حل كل واحد منهما حلا مستقلا باستخدام طريقة السمبلاكس. وبالتالي، فان البرنامج الأصلي لمثالنا يفرع الى برنامجين يتكون من البرنامج الأصلي مضاف اليه القيد الأول المستنتج وهو $X_1 \le 1$ ، و الثاني أيضا يتكون من البرنامج الأصلي مضاف اليه القيد $X_1 \ge 2$ ، أي:

$$\text{Max}Z = 2x_1 + 4x_2 \qquad\qquad \text{Max}Z = 2x_1 + 4x_2$$

$$(1)\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

- **الخطوة الثالثة: عملية التحديد**

تقوم هذه الخطوة على:

- ✓ تقييم حلول البرنامجين الفرعيين ، فاذا تم الحصول على الحل الأمثل بشرط العدد الصحيح يتم ترشيحه ليكون حل أمثل للبرنامج الأصلي ، وبعكسه تتم عملية التفريع بالاعتماد على نفس المراحل السابقة.
- ✓ تتم المقارنة بين النتائج العددية المثلى للبرامج الفرعية ليقع الاختيار على أفضل النتائج . ولزيادة كفاءة الحل لابد من ادخال مبدأ التحديد ،حيث اذا كانت دالة الهدف من نوع التعظيم فان قيمة دالة الهدف للحل الأمثل في البرنامج الفرعي يمثل الحد الأدنى للبرنامج الأصلي و كل البرامج الفرعية التي تؤدي حلولها الى قيم دالة هدفية أصغر من الحد الأدنى تصبح ملغاة، أما اذا كانت دالة الهدف من نوع التخفيض فان الحل الأمثل للبرنامج الفرعي يمثل الحد الأعلى للبرنامج الأصلي وكل البرامج الفرعية التي تؤدي حلولها الى قيم دالة هدفية أكبر من الحد الأعلى تصبح ملغاة

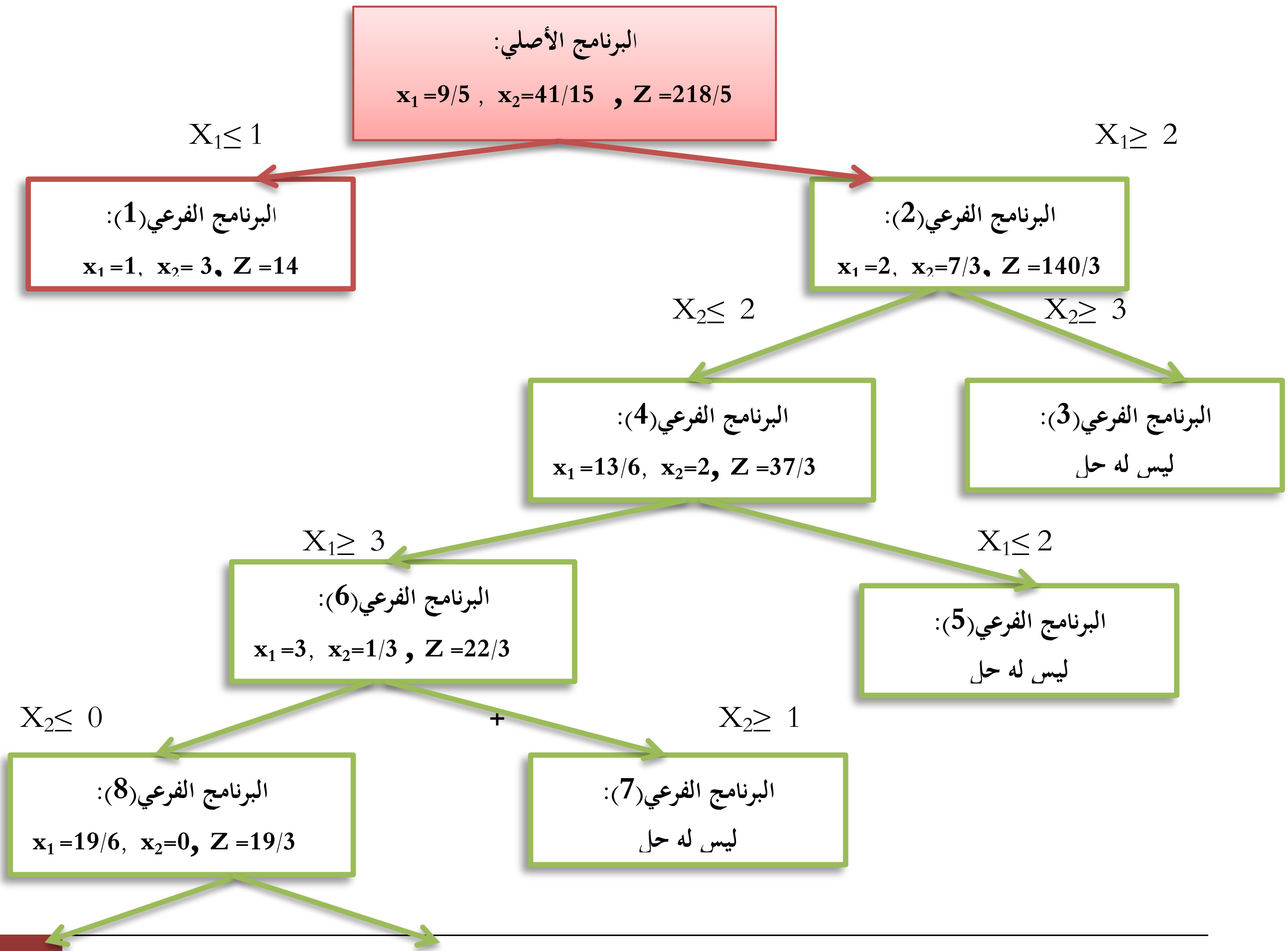
وبحل البرنامجين الفرعيين لمثالنا نتحصل على النتائج التالية:

البرنامج الفرعي (1): $\mathbf{x_1=1\ ,\ x_2=3\ ,\ Z=14}$

البرنامج الفرعي (2): $x_1=2\ ,\ x_2=7/3\ ,\ Z=140/3$

نلاحظ أنه تم التوصل الى الحل الأمثل العددي الصحيح للبرنامج الفرعي (1) لذا نتوقف عن عملية التفريع، في حين لم يتم الحصول على قيم صحيحة لمتغيرات القرار في الحل الأمثل للبرنامج الفرعي (2) حيث بقيت قيمة المتغير $x_2$ عبارة عن كسر ، مما يستدعي تفريع البرنامج الفرعي (2) من جديد بنفس الخطوات السابقة.

ومن أجل توضيح عملية البحث بطريقة سهلة نقوم بتمثيلها على شكل شجرة قرار الموالي:



| $X_1 \leq 3$ | $X_1 \geq 4$ |
|---|---|
| البرنامج الفرعي(**10**): $x_1=3,\ x_2=0,\ Z=6$ | البرنامج الفرعي(**9**): ليس له حل |

ان عملية تحديد الحل الأمثل وفق هذه الطريقة تكون باختيار أحسن حل عددي صحيح من الحلول المرشحة في النموذجين الفرعيين (1) و (10)، لينصب الاختيار على حل النموذج الفرعي (1) الذي يحقق اكبر قيمة لدالة الهدف ، ويسمى بذلك الحد الأدنى للمسألة وتكون كل البرامج المتفرعة ملغاة . وبالتالي فانه يجب على المؤسسة انتاج سفينة واحدة من النوع A و ثلاث سفن من النوع B من أجل تحقيق ربح أعظمي قدره 14 وحدة نقدية. **و هذه النتيجة نفسها المتوصل اليها في الطريقتين السابقتين .**

**ملاحظة:**

**يتوقف البحث عن الحل الأمثل عبر فروع شجرة القرار عند توفر أحد الشروط الثلاثة:**

- ✓ **النموذج الفرعي ليس له حل .**
- ✓ **النموذج الفرعي يقبل حل عددي صحيح .**
- ✓ **في حالة قيمة دالة الهدف للنموذج الفرعي اقل أو يساوي من قيمة دالة الهدف لأي فرع آخر يحتوي على حل أمثل عددي صحيح**

## III.تمارين تطبيقية:

### 1 . تمارين محلولة:

**التمرين الأول**: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MaxZ= 40\, x_1+60\, x_2$$

$$\begin{cases} x_1+ 20x_2 \leq 11 \\ 7\, x_1+ x_2 \leq 21 \\ 2x_1+2\, x_2 \leq 13 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \\ x_1,\ x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

**المطلوب**: البحث عن قيمة $x_1$ و $x_2$ لتعظيم دالة الهدف باستخدام طريقتي قطع المستوي ، التفريع و التحديد.

**التمرين الثاني:** ليكن النموذج الخطي الخاص بمسألة إنتاج منتوجين بالاعتماد على مادتين أوليتين:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب:** 1. ايجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلاكس.

2. بافتراض $x_1, x_2$ وحدات غير قابلة للتجزئة ، فأوجد الحل الأمثل بطريقة Gomory مع التوضيح من خلال التمثيل البياني.

**التمرين الثالث:** ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max} Z = 400x_1 + 600x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب:** 1. ايجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية .

2. بافتراض أن $x_1$ وحدات غير قابلة للتجزئة ، فأوجد الحل الأمثل بطريقة B.B مع التوضيح من خلال التمثيل البياني.

**التمرين الرابع:** ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max} Z = 4x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ -4x_1 - 2x_2 \geq -9 \\ 10x_1 \leq 22 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 \text{ entier} \end{cases}$$

**المطلوب:** 1.أوجد الحل باستخدام طريقة التفريع و التحديد.

2.مثل بيانيا منطقة الحلول المقبولة للحل الأمثل.

**التمرين الخامس:** ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 1/2\ x_1 + x_2 \leq 5/4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

**المطلوب**: 1.حل هذا النموذج باستخدام طريقة المستوي القاطع . ماذا تلاحظ؟

2. ماذا نفعل لتجاوز هذه المشكلة؟

**الحلول:**

**حل التمرين الأول:**

قبل تطبيق طريقتي البرمجة بالأعداد الصحيحة نحل المسألة أولا باستخدام طريقة السمبلاكس:

النموذج المعياري:

$$MaxZ = 40\ x_1 + 60\ x_2\ + 0\ e_1\ + 0\ e_2\ + 0\ e_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + e_1 = 11 \\ 7\ x_1 + x_2\ + e_2 + = 21 \\ 2x_1 + 2\ x_2 + e_3\ = 13 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \\ 7x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

| | | | 40 | 60 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| 0 | $e_1$ | 11 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $e_2$ | 21 | 7 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $e_3$ | 13 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| Z= 0 | | | -40 | -60 | 0 | 0 | 0 |
| 60 | $x_2$ | 11/2 | ½ | 1 | ½ | 0 | 0 |
| 0 | $e_2$ | 31/2 | 13/2 | 0 | -1/2 | 1 | 0 |
| 0 | $e_3$ | 2 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| Z=330 | | | -10 | 0 | 30 | 0 | 0 |
| 60 | $x_2$ | 9/2 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1/2 |
| 0 | $e_2$ | 5/2 | 0 | 0 | 6 | 1 | -13/2 |
| 40 | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| **Z=350** | | | **0** | **0** | **20** | **0** | **10** |

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن قيم سطر التقييم جميعها معدومة أو موجبة، لذا فان شرط الأمثلية قد تحقق للبرمجة الخطية حيث تكون النتائج المحصل عليها كما يلي: $x_1 = 2$ , $x_2 = 9/2$ , $Z = 350$

و لكن هذه النتائج ليست بقيم صحيحة للمتغيرة $x_2$ ، لذا يتطلب الأمر تحسينها باتباع احدى الطريقتين التاليتين:

✓ **طريقة قطع المستوى:**

ننطلق من سطر المتغيرة $x_2$ من أجل كتابة القيد المضاف الذي يكون كالتالي:

$$D_K - \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j \leq 0 \Rightarrow 1/2 - 1/2\, e_3 \leq 0$$

و بتعويض متغيرة الفوارق بالمتغيرات الأساسية نتحصل على قيد gomory التالي :

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

ومنه يكون النموذج الجديد بعد اضافة هذا القيد كما يلي:

$$\text{MaxZ} = 40\, x_1 + 60\, x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 20x_2 \leq 11 \\ 7\, x_1 + x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 2\, x_2 \leq 13 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

وبتطبيق طريقة السمبلاكس عليه ، نتحصل على ما يلي:

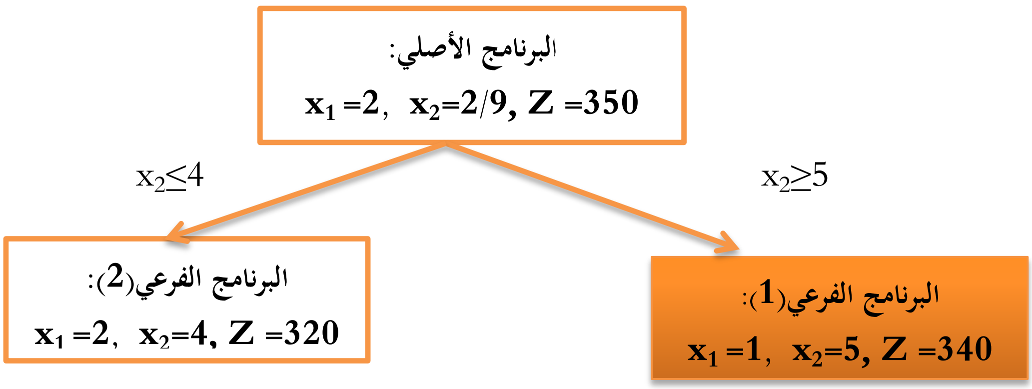
| | | | 40 | 60 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $\mathbf{x_2}$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
| 0 | $e_1$ | 11 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $e_2$ | 21 | 7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $e_3$ | 13 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $e_4$ | 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Z= 0 | | | -40 | -60 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 60 | $\mathbf{x_2}$ | 11/2 | ½ | 1 | ½ | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $e_2$ | 31/2 | 13/2 | 0 | -1/2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $e_3$ | 2 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | $e_4$ | 1/2 | ½ | 0 | -1/2 | 0 | 0 | 0 |
| Z=330 | | | -10 | 0 | 30 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | $x_2$ | 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| 0 | $e_2$ | 9 | 0 | 0 | 6 | 1 | 0 | -13 |
| 0 | $e_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2 |
| 40 | $x_1$ | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 |
| **Z=340** | | | **0** | **0** | **20** | **0** | **0** | **20** |

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن قيم سطر التقييم جميعها معدومة أو موجبة، لذا فان شرط الأمثلية قد تحقق للبرمجة الخطية، كما أن هذا الحل مقبول لأن كل من $x_1$ و $x_2$ أعداد صحيحة و هي على الترتيب 1 و5 وذلك من دالة هدف قيمتها 340وحدة نقدية.

✓ **طريقة التفريع و التحديد:**

انطلاقا من جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي للمسألة ، ننطلق من المتغيرة $x_2$ للقيام بعملية التفريع ؛والذي يمكن كتابته كما يلي: $5 \leq x_2 \leq 4$ . و بالتالي نتحصل على شجرة القرار التالية:




الحل للبرنامج الفرعي (2) غير مقبول لأن قيمة دالة الهدف أقل مما عليه بالنسبة للحل للبرنامج الفرعي (1) رغم أن قيم $x_1$ و $x_2$ أعداد صحيحة. لذا نقبل بنتيجة البرنامج الفرعي الأول وهي نفسها المتوصل اليها بطريقة قطع المستوي.

**<u>حل التمرين الثاني:</u>**

✓ 1.ايجاد الحل بطريقة السمبلاكس:

النموذج المعياري:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 4x_2 + 0e_1 + 0e_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + e_1 = 5 \\ 10x_1 + 6x_2 + e_2 = \leq 45 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

| | | | 5 | 4 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ |
| 0 | $e_1$ | 5 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | $e_2$ | 45 | 10 | 6 | 0 | 1 |
| Z= 0 | | | -5 | -4 | 0 | 0 |
| 0 | $e_1$ | ½ | 0 | 2/5 | 1 | -1/10 |
| 5 | $x_1$ | 45/10 | 1 | 3/5 | 0 | 1/10 |
| Z=225/10 | | | 0 | -1 | 0 | 5/10 |
| 4 | $x_2$ | 5/4 | 0 | 1 | 5/2 | -1/4 |
| 5 | $x_1$ | 15/4 | 1 | 0 | -3/2 | ¼ |
| **Z=95/4** | | | **0** | **0** | **5/2** | **¼** |

من الجدول الأخير يتبين أنه يتحقق الانتاج الأمثل بـ 15/4وحدة من المنتوج الأول و 5/4وحدة من المنتوج الثاني من أجل تحقيق ربح قدره 95/4وحدة نقدية.

✓ 2. تطبيق طريقة Gomory بالرسم البياني:

ننطلق من سطر المتغيرة $x_1$ من أجل كتابة القيد المضاف لأنها تحمل أكبر قيمة كسرية الذي يكون كالتالي:

$$D_K - \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j \leq 0 \Rightarrow 3/4 - 1/2\, e_1 - 1/4\, e_2 \leq 0$$

و بتعويض متغيرات الفوارق بالمتغيرات الأساسية نتحصل على قيد gomory التالي :

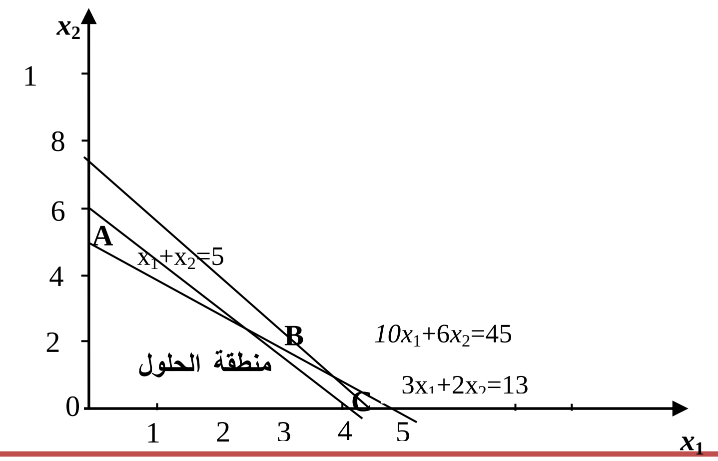
$$3x_1 + 2x_2 \leq 13$$

وعليه يكون النموذج الجديد كالتالي:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

و بتطبيق خطوات الطريقة البيانية للبرمجة الخطية نتحصل على الرسم البياني و جدول نقاط منطقة الحلول التاليين:




| قيمة دالة الهدف | احداثيات النقاط | النقاط |
|---|---|---|
| $MaxZ_0=0$ | $0:(x_1=0, x_2=0)$ | **0** |
| $MaxZ_A=20$ | $A:(x_1=0, x_2=5)$ | **A** |
| **$MaxZ_b=23$** | **$B, x_1=3, x_2=2)$** | **B** |
| $MaxZ_C=65/3$ | $C:(x_1=13/3, x_2=0)$ | **C** |

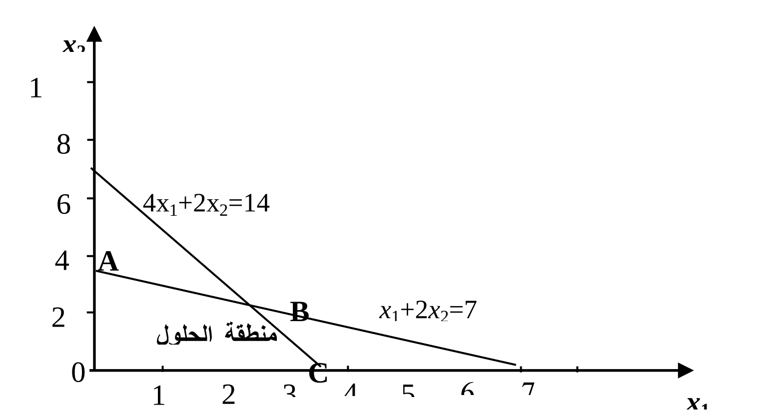
وعليه، فان الحل الأمثل الذي يجعل قيم $x_1, x_2$ أعداد صحيحة يكون عند النقطة B أي أن الانتاج الأمثل يتحقق بـ 3وحدات من المنتوج الأول و 2وحدات من المنتوج الثاني من أجل تحقيق ربح قدره 23وحدة نقدية.

**حل التمرين الثالث:**

✓ 1. حل البرنامج بيانيا:

بتطبيق خطوات الطريقة البيانية للبرمجة الخطية نتحصل على الرسم البياني و جدول نقاط منطقة الحلول التاليين:

| قيمة دالة الهدف | احداثيات النقاط | النقاط |
|---|---|---|
| $MaxZ_0=0$ | $0:(x_1=0, x_2=0)$ | **0** |
| $MaxZ_A=2100$ | $A:(x_1=0, x_2=7/2)$ | **A** |
| **$MaxZ_B=7000/3$** | **$B:(x_1=7/3, x_2=7/3)$** | **B** |
| $MaxZ_C=1400$ | $C:(x_1=14/4, x_2=0)$ | **C** |




وعليه، فان الحل الأمثل يكون عند النقطة B أي $x_1=7/3$ , $x_2=7/3$, $z=7000/3$

✓ 2. ايجاد الحل الأمثل بطريقة B.B بالرسم البياني:

بافتراض أن $x_1$ متغيرة غير قابلة للتجزئة سنختارها لتفريع البرنامج الأصلي للمسألة الى برنامجين فرعيين حيث:

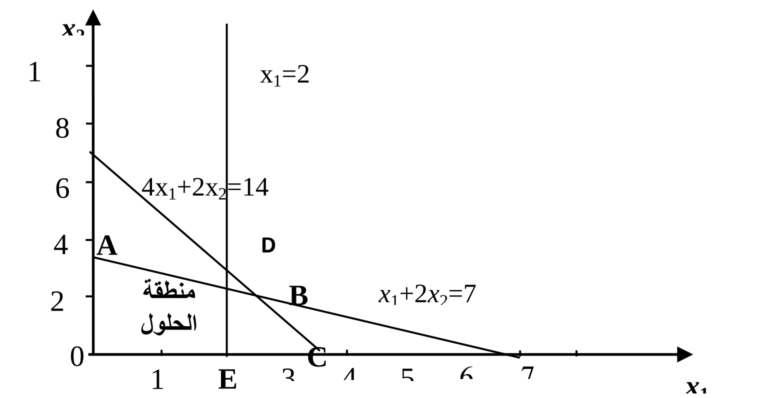
$$MaxZ = 400\,x_1 + 600\,x_2$$

$$(1)\quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq 7 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \\ x_1 \text{ entier} \end{cases}$$

$$MaxZ = 400\,x_1 + 600\,x_2$$

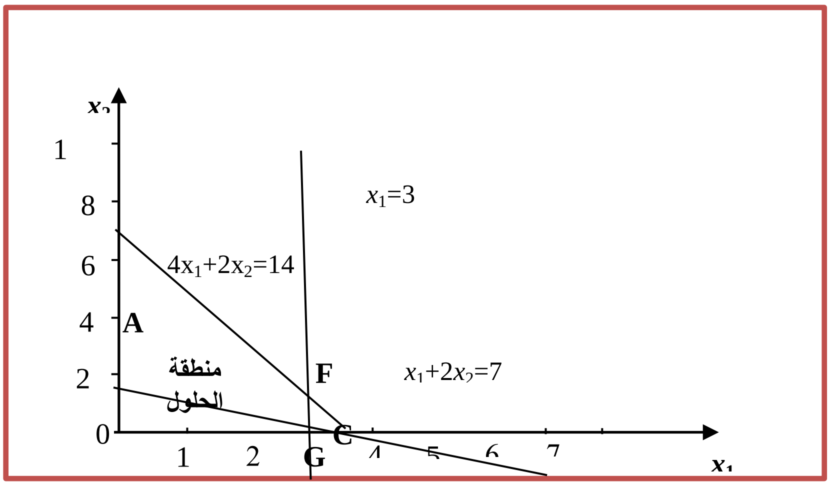
$$(2)\quad \begin{cases} 4\,x_1 + 2\,x_2 \leq 14 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 3 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \\ x_1 \text{ entier} \end{cases}$$

ويمكن توضيح الحل البياني بطريقة التفريع و التحديد للنموذج الفرعي (1) كما يلي:

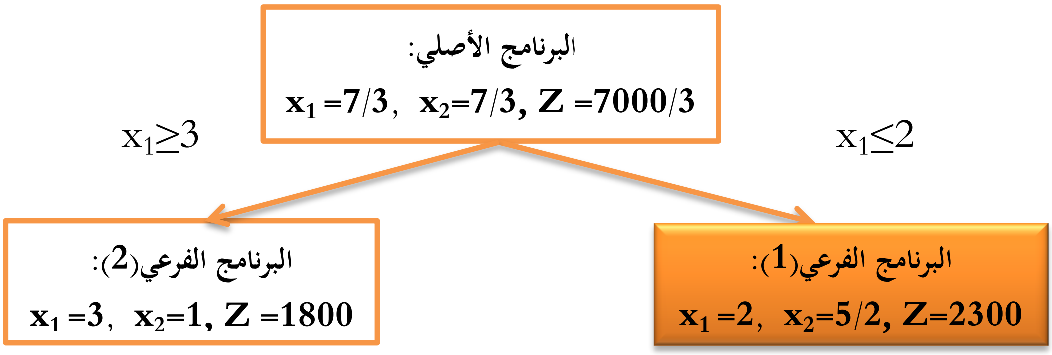


وحسب الرسم أعلاه نجد أن هناك أربعة نقاط تمثل أركان منطقة الحلول الممكنة هي 0,A,D,E ، وبمقارنة الحلول المختلفة عند هذه النقاط يتبين أن الحل الأمثل يكون عند النقطة D ذات الاحداثيات $x_1=2$ و $x_2=3$ .

كما يمكن توضيح الحل البياني بطريقة التفريع و التحديد للنموذج الفرعي (2) كما يلي:




وحسب الرسم أعلاه نجد أن هناك ثلاثة نقاط تمثل أركان منطقة الحلول الممكنة هيG, F, C ، وبمقارنة الحلول المختلفة عند هذه النقاط يتبين أن الحل الأمثل يكون عند النقطة Fذات الاحداثيات $x_1=3$ و $x_2=1$ . وبالتالي ، يمكننا اعداد شجرة القرار لهذه المسألة:




الحل للبرنامج الفرعي (2) غير مقبول لأن قيمة دالة الهدف أقل مما عليه بالنسبة للحل للبرنامج الفرعي (1) . لذا ، ينصب الاختيار على حل النموذج الفرعي (1) الذي يحقق اكبر قيمة لدالة الهدف ، ويسمى بذلك الحد الأدنى للمسألة ويكون البرنامج المتفرع ملغى.

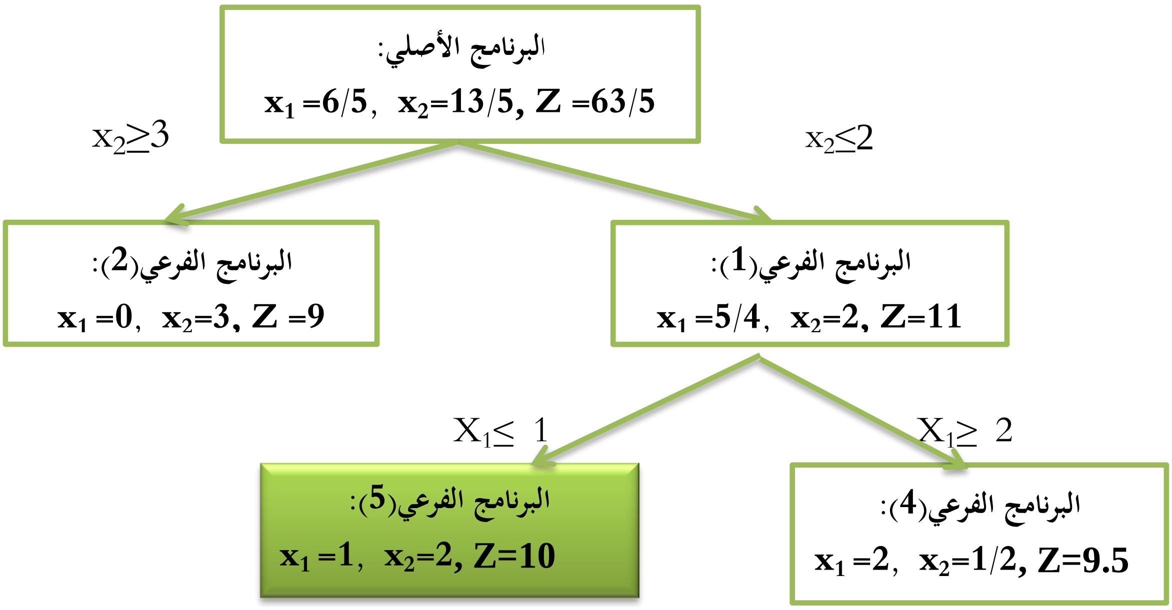
**حل التمرين الرابع:**

✓ 1.ايجاد الحل الأمثل بطريقة B.B :

لدينا:

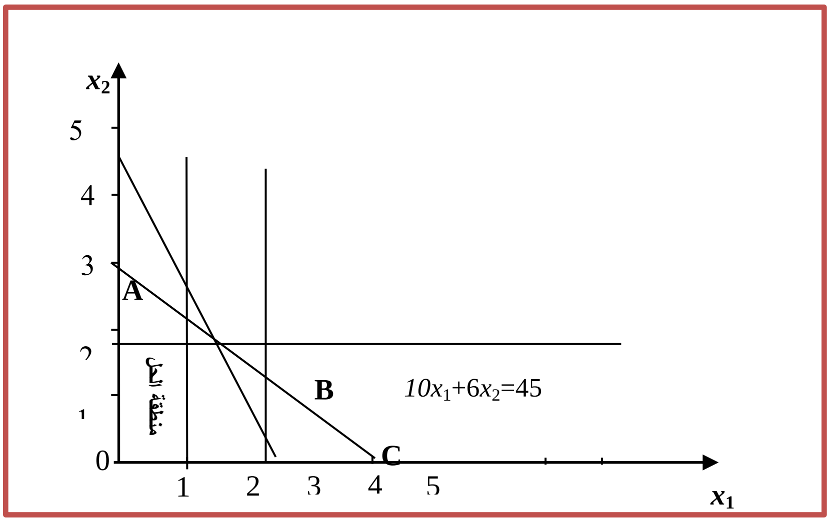
$$\begin{aligned}&MaxZ = 4x_1 + 3x_2\\ &\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ 10x_1 \leq 22 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, \text{entier}\end{cases}\end{aligned} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned}&MaxZ = 4x_1 + 3x_2\\ &\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ -4x_1 - 2x_2 \geq -9 \\ 10x_1 \leq 22 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, \text{entier}\end{cases}\end{aligned}$$

بتطبيق خطوات طريقة التفريع و التحديد نتحصل على الشجرة التالية: المسألة:




ان عملية تحديد الحل الأمثل وفق هذه الطريقة تكون باختيار أحسن حل عددي صحيح من الحلول المرشحة في النموذجين الفرعيين (2) و (5)، لينصب الاختيار على حل النموذج الفرعي (5) الذي يحقق اكبر قيمة لدالة الهدف ، ويسمى بذلك الحد الأدنى للمسألة وتكون كل البرامج المتفرعة ملغاة.

✓ 2. التمثيل البياني للحل الأمثل: الحلول التاليين:



**حل التمرين الخامس:**

✓ 1. حل النموذج بطريقة Gomory:

بتطبيق خطوات حل البرنامج الخطي بدون شرط الأعداد الصحيحة نتحصل على جدول الحل الموالي:

| | | | 2 | 3 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ |
| 2 | $x_1$ | 5/2 | 1 | 2 | 2 |
| Z= 5 | | | 0 | 1 | 4 |

وبما أن $x_1$ متغير قاعدي كسري فان القيد المضاف يكتب كالتالي:

$$D_K - \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j \leq 0 \Rightarrow 1/2 \leq 0$$

نلاحظ أن الجزء الكسري (1/2) يستحيل أن يكون أقل من أو يساوي الصفر ، لذا فانه لا يمكن كتابة القيد الجديد ومن ثمة لا يمكن تطبيق طريقة gomory.

✓ 2. لتجاوز المشكلة السابقة علينا التعديل في معاملات القيد بجعلها عبارة عن أعداد صحيحة:

وفي هذه الحالة نضرب طرفي القيد في العدد 4 لنتحصل على القيد التالي:

$$2x_1+4x_2 \leq 4$$

ومن ثم يكون الحل الأمثل للنموذج الجديد كالتالي:

| | | | 2 | 3 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ |
| 2 | $x_1$ | 5/2 | 1 | 2 | ½ |
| Z= 5 | | | 0 | 1 | 1 |

ومنه يمكن كتابة القيد المضاف كالتالي:

$$D_K - \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j \leq 0 \Rightarrow 1/2 \ -1/2\ e_1 \leq 0$$

و بتعويض متغيرات الفوارق بالمتغيرات الأساسية نتحصل على قيد gomory التالي:

$$x_1+2x_2 \leq 2$$

وفي الاخير نحصل على الحل الامثل العددي الصحيح لهذه المسألة :

$$Z=4 \ ,\ x_1= 2 \ ,\ x_2= 0$$

## 2. تمارين مقترحة

**التمرين الأول:** أوجد الحل الأمثل للبرامج الخطية التالية باستعمال طريقة Gomory:

$$\text{MaxZ}= x_1+ 9x_2 +x_3 \quad \begin{cases} x_1+ 2x_2+3x_3\leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2+ 2x_3\leq 15 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \\ X_1,\ x_2\geq 0 \\ X_1,\ x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

$$\text{MaxZ}=2x_1+10\ x_2 +x_3 \quad \begin{cases} 5x_1+ 2x_2+x_3\leq 15 \\ 2x_1+x_2+7x_3\leq 20 \\ x_1+3\ x_2 +2x_3\leq 5 \\ X_1,\ x_2\geq 0 \\ X_{1,}\ x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

**التمرين الثاني**: أوجد الحل الأمثل للبرامج الخطية التالية باستعمال طريقة التفريع التحديد:

$$\text{MaxZ}= x_1+ 2x_2 +x_3 \quad \begin{cases} 2\ \ x_1+ 3x_2+3x_3\leq 11 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \\ X_1,\ x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

$$\text{MinZ}=x_1+ x_2 \quad \begin{cases} 2x_1+ 2x_2\geq 5 \\ 12x_1+5x_{23}\leq 30 \\ X_1,\ x_2\geq 0 \\ X_{1,}\ x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

**التمرين الثالث**: ليكن النموذج الخطي الخاص بمسألة إنتاج منتوجين بالاعتماد على مادة أولية:

$$\text{Max Z}= 2x_1+3\ x_2 \quad \begin{cases} 2x_1+ 4x_2\leq 5 \\ x_{1,}\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

وكان الجدول النهائي له كالتالي:

| | | | 2 | 3 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | V | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ |
| 2 | $\mathbf{x_1}$ | 5/2 | 1 | 2 | 1/2 |
| Z= 5 | | | 0 | 1 | 1 |

**المطلوب**:

. شرح النتائج المتحصل عليها

.بافتراض $x_1,x_2$ وحدات غير قابلة للتجزئة، فأوجد الحل الأمثل بطريقة المستوي القاطع( طريقة Gomory)

بالتمثيل البياني.

# الفصل الثـالث : شبكات الأعمــــال

## أهـداف الفـصـل:

ينتظر من الطالب بعد قراءة هذا الفصل أن يصبح قادرا على:

- فهم فوائد و استخدامات شبكة الأعمال.
- رسم شبكة الأعمال للمشاريع .
- استخدام أساليب التحليل الشبكي.
- تطبيق خطوات تسريع المشاريع و تحديد التكلفة الاضافية.

## محتوى الفصل:

I. . مفهوم وبناء شبكة الاعمال.

1.مفهوم شبكة الاعمال.

2. بناء شبكة الأعمال.

II .أساليب تحليل المخططات الشبكية.

1. أسلوب المسار الحرج ( CPM).

2. أسلوب مراجعة و تقييم المشروع( PERT).

III.الشبكة/ التكلفة (تعجيل المشروع).

1. العلاقة بين تكلفة المشروع و زمنه.

2. خطوات تعجيل المشرع.

IV. تمارين تطبيقية.

1. تمارين محلولة.

2. تمارين مقترحة

**تمهيد:**

تعتبر شبكات الاعمال من الطرق المهمة في ادارة المشاريع حيث تساعد مسير المشروع في تخطيط و جدولة العمليات المختلفة اللازمة لأداء عملية معينة بحيث تسمح بالتحكم في وقت مختلف أنشطة المشروع و بالتالي في وقت انجازه، وكذا العمل على تخفيض تكاليفه.

من الناحية التاريخية، لم تتطور شبكات الاعمال بشكل مفاجئ في أواخر الخمسينات و انما سبقتها محاولات عديدة من خلال استخدام اساليب اقل تعقيدا كمخططات جانت و مخططات المعلمات .فكانت هذه المخططات البداية الاولى التي استندا اليها التطوير اللاحق للنماذج الشبكية، حيث طورت طريقتي المسار الحرج و مراجعة و تقييم المشروع في كل من بريطانيا و و.م.أ في الوقت نفسه تقريبا و باتجاهين متوازيين، الأول صناعي و الثاني عسكري.

## I. مفهوم وبناء شبكة الاعمال:

### 1. مفهوم شبكة الاعمال:

تعرف شبكة الاعمال بأنها عبارة عن بيان تخطيطي يتألف من أسهم و عقد توضح العلاقات بين الأنشطة التي يتكون منها المشروع ، وذلك من أجل معرفة :[1]

- ✓ الوقت اللازم لإنجاز المشروع.
- ✓ تواريخ بداية و نهاية كل نشاط.
- ✓ الأنشطة الحرجة للمشروع التي لا تقبل التأخير
- ✓ الحد الأقصى الذي يسمح به للأنشطة غير الحرجة بالتأخير دون أن يؤثر ذلك على مدة انجاز المشروع.
- ✓ الموارد اللازمة لإنجاز المشروع.
- ✓ البدائل الممكنة لتقليص الفترات الزمنية الطويلة و مقايضتها عند الحاجة بالتكاليف.

لذا، فان أهميتها تتجسد في أنها:

- ✓ تعتبر قاعدة يتم الاعتماد عليها في عمليات التخطيط للمشاريع.
- ✓ تمثل وسيلة لرقابة المشاريع.
- ✓ تمثل اساسا مهما من أسس اتخاذ القرارات.
- ✓ تساعد الادارة في التعامل مع الاخطاء المصاحبة لأي مشروع يتم تنفيذه.

كما يستخدم أسلوب شبكات الأعمال في مجالات عديدة منها:[2]

[1] محمد راتول، ***بحوث العمليات***، ط2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006 ، ص ص 290، 291

[2] صبحي المحمد، ابراهيم نائب، ***بحوث العمليات*** ، منشورات جامعة حلب، سوريا، 2008، ص302

- ✓ مشاريع الانشاء و المباني.
- ✓ مشروعات الأبحاث و التطوير في مجال التكنولوجيا أو الادارة.
- ✓ جدولة عملية بناء السفن و الطائرات.
- ✓ جدولة برامج الصيانة.
- ✓ تنفيذ حملات الدعاية و الاعلان لتسويق المنتجات.

## 2. بناء شبكة الاعمال

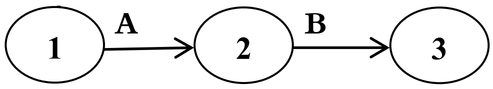
### أولا: المصطلحات المستخدمة في بناء الشبكة:

توجد مجموعة من المصطلحات التي يتم استخدامها في بناء الشبكات و المتمثلة في:[1]

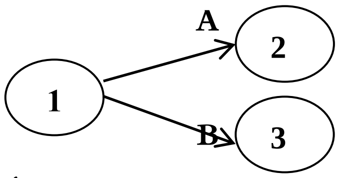
- **الحدث:** هو انجاز معين يحدث في نقطة زمن معينة ولا يحتاج لوقت أو موارد بحد ذاته، يمثل الانتهاء من الانشطة السابقة و بداية الأنشطة اللاحقة، و يعبر عنه في غالب الأحيان بدائرة أي : ○
- **النشاط:** هو جزء من المشروع يحتاج الى امكانيات و يأخذ وقتا لأدائه، حيث يمثل بسهم موجه يكتب فوقه أو تحته اسم النشاط و مدة انجازه. أي: ⟶

كما تنقسم الانشطة الى :[2]

- **الأنشطة المتعاقبة:** هي الأنشطة التي تحدث في ترتيب متعاقب كما في الشكل التالي:




- **الانشطة المتوازية:** هي التي يتم تنفيذها بوقت واحد .تظهر كما يلي:




- **النشاط الوهمي:** هو نشاط يستخدم لتحديد اعتمادية نشاط معين على بقية الأنشطة ، لكنه لا يحتاج أي زمن أو مواد أو تكاليف .أي له أهمية في اظهار تتابع منطقية العلاقات بين أنشطة المشروع الشبكة ،و يمثل عادة بسهم متقطع أي : --------------->
- **المسار :** هو سلسلة من الأنشطة و الأحداث المتعاقبة التي تبدأ ببدأ المشروع و تنتهي بإنجازه. وهو نوعان:
  - **المسار الحرج:** هو المسار الذي يمثل مجموعة النشاطات الحرجة وتبدأ من بداية المشروع وتستمر حتى نهايته، ويمثل أطول مسار لإتمام المشروع.

---

[1]دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 209.

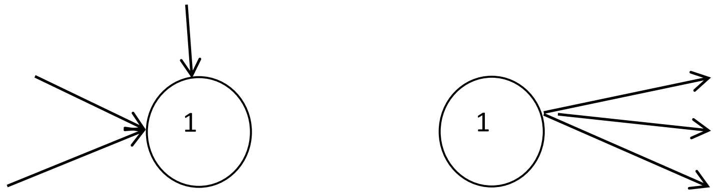
[2] نجم عبود نجم ، *مدخل الى ادارة المشروعات* ، ط1، دار الوراق ، الاردن، 2013، ص 389

- **المسار غير الحرج:** وهو ذلك المسار الذي يمكن تأجيل انشطته دون التأثير على وقت انجاز المشروع بالكامل.

## ثانيا. قواعد بناء شبكات الأعمال:

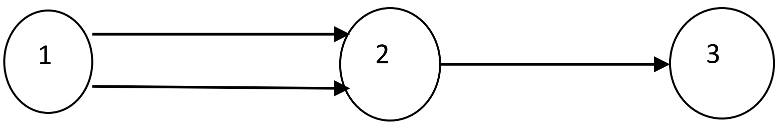
يجزء المشروع الى مجموعة من الأنشطة ، ثم يحدد حدثي البداية و النهاية ليتم تحديد ترتيب الأنشطة التي تسبق الأخرى بحيث توضع الأنشطة بتتابع منطقي مع الأخذ بعين الاعتبار قواعد رسم المخطط الشبكي و المتمثلة في:[1]

- ✓ لكل مخطط شبكي حدث بداية واحد وحدث نهاية واحد.
- ✓ قبل البدء بأي نشاط يجب انجاز الانشطة السابقة له .
- ✓ كل نشاط يكون محصورا بين حدث البداية و حدث النهاية .
- ✓ يمكن لكل حدث ان يخرج منه اكثر من نشاط واحد أو أن يستقبل أكثر من نشاط واحد كما في الشكلين التاليين:

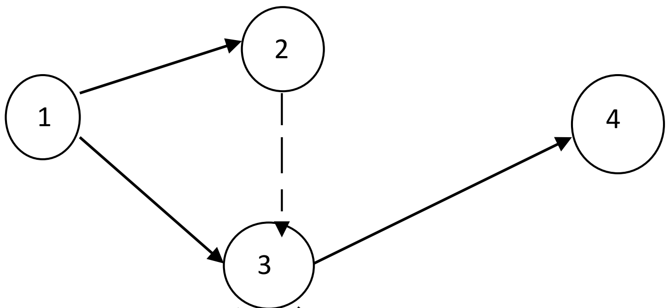



- ✓ عدم تكرار رقم الحدث من مرة واحدة في شبكة المشروع بحيث يكون الترقيم من اليسار الى اليمين ومن الأعلى الى الأسفل.
- ✓ كل حدثين متتابعين لا يمكن ربطهما بأكثر من نشاط واحد , ويمكن معالجة ذلك باستخدام الانشطة الوهمية كما في الشكل الاتي:

هذا التمثيل غير صحيح



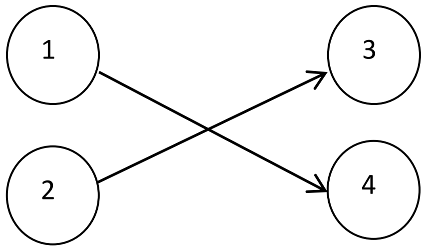

التمثيل الصحيح يكون كالاتي:




- ✓ عدم استخدام الانشطة الوهمية الا في حالة الضرورة تفاديا لزيادة مدة انجاز المشروع.

[1] سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص ص 228، 230

- ✓ الانشطة يجب ان تكون باتجاه واحد من حدث بداية المشروع الى حدث نهاية المشروع ولا يجوز رسم سهمين متعاكسين.
- ✓ تجنب تقاطع الانشطة تفاديا لعدم وضوح و فهم الشبكة، أي بالشكل التالي:.



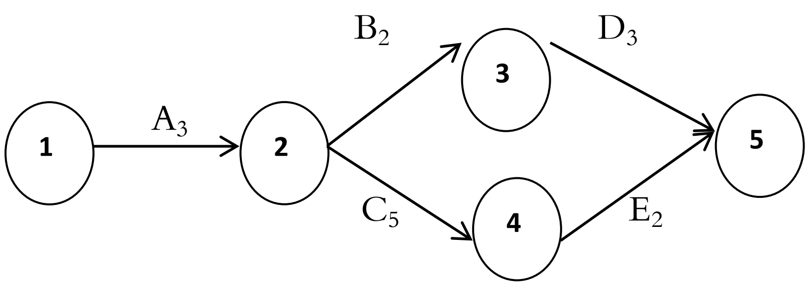

ولغرض توضيح كيفية رسم شبكة الأعمال نأخذ المثال التالي:

**مثال**: تخص المعلومات المبينة في الجدول التالي مشروع معين ، و المطلوب رسم شبكة الأعمال له :

| زمن النشاط(يوم) | الأحداث | النشاط |
|---|---|---|
| 3 | (2-1) | A |
| 2 | (3-2) | B |
| 5 | (4-2) | C |
| 3 | (5-3) | D |
| 2 | (5-4) | E |

**الحل:**

بتطبيق قواعد بناء شبكة الأعمال نتحصل على المخطط الشبكي التالي:




نلاحظ أن الحدث رقم (1)يبين حدث البداية بحيث لم يسبقه أي شيء، كما أن هذا الحدث يبين بداية النشاط A الذي مدة انجازه 3أيام و الحدث (2) يمثل نهاية النشاط A ، وهو في نفس الوقت يبين بداية كل من النشاطين C.B اللذين مدة انجازهما على التوالي هما 2، 5 أما نهايتهما فتمثلت في الحدثين (3) و (4) على الترتيب .في حين يمثل الحدث رقم (5) نهاية النشاطين D، E اللذين مدة انجازهما على التوالي هما 3، 2 يوم ،وهو في نفس الوقت يمثل حدث نهاية الشبكة .

بالإضافة الى ذلك ، نلاحظ أن لهذه الشبكة مسارين هما :

- ✓ المسار الأول يضم: (1،2) – (2،3) – (3،5) بحيث يستلزم 8أيام( 3، 2، 3).
- ✓ المسار الثاني يضم: ( 1،2) – (2،4) – (4،5) بحيث يستلزم 10ايام ( 3، 5، 2).

ويعد المسار الثاني هو أطول مسارات الشبكة ، لذا فهو يمثل المسار الحرج الذي يحدد زمن انجاز هذا المشروع بحيث الأنشطة الواقعة عليه و المتمثلة في A .C.E تدعى بالأنشطة الحرجة أي الأنشطة التي لا تقبل التأخير في تنفيذها .

## II-.أساليب تحليل المخططات الشبكية:

بعد أن يتم بناء المخطط الشبكي بشكل منطقي ، تأتي الخطوة الموالية و المتمثلة في تحليله التي يقصد بها ايجاد أقل وقت ممكن لإنهاء تنفيذ المشروع وأقل كلفة ممكنة له ، بالإضافة الى الاستخدام الأفضل للموارد .ويتم ذلك باستخدام احدى الاسلوبين التاليين:

- ✓ أسلوب المسار الحرج (critical path method).
- ✓ أسلوب مراجعة و تقييم المشروع (program evaluation and review technique).

### 1. أسلوب المسار الحرج ( CPM):

يعد أسلوب المسار الحرج من بين أساليب التحليل الشبكي المستخدمة في تخطيط و جدولة المشاريع التي تتسم بالتأكد ، اذ يرى بأن زمن انجاز النشاط ($D_{ij}$) له صفة كمية واحدة مؤكدة يتم تقديره بناءا على خبرة و معرفة القائمين على المشروع أو بالاعتماد على بيانات سابقة لمشروع مماثل . لذا فان الهدف الأساسي لهذا الأسلوب في تحديد المدة الزمنية لإنهاء المشروع تكمن في تحديد الزمن اللازم لتنفيذ الأنشطة الحرجة الموجودة في مسار واحد في شبكة العمل ، و التي تتميز بأنها لا تتحمل أي تأخير أثناء عملية انجازها لأن هذا سوف يؤدي الى زيادة المدة اللازمة للمشروع وبالتالي تأخير تسليمه للهيئة المستخدمة.

#### أولا. أزمنة نشاط المشروع :

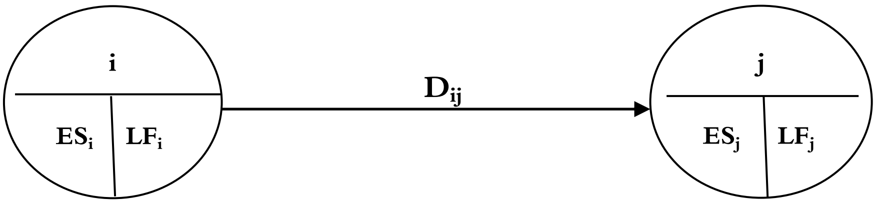
يحسب لكل نشاط أربعة أزمنة و هي :[1]

- ❖ **زمن البداية المبكرة( Earliest start time)**: هو الزمن المبكر الذي يفترض أن يبدأ فيه النشاط، حيث يرمز له بالرمز$ES_{ij}$ .
- ❖ **زمن النهاية المبكرة ( Earliest finish time)**: هو الزمن المبكر الذي يفترض أن ينتهي فيه النشاط، حيث يرمز له بالرمز $EF_{ij}$ .
- ❖ **زمن البداية المتأخرة( Latest start time)**: يمثل أخر وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط دون أن يؤثر ذلك على مدة انجاز المشروع، حيث يرمز له بالرمز $LS_{ij}$.

[1]عبد الستار أحمد محمد الالوسي، مرجع سابق، ص ص 274، 275

❖ **زمن النهاية المتأخرة ( Latest finish time):** ): يمثل أخر وقت يمكن أن ينتهي فيه النشاط دون أن يؤثر ذلك على مدة انجاز المشروع، حيث يرمز له بالرمز $EF_{ij}$.

ويمكن تمثيل الازمنة المبكرة والمتأخرة في شبكة الاعمال بالشكل الاتي:




## ثانيا. تحديد المسار الحرج:

يعتمد تحديد المسار الحرج للشبكة على حساب عدد من الأزمنة لأنشطة المشروع و التي يعتمد عليها في التسيير الزمني لكامل المشروع ، اذ يمكن حساب تلك الأزمنة على ثلاث مراحل وهي :

**المرحلة الأولى: مرحلة الحسابات الأمامية**

هي المرحلة المخصصة لحساب وقت البداية المبكرة للنشاط ، حيث يتم حسابه بدءا من الحدث الأول في الشبكة وفقا لتسلسل منطقي منظم باتجاه نهاية الشبكة بافتراض أن الوقت المبكر لأول نشاط يكون صفرا ، ثم يتم بعد ذلك حساب الأوقات المبكرة للأنشطة المتبقية حسب تسلسلها بجمع زمن البداية المبكرة للنشاط السابق مع مدة النشاط ، أما في حالة في كون النشاط مسبوقا بنشاطين أو أكثر فانه يؤخذ بأكبر زمن مبكر .و يعبر عن ذلك بالعلاقات الرياضية التالية :[1]

- ✓ في الحدث الأول من أي مخطط شبكي يكون: $ES_i = 0$ .
- ✓ اذا كان الحدث (j) يرتبط بنشاط واحد فقط فان: $ES_j = ES_i + D_{ij}$.
- ✓ اذا كان الحدث (j) يرتبط بأكثر من نشاط واحد فان: $ES_j = Max\ [\ ES_i + D_{ij}]$ .

**المرحلة الثانية: مرحلة الحسابات الخلفية**

هي مرحلة مخصصة لحساب وقت النهاية المتأخرة للنشاط، حيث يتم حسابه من حيث انتهت الحسابات الأمامية و بالتحديد من الحدث الأخير ثم يتم بعد ذلك حساب أزمنة النهايات المتأخرة للأنشطة الباقية بطرح زمن النهاية المتأخرة للنشاط اللاحق من مدة النشاط ، أما في حالة كون النشاط ملحوقا بنشاطين أو أكثر فانه يؤخذ بأقل زمن. و يعبر عن ذلك بالعلاقات الرياضية التالية [2]:

- ✓ في الحدث الأخير في الشبكة يكون لدينا ما يلي: $ES_j = LF_j$ .
- ✓ اذا كان الحدث (i) يرتبط بقاعدة نشاط واحد فقط فان : $LF_i = LF_j - D_{ij}$ .

[1] محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، مرجع سابق، ص 231

[2] مرجع سابق، ص 232

✓ اذا كان الحدث (i) يرتبط بأكثر من قاعدة نشاط فان: $LF_i= Min [LF_j - Dij]$ .

## المرحلة الثالثة: جدولة المشروع

هي مرحلة تدوين مختلف أزمنة أنشطة المشروع (البدايات والنهايات المبكرة و المتأخرة) ،بالإضافة الى ما يعرف بزمن السماح الكلي الذي يمثل مقدار الزمن الذي يمكن للنشاط أن يستهلكه على المدة المقدرة التي يحتاجها النشاط دون أن يتسبب ذلك في زيادة مدة انجاز المشروع ، وهذا في جدول يدعى بجدول أزمنة المشروع الذي يأخذ الشكل التالي:

| اسم النشاط | مدة النشاط | الأوقات المبكرة | | الأوقات المتأخرة | | زمن الفائض الكلي | النشاط الحرج |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | للبداية | للنهاية | للبداية | للنهاية | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

ويتم حساب بقية الأزمنة التي لم تحسب على الشبكة بالعلاقات الرياضية التالية:[1]

✓ زمن النهاية المبكرة للنشاط يساوي: $EF_i = ES_i + D_{ij}$ .

✓ زمن البداية المتأخرة للنشاط يساوي: $LS_i = LF_i - D_{ij}$ .

✓ زمن الفائض الكلي للنشاط يساوي: $Tt = LS_i - ES_i = LF_i - EF_i$ .

## المرحلة الرابعة : ايجاد المسار الحرج

هي مرحلة تعيين المسار الحرج الذي هو سلسلة الأنشطة التي يساوي الفائض الكلي لكل منها صفرا ، وذلك من حدث بداية المشروع الى حدث نهاية المشروع ، وهو الذي على أساسه يتم تحديد زمن انجاز المشروع. ويعبر عن النشاط الحرج بالعلاقة الرياضية التالية:

$$Tt = LS_i - ES_i = LF_i - EF_i = 0$$

**قاعدة :**

**تحدد الأنشطة الحرجة على الشبكة و نميزها عن غيرها بمسار مزدوج الخطوط**

**ملاحظة 1:**

**في الحسابات الأمامية و لغرض تحديد عدد الأنشطة المرتبطة بالحدث ، يؤخذ بعين الاعتبار رأس السهم ، أما في حالة الحسابات الخلفية و لغرض تحديد عدد الأنشطة المرتبطة بالحدث فانه يؤخذ بعين الاعتبار قاعدة السهم**

[1] محمد راتول، مرجع سابق، ص 302

**ملاحظة:**

**في الغالب ما تكون الأنشطة الحرجة في الشبكة واقعة بين الأحداث التي يكون فيها الأزمنة المبكرة للبداية مساويا للأزمنة المتأخرة للنهاية .**

**مثال:** : احدى المنشآت الصناعية قررت اقامة مشروع صناعي ضمن حدود المنشأة الحالية، و بعد اجراء عدد من الدراسات و التحليلات تم تحديد البيانات التالية:

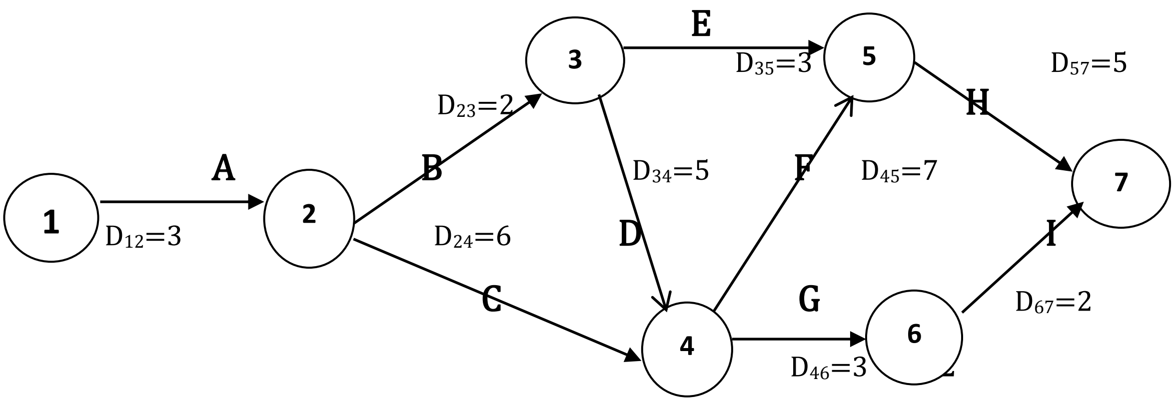
| النشاط | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الاحداث | (2-1) | (3-2) | (4-2) | (4-3) | (5-3) | (5-4) | (6-4) | (7-5) | (7-6) |
| المدة(شهر) | 3 | 2 | 6 | 5 | 3 | 7 | 3 | 5 | 2 |

المطلوب:1. رسم المخطط الشبكي و تثبيت البيانات عليه.

2 . حساب الأزمنة المبكرة و المتأخرة لأنشطة المشروع و تحديد المسار الحرج.

**الحل:**

✓ بتطبيق قواعد رسم شبكة الأعمال نتحصل على المخطط التالي:




✓ الحسابات الأمامية: نحسب زمن البداية المبكرة لأحداث شبكة الاعمال

$ES_1 = \mathbf{0}$

$ES_2 = \text{Max.} ( ES_1 + d_{12} ) = \text{Max.} ( 0+3) = \mathbf{3}$

$ES_3 = \text{Max.} ( ES_2 + d_{23} ) = \text{Max.} (3+2) = \mathbf{5}$

$ES_4 = \text{Max.} ( ES_2 + d_{24} , ES_3 + d_{34} ) = \text{Max.} (3+6 , 5+5) = \mathbf{10}$

$ES_5 = \text{Max.} ( ES_3 + d_{35} , ES_4 + d_{45} ) = \text{Max.} (5+3 , 10+7 ) = \mathbf{17}$

$ES_6 = \text{Max.} ( ES_4 + d_{46} ) = (10+3) = \mathbf{13}$

$ES_7 = \text{Max.} ( ES_6 + d_{67} , ES_5 + d_{57} ) = ( 13+2 , 17+5) = \mathbf{22}$

✓ الحسابات الخلفية: نحسب زمن النهاية المتأخرة لأحداث شبكة الأعمال

$LF_7 = ES_7 = 22$

$LF_6 = \text{Min}\ (\ LF_7 - d_{67}\ ) = \text{Min.}(\ 22 - 2\ ) = 20$

$LF_5 = \text{Min}\ (\ LF_7 - d_{57}\ ) = \text{Min.}(\ 22 - 5\ ) = 17$

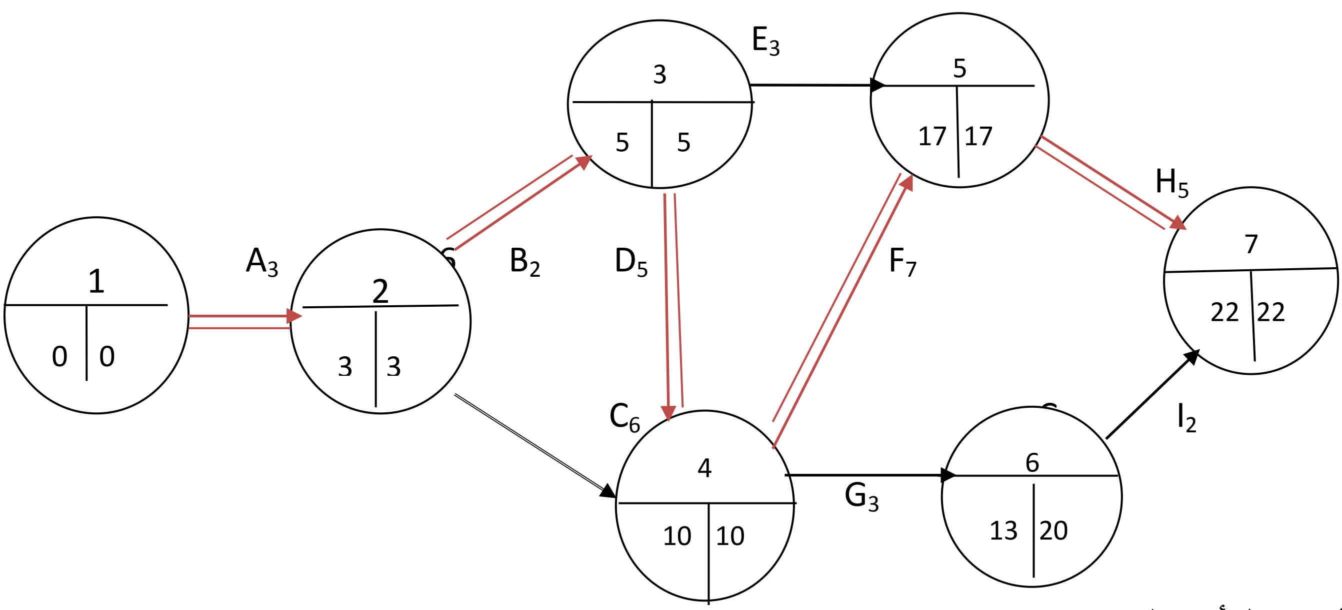
$LF_4 = \text{Min.}(\ LF_6 - d_{46}\ ,\ LF_5 - d_{45}\ ) = \text{Min.}(\ 20-3\ ,\ 17-7\ ) = 10$

$LF_3 = \text{Min}\ (\ LF_4 - d_{34}\ ,\ LF_5 - d_{35}\ ) = \text{Min}\ (\ 10-5\ ,\ 17-3\ ) = 5$

$LF_2 = \text{Min}\ (\ LF_3 - d_{23}\ ,\ LF_4 - d_{24}\ ) = \text{Min}\ (5-2\ ,\ 10-6) = 3$

$LF_1 = \text{Min}\ (\ LF_2 - d_{12}\ ) = \text{Min}\ (3-3\ ) = 0$

✓ تثبيت زمن البداية المبكرة و زمن النهاية المتأخرة على أحداث المخطط الشبكي:




✓ جدول أزمنة المشروع:

| اسم النشاط | مدة النشاط | الأوقات المبكرة | | الأوقات المتأخرة | | زمن الفائض الكلي | النشاط الحرج |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | للبداية | للنهاية | للبداية | للنهاية | | |
| A | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | حرج |
| B | 2 | 3 | 5 | 3 | 5 | 0 | حرج |
| C | 6 | 3 | 9 | 4 | 10 | 1 | / |
| D | 5 | 5 | 10 | 5 | 10 | 0 | حرج |
| E | 3 | 5 | 8 | 14 | 17 | 9 | / |
| F | 7 | 10 | 17 | 10 | 17 | 0 | حرج |
| G | 3 | 10 | 13 | 17 | 20 | 7 | / |

| H | 5 | 17 | 22 | 17 | 22 | 0 | حرج |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 2 | 13 | 15 | 20 | 22 | 7 | / |

من الجدول اعلاه يمكن تحديد الانشطة الحرجة وهي المظللة باللون الغامق اذ نجد ان زمن الفائض الكلي لها مساوية للصفر , لذا فأن المسار الحرج هو A .B.D.F.H. وهو يمثل أقل زمن يمكن ان ينجز فيه هذا المشروع و المساوي لـ 22شهرا.

## 2. أسلوب مراجعة و تقييم المشروع (PERT)

يعد أسلوب مراجعة و تقييم المشروع من بين أساليب التحليل الشبكي المستخدمة في تخطيط و جدولة المشاريع التي تتسم بعدم التأكد في مدة انجار أنشطة المشروع بسبب وجود عوامل و متغيرات خارجية تؤثر في عملية الانجاز . لذا فان أوجه الاختلاف بين هذا الأسلوب و أسلوب المسار الحرج تتمثل في:[1]

- ✓ يعتبر أسلوب CPM الزمن مقدارا ثابتا بينما أسلوب PERT ينظر اليه على أنه متغير عشوائي مستمر يخضع لتوزيع احتمالي معين.
- ✓ يستخدم أسلوب CPM تقديرا واحدا للزمن، بينما أسلوب PERT يستخدم ثلاث تقديرات من أجل تقدير الزمن المتوقع لإنجاز كل نشاط في ظروف تتسم بعدم التأكد.
- ✓ يستخدم أسلوب CPM في ادارة المشاريع الخاصة بالإنشاء و التشييد حيث أن هذه المشاريع تستخدم في أغلب الأحيان مواد نمطية تعتمد على تكنولوجيا ثابتة ، بينما PERT تستخدم في مجالات البحوث و التطوير و خاصة الصناعات المتعلقة بالفضاء و الصناعات الحديثة التي تتميز منتجاتها بدرجة عالية من التغير.

### أولا. التوزيع الاحتمالي في أسلوب PERT:

- **طبيعة أزمنة أنشطة المشروع:**

ان زمن كل نشاط من أنشطة المشروع هو متغير عشوائي مستمر خاضع لتوزيع احتمالي مستمر يعرف بتوزيع Beta بحيث يكون محصورا في معرفة الزمن التقريبي للنشاط في شبكة Pert ، وذلك عندما تكون البيانات الفعلية مفقودة . و يقوم هذا التوزيع على قاعدة ثلاث تقديرات لزمن انجاز النشاط هي:[2]

- **الزمن المتفائل:** هو الزمن الذي يتوقع أن يتم فيه النشاط لو تم كل شيء على ما يرام بنفس الإمكانيات المتاحة، أي أنه الزمن الذي يفترض أفضل الظروف المتوقعة (أحسن الاحتمالات) ، اذ يمثل الحد الأدنى الذي يمكن أن يستغرقه النشاط. يرمز له بالرمز a.

[1] نجم عبود نجم ، مرجع سابق، 2013، ص 392

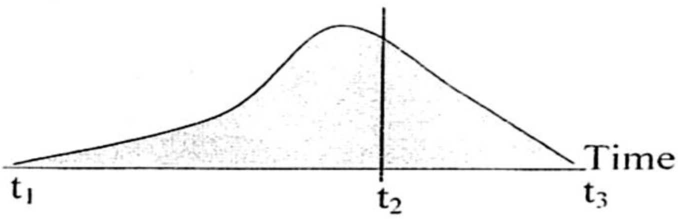
[2] سهيلة عبد الله سعيد ، مرجع سابق، ص 244

- **الزمن المتشائم**: هو الزمن الذي يشير إلى التقدير الأكثر تحفظاً لتوقع أسوء للظروف من مشاكل ومعوقات تجعل احتمالات التنفيذ واطئة لمصادف سوء الحظ في كل خطوة مع استبعاد الظروف غير الطبيعية جداً. لذا فهو يمثل الحد الأقصى الذي يمكن أن يستغرقه النشاط، و يرمز له بالرمز b.
- **الزمن الأكثر احتمالا**: هو الزمن المتوقع أن ينتهي فيه العمل في جميع النشاطات تحت الظروف الطبيعية وتكون درجة احتمال حدوثه عالية بسبب اقترانه بأعلى درجة من الاطمئنان فليس هناك تفاؤل أو تشاؤم. إذ أنه تقدير عادي ومناسب للأحوال الاعتيادية، و يرمز له بالرمز m. مع العلم أن $a \leq m \leq b$.

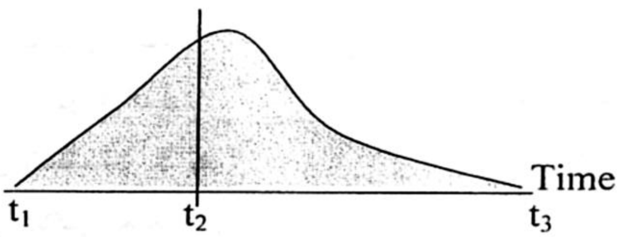
وبسبب هذه القيم الثلاثة للأزمنة ، فان متخذ القرار يمكنه الاطلاع على سير عمليات تنفيذ الأنشطة و التعرف على طبيعة توزيع هذه الأزمنة من خلال أحد الأشكال أو الصيغ الثلاثة التالية حسب توزيع Beta ، بحيث تكون نقطة تحدبها عند النقطة m و أن نقاط نهاياتها تكون عند النقطة a و b ، فهو ليس بالضرورة متناسق حول الوسط وذلك لأنه بإمكاننا الحصول على تقدير متفائل قريب جدا من التقدير الأكثر احتمالا و التقدير المتشائم يكون بعيدا جدا عن التقدير الأكثر احتمالا أو العكس:

**شكل رقم 01 :الأشكال الثلاث لأنشطة المشروع وفق توزيع Beta**

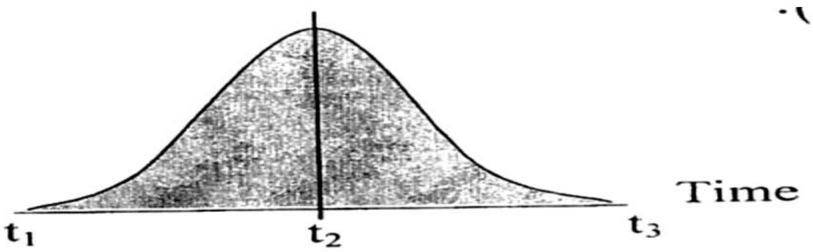
**التوزيع المتفائل ( مائل نحو اليسار):**




**التوزيع المتشائم ( مائل نحو اليمين):**




**التوزيع المتماثل:**




المصدر : محمود العبيدي، مؤيد الفضل، مرجع سابق، ص ص 246، 247

- **الزمن المتوقع للنشاط:**

ان وجود الأزمنة الثلاثة لكل نشاط من شأنه أن يخلق ارباكا في الحسابات الزمنية للمشروع ، لذلك لا بد من توحيد هذه الأزمنة من خلال وضعها في اطار علاقة رياضية موحدة بحيث يتم تحديد وزن أو قيمة مرجحة لكل واحد من هذه الازمنة الثلاث كما يلي :[1]

- أربعة أوزان للزمن الأكثر احتمالاً.
- وزن واحد للزمن التفاؤلي.
- وزن واحد للزمن التشاؤمي.

وعلى هذا الأساس ، يتم حساب الزمن المتوقع الذي يرمز له بالرمز te ، وهو يعبر عن الوقت الذي يستغرقه أي نشاط في ضوء التقديرات الزمنية الثلاث السابقة .يمكن ايجاده من خلال المعادلة التالية:

$$\text{الزمن المتوقع} = \frac{\text{الزمن التفاؤلي} + 4(\text{الزمن الأكثر احتمالاً}) + \text{الزمن التشاؤمي}}{6}$$

$$te = \frac{a+4(m)+b}{6}$$

ان حساب المعدل الزمني لإنجاز كل نشاط لا يكفي لإعطاء صورة واضحة عن طبيعة البيانات التي حسب لها المعدل الزمني ، لذا فانه يجب معرفة وحساب مقدار تفاوت أزمنة كل نشاط عن زمنها المتوقع و الذي يمثله التباين الذي يرمز له بالرمز $(\sigma^2)$ ، أي أنه يعكس درجة التأكد أو عدم التأكد في زمن النشاط بحيث كلما كانت قيمته كبيرة زادت درجة عدم اليقين في تقدير الأزمنة مما يتطلب من المسير مراقبتها جيدا حتى ولو كان النشاط غير حرج . يعبر عنه رياضيا بالعلاقة التالية:[2]

$$\sigma^2 = \left[\frac{b-a}{6}\right]^2$$

كما يمكن حساب الانحراف المعياري لكل نشاط كما يلي :

$$\sigma_{te} = \sqrt{\sigma^2}$$

[1] محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، مرجع سابق، ص 244

[2] نجم عبود نجم ، مرجع سابق، ص 429

## ثانيا. تحديد المسار الحرج:

يتم تحديد المسار الحرج في أسلوب Pert بنفس الطريقة في أسلوب CPM الا أنه عوضا أن نأخذ بالقيمة $d_j$ وهو الزمن المحدد لكل نشاط ، فانه يتم الأخذ بقيمة te الذي يمثل الزمن المتوقع لكل نشاط . وبذلك يتم تحديده حسب مرحلتي الحسابات الأمامية و الخلفية بالعلاقتين التاليتين:

- **الحسابات الأمامية:** $ES_j = Max\ [\ ES_i + te_{ij}]$ مع الأخذ بعين الاعتبار أن الحدث الأول يكون $ES_i=0$ .
- **الحسابات الخلفية :** $LF_i= Min\ [LF_j\ - te_{ij}]$ مع الأخذ بعين الاعتبار أن الحدث الأخير يكون $ES_j= LF_j$ .

و يكون الزمن المتوقع للمشروع في هذه الحالة مساوي لمجموع القيم المتوقعة للأنشطة الحرجة الداخلة للمسار، أما تباينه فهو تباين المسار الحرج الذي يحسب بالعلاقة التالية:

**التباين (للأنشطة الحرجة) = $\sigma^2$ للنشاط الاول + $\sigma^2$ للنشاط الثاني +........+ $\sigma^2$ للنشاط *n***

ولتبسيط كيفية ايجاد المسار الحرج في شبكة Pertنأخذ المثال التالي:

**مثال:** الجدول التالي يبين الأوقات المقدرة للأنشطة المرافقة و التي تمثل احدى شبكات الأعمال :

| النشاط | النشاط السابق | الزمن المتفائل | الزمن المتشائم | الزمن الأكثر احتمالا |
|---|---|---|---|---|
| A | / | 1 | 3 | 2 |
| B | / | 2 | 8 | 2 |
| C | A | 1 | 3 | 2 |
| D | B | 1 | 11 | 3/2 |
| E | B | ½ | 7.5 | 1 |
| F | C .D | 1 | 7 | 5/2 |
| G | E .F | 1 | 3 | 2 |
| H | C.D | 6 | 8 | 7 |
| I | G.H | 3 | 11 | 4 |
| J | E.F | 4 | 8 | 6 |

المطلوب: - حساب الزمن المتوقع لكل نشاط و كذا تباينه.

- رسم الشبكة و تحديد المسار الحرج.
- تحديد الزمن المتوقع لإنهاء المشروع و تباينه.

**الحل:**

✓ بتطبيق معادلة الزمن المتوقع و التباين نتحصل على النتائج التالية:

$te_A = a + 4m + b/6 = 1+2\times4+3/6 = \mathbf{2}$ , $\partial_A^2 = (b-a/6)^2 = (3-1/6)^2 = \mathbf{0.11}$

$te_B = a + 4m + b/6 = 2+2\times4+8/6 = \mathbf{3}$ , $\partial_B^2 = (b-a/6)^2 = (8-2/6)^2 = \mathbf{1}$

$te_C = a + 4m + b/6 = 1+2\times4+3/6 = \mathbf{2}$ , $\partial_C^2 = (b-a/6)^2 = (3-1/6)^2 = \mathbf{0.11}$

$te_D = a + 4m + b/6 = 1+3/2\times4+11/6 = \mathbf{3}$ , $\partial_D^2 = (b-a/6)^2 = (11-1/6)^2 = \mathbf{2.78}$

$te_E = a + 4m + b/6 = ½+1\times4+7.5/6 = \mathbf{2}$ , $\partial_E^2 = (b-a/6)^2 = (7.5-0.5/6)^2 = \mathbf{1.36}$

$te_F = a + 4m + b/6 = 1+2.5\times4+7/6 = \mathbf{3}$ , $\partial_F^2 = (b-a/6)^2 = (7-1/6)^2 = \mathbf{1}$

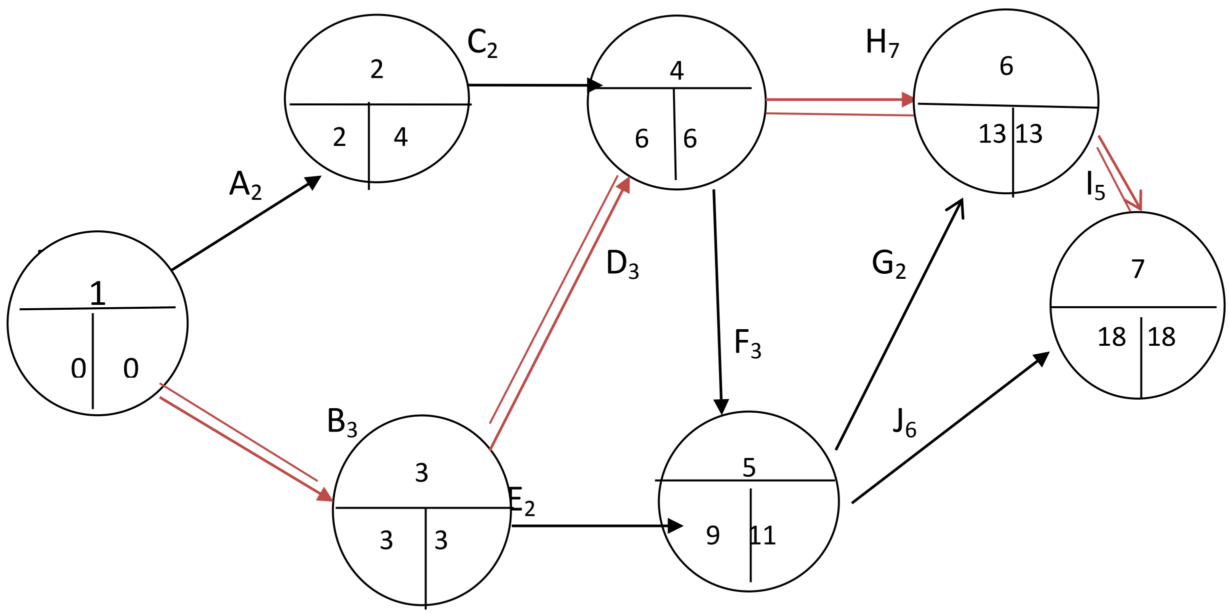
$te_G = a + 4m + b/6 = 1+2\times4+3/6 = \mathbf{2}$ , $\partial_G^2 = (b-a/6)^2 = (3-1/6)^2 = \mathbf{0.11}$

$te_H = a + 4m + b/6 = 6+7\times4+8/6 = \mathbf{7}$ , $\partial_H^2 = (b-a/6)^2 = (8-6/6)^2 = \mathbf{0.11}$

$te_I = a + 4m + b/6 = 3+4\times4+11/6 = \mathbf{5}$ , $\partial_I^2 = (b-a/6)^2 = (11-3/6)^2 = \mathbf{1.78}$

$te_J = a + 4m + b/6 = 4+6\times4+8/6 = \mathbf{6}$ , $\partial_J^2 = (b-a/6)^2 = (8-4/6)^2 = \mathbf{0.44}$

✓ بتطبيق قواعد رسم شبكات الأعمال نتحصل على المخطط الشبكي التالي:




المسار الحرج للشبكة هو : B, D, H,I

✓ تحديد الزمن المتوقع للمشروع وتباينه:

من الشبكة أعلاه نجد أن الزمن المتوقع للمشروع هو 18شهرا في حين أن تباينه هو تباين أنشطة المسار الحرج و المساوي لـ: التباين (للأنشطة الحرجة) = $\partial^2_B + \partial_D^2 + \partial^2_H + \partial^2_I$

التباين (للأنشطة الحرجة) = $1 + 2{,}78 + 0{,}11 + 1{,}78$

$$\partial^2 = 5.67$$

أما الانحراف المعياري فهو :

$$\sigma_{te} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{5.67} = 2.38$$

## ثالثا. احتمال انهاء المشروع عند نقطة زمنية:

لحساب احتمالية تنفيذ المشروع خلال فترة معينة قد تكون أكبر أو أصغر من الفترة الزمنية المتوقعة ، نتبع الخطوات التالية[1] :

- حساب معامل الاحتمال عن طريق الاحصائية التالية :

$$Z = \frac{D - Te}{\sigma_{te}}$$ حيث:

$Z$ : القيمة المعيارية ( معامل الاحتمال)

D : الوقت الذي نسعى لان ينتهي المشروع به.

Te : الزمن المتوقع لإنهاء المشروع .

$\sigma_{te}$: الانحراف المعياري للمشروع.

- استخراج قيمة معامل الاحتمال من جدول دالة التوزيع الطبيعي، حيث أن زمن المشروع يخضع لهذا القانون .

**مثال:** اوجد نسبة احتمال انهاء المشروع المشار اليه في المثال السابق عند : 20شهرا و 17 شهرا.

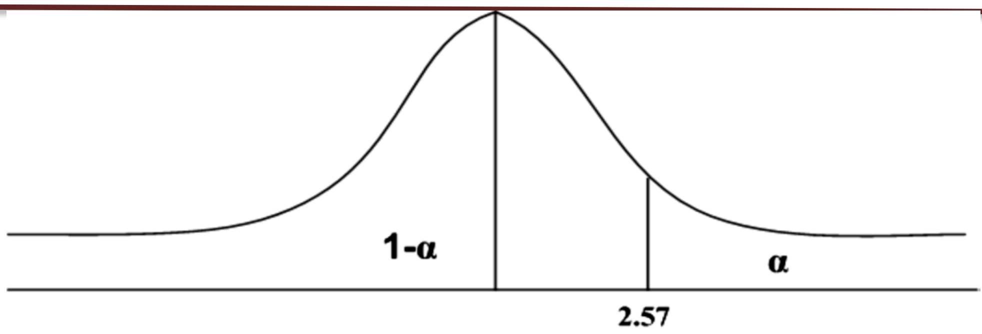
**الحل:**

✓ نسبة احتمال تنفيذ المشروع عند 20شهرا:

$$Z = \frac{D - Te}{\sigma_{te}} = 20-18/\ 2.38 = 0.84$$

بالرجوع الى جدول التوزيع الطبيعي نجد أن قيمة الاحتمال المقابلة لـ Z هي 0.2995 ، و أن احتمال انهاء المشروع في 20شهرا هو 0.2995 + 0.5 =0.7995 أي بنسبة 79,95 % . و الرسم الموالي يوضح ذلك:

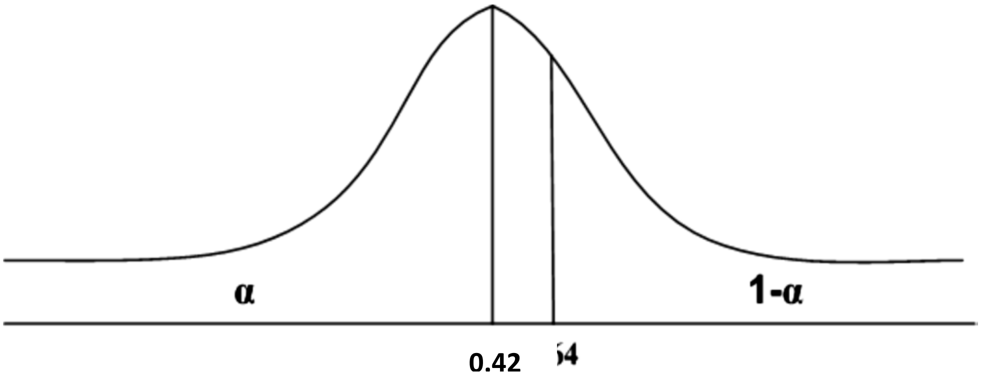
[1] محمد راتول ، مرجع سابق، ص 341




✓ نسبة احتمال تنفيذ المشروع عند 7

$$Z = \frac{D-Te}{\sigma_{te}} \quad =17-18/2.38=-0.42$$

✓ بالرجوع الى جدول التوزيع الطبيعي نجد أن قيمة الاحتمال المقابلة لـ Z هي 0.1628، و أن احتمال انهاء المشروع في 17شهرا هو 0.5- 0.1628 = 0.3372 أي بنسبة 33.72 % . و الرسم الموالي يوضح ذلك:




ملاحظة:

**في حالة ما اذا كان للمشروع أكثر من مسار حرج، فانه يتم الاعتماد عند حساب معامل الاحتمال على المسار الحرج ذو التباين الأكبر.**

## III.الشبكة/ التكلفة( تعجيل المشروع ):

يتم تنفيذ المشروع في العادة باستخدام موارد معينة تتناسب مع الزمن الطبيعي المطلوب لإنجاز أنشطته ، وعند الحاجة الى تنفيذه بوقت اقصر يتم استخدام موارد اضافية لتخفيض وقت هذه الأنشطة، وتعرف هذه العملية بتعجيل المشروع التي من اسبابها نذكر ما يلي:

- المردود المنتظر في مشاريع أخرى و الذي يمكن أن يضيع على المؤسسة.
- خطة استراتيجية تسعى لتنفيذها هيئة معينة.

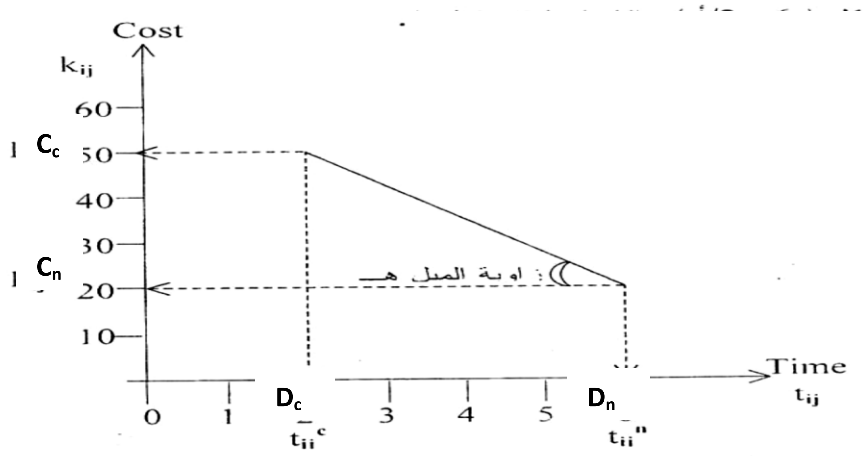
- تجنب الارتفاع في تكلفة تنفيذ المشروع.

لكن من الضروري دراسة مثل هذه الحالات من أجل تحقيق المنافع الاقتصادية الممكنة و التي تحصل في شبكات بيرت و المسار الحرج من خلال ما يسمى بمبادلة الزمن بالتكلفة.

## 1. العلاقة بين تكلفة المشروع و زمنه:

ان تقدير أوقات الأنشطة يتطلب بالمقابل تقدير الموارد المطلوبة لتنفيذها ، ما يعني بالضرورة أن هناك علاقة تبادلية ما بين الموارد و الزمن في حدود معينة والتي تظهر في الشكل الموالي:

**شكل رقم 02 : علاقة التكلفة بالزمن**




المصدر: محمد راتول، مرجع سابق، ص 316

باعتبار التكلفة دالة في زمن التنفيذ فيلاحظ أنه في عند التكلفة $c_n$ كانت مدة تنفيذ النشاط هي $D_n$، وعندما بادلنا الوقت بالتكلفة أي أضفنا التكلفة لتصبح $c_c$ فقد انخفضت مدة النشاط لتصل الى $D_c$ . ما يعني وجود علاقة خطية عكسية بين الزمن و التكلفة حيث ميل هذه العلاقة يظهر أثر تخفيض وحدة زمنية واحدة على التكلفة والذي يساوي :[1]

**ميل خط التكلفة= التغير في التكاليف / التغير في الزمن**

**$= C_c - C_n / D_n - D_c$**

حيث:

$C_n$ : التكلفة العادية

$D_n$: الزمن العادي (الطبيعي)

$C_c$: التكلفة المعجلة

---

[1] سهيلة عبد الله سعيد ، مرجع سابق، ص252

$D_c$: الزمن المعجل( المخفض)

ويعبر هذا الميل اقتصاديا **بالتكلفة الحدية** التي تمثل التكلفة الاضافية الناتجة عن تخفيض وحدة واحدة من الزمن .

## 2. خطوات تعجيل المشروع:

تنطلق جميع طرق الضغط من افتراض أن العلاقة بين التكاليف المباشرة والزمن هي علاقة خطية، وأن التخفيض يبدأ بالأنشطة الحرجة ذو الميل الأقل لمنحنى التكلفة، كما أنها تفترض أن الموارد المتاحة كافية للقيام بعملية الضغط ، حيث تتم عملية الضغط بأقل زيادة ممكنة في التكاليف المباشرة والى أقصى حد.

وعلى العموم، فان خطوات تعجيل المشروع تتمثل في الآتي: [1]

- رسم المخطط الشبكي للمشروع مع تحديد المسار الحرج له.
- حساب التكلفة الطبيعية للمشروع، وهي مجموع الكلف الطبيعية لجميع أنشطته.
- حساب ميل كل نشاط.
- تخفيض النشاط الحرج ذو أقل ميل بحيث لا يتعدى الفرق في الزمن ( أي ما بين الزمن الطبيعي و الزمن المعجل) مع حساب التكلفة الجديدة للمشروع و التي تساوي التكلفة القديمة مضافا اليها التكلفة الحدية مضروب في مقدار التخفيض.
- التأكد من أن المسار الحرج مازال حرجا لأن تخفيض وقت الأنشطة الواقعة عليه تغير من طبيعة الموقف، حيث قد تجعله غير حرج فتظهر مسارات حرجة جديدة على شبكة المشروع.
- تكرار الخطوة الرابعة حتى تصل الأوقات الطبيعية للأنشطة الحرجة الى أوقاتها التعجيلية أو يصبح التخفيض عديم الفائدة ( أي يبقى الوقت ثابتا بينما تزداد التكلفة) .

**قاعدة :**

**في حالة وجود أكثر من مسار حرج، فان أولوية التعجيل يكون لأحد البديلين التاليين:**

- **التعجيل بزمن نشاط مشترك ( ان وجد) بين المسارات الحرجة.**
- **التعجيل بزمن نشاط غير مشترك وذلك من كل مسار بنفس الوحدات الزمنية.**

ولتوضيح خطوات تعجيل المشروع سنستعين بالمثال التالي:

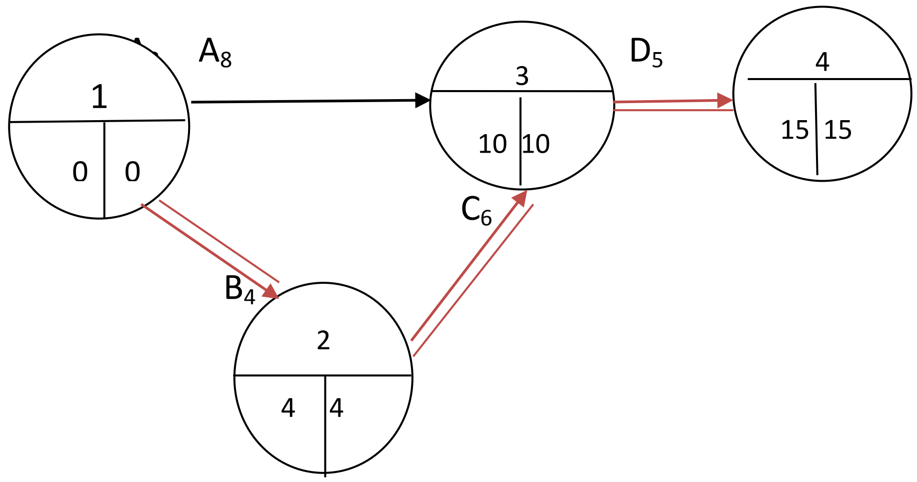
**مثال** : وضح خطوات تعجيل انجاز المشروع التالي:

[1] دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 231

| التكلفة المعجلة | الزمن المعجل | التكلفة العادية | الزمن العادي | النشاط السابق | النشاط |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 6 | 10 | 8 | / | A |
| 13 | 3 | 12 | 4 | / | B |
| 13 | 4 | 9 | 6 | B | C |
| 15 | 5 | 15 | 5 | A, C | D |

**الحل:**

✓ نقوم برسم الشبكة مع حساب التكلفة الاجمالية للمشروع:




نجد من الشبكة أن مدة انجاز المشروع هي 15شهرا في حين أن التكلفة الاجمالية له تساوي 46وحدة نقدية أي:

$C_1 = 10+12+9+15=46DA$.

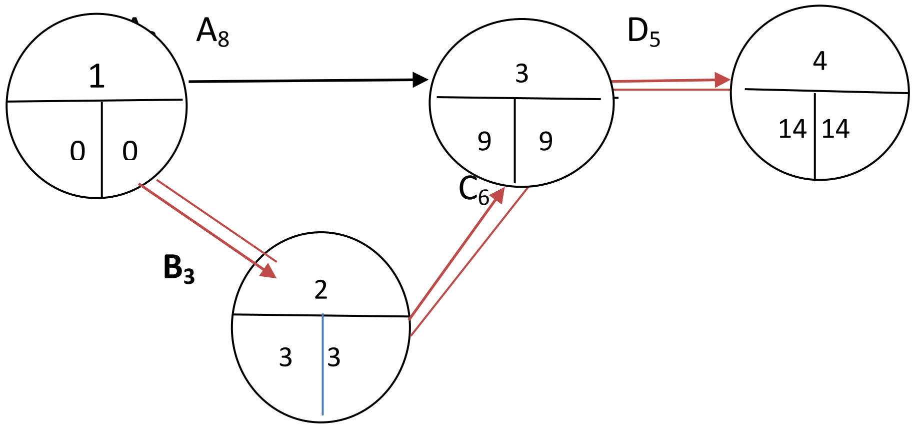
✓ نحدد المسارات في الشبكة و منها المسار الحرج وزمنها العادي:

| المسار الحرج | الزمن العادي | المسارات |
|---|---|---|
| / | 13 | A . D |
| **حرج** | **15** | **B.C.D** |

✓ نقوم بحساب ميل التكلفة لكل نشاط و الذي يظهر في الجدول التالي:

| ميل التكلفة | التغير في الزمن | التغير في التكاليف | النشاط |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | A |
| **1** | **1** | **1** | **B** |
| 2 | 2 | 4 | C |
| / | 0 | 0 | D |

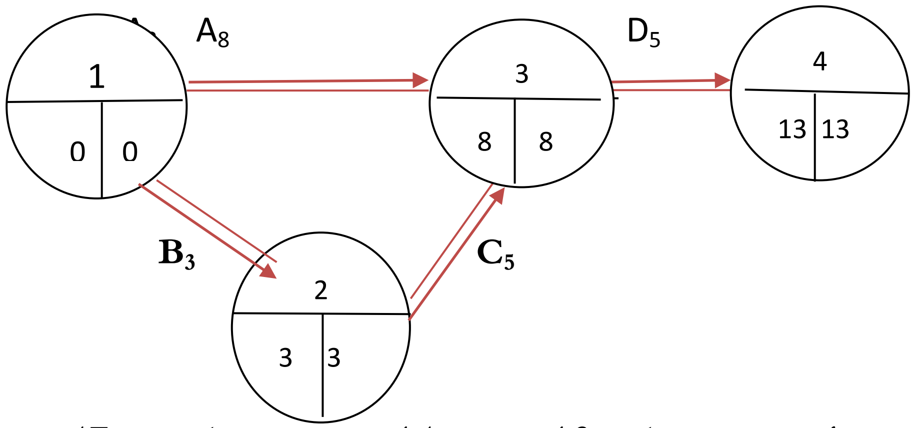
✓ نقوم بتعجيل النشاط الحرج ذي الأقل ميل تكلفة ، وفي هذه الحالة النشاط **B** هو الأقل ميلا بحيث يتم تخفيضه بوحدة زمنية واحدة ليصبح زمنه 3اشهر. وتكون الشبكة الجديدة بعد التخفيض كالتالي:




والنتيجة تصبح أن مدة المشروع تكون 14شهرا بدل 15شهرا، و تزداد التكلفة من 46و.ن الى 47و.ن أي:

$$C_2= 46 + 1\times1=47DA$$

✓ نواصل عملية التعجيل بالنشاط الحرج ذي الأقل ميل بعد أن أصبح النشاط B غير قابل للتعجيل، وهو النشاط **c** الذي نخفضه بمقدار التغير في الزمن ، لكن بالرجوع الى جدول المسارات اعلاه نجد ان الزمن الذي يلي زمن المسار الحرج هو 13 شهرا وبالتالي لا يمكننا تخفيضه الا بوحدة زمنية فقط بدل وحدتين من أجل المحافظة على المسار الحرج القديم وظهور مسار حرج جديد. وتكون الشبكة الجديدة بعد التخفيض كالتالي:



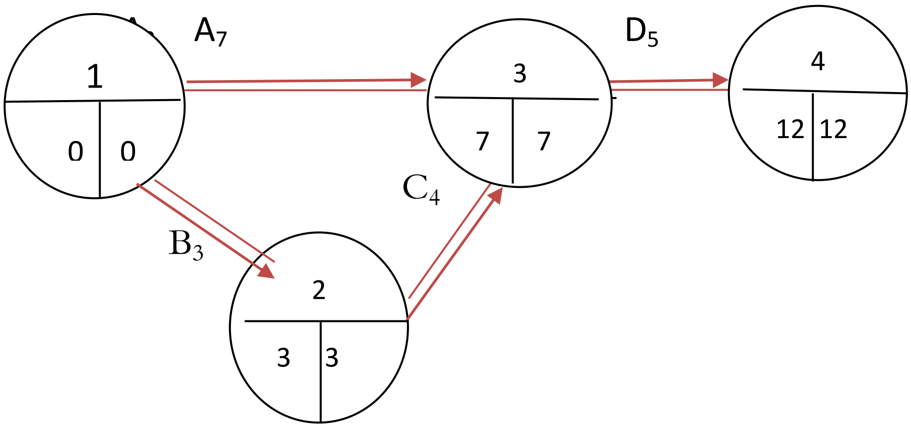

والنتيجة تصبح أن مدة المشروع تكون 13شهرا بدل 14شهرا، و تزداد التكلفة من 47و.ن الى 49و.ن أي:

$$C_3= 47 + 1\times2=49DA$$

✓ ندرس امكانات التعجيل الجديدة نتيجة لظهور مسار حرج جديد ، حيث بالنسبة لـ :

**المسار الأول(B.C.D)**:يتم تعجيل النشاط C ذي الأقل ميل تكلفة بوحدة واحدة لاستنفاذ العدد الأقصى لأشهر التعجيل.

✓ **المسار الثاني( A.D)** : يتم تعجيل النشاط A ذي الأقل ميل للتكلفة بوحدة زمنية واحدة فقط( بنفس وحدات تخفيض المسار الأول) من أجل تخفيض المسارين معا . وتكون الشبكة الجديدة بعد التخفيض كالتالي: كالتالي:




و النتيجة تصبح أن مدة المشروع تكون 12شهرا بدل 13شهرا، و تزداد التكلفة من 49و.ن الى 52و.ن أي:

$$C_4= 49 + 1\times2 + 1\times1=52DA$$

نلاحظ أن كل أنشطة المسار الحرج الأول لا يمكن تعجيلها اذ استنفذت كل الأشهر المتاحة من أجل التعجيل ، في حين يبقى للمسار الحرج الثاني النشاط A الذي لم يستنفذ زمن التعجيل ،ومع ذلك فان عملية تعجيل المشروع تتوقف عن المدة 12 شهرا لان الامر سيؤدي الى زيادة التكاليف دون ان يؤدي الى تخفيض مدة المشروع.

**قاعدة :**

**تتوقف عملية تعجيل المشروع اذا أصبح أحد المسارات الحرجة غير قابل للتخفيض.**

## IV . تمارين تطبيقية:

### 1.تمارين محلولة:

**التمرين الأول:** يظهر الجدول التالي مجموعة من الأنشطة التي يتكون منها مشروع تخرج طالب ليسانس ادارة الاعمال و كذا أوقات تنفيذها و الانشطة التي تسبق كل نشاط:

| المدة( اسبوع) | النشاط السابق | الرمز | النشاط |
|---|---|---|---|
| 4 | / | A | البحث عن المشرف |
| 6 | / | B | اقتراح موضوع البحث و تحرير المقدمة |
| 12 | / | C | مراجعة أدبيات الموضوع |
| 2 | A | D | البحث عن الوسائل المالية |
| 10 | A .B.C | E | تحرير الفصلين الأول و الثاني |
| 4 | E | F | تصحيح المشرف |
| 5 | A.C | G | استيلام مراجع خاصة من قبل المشرف |
| 10 | E.G | H | اعداد الفصل الثالث و الخاتمة |
| 2 | F.H | I | التصحيح الأخير |

**المطلوب**: . اذا كانت السنة الدراسة تنطلق في 1أكتوبر 2019 ، في أي تاريخ يمكن للطالب البدء في عملية طباعة عمله لتقديمه للإدارة.

. ما هي الأنشطة التي يجب على الطالب تسييرها بعناية حتى لا يتجاوز تاريخ انتهاء المشروع.

**التمرين الثاني**: لإنجاز مستودع قامت المؤسسة المكلفة بإنجازه الى تجزئة هذا المشروع الى 14 نشاط ، مدة تنفيذ كل نشاط و منطقية تتابع الأنشطة مبينة في الجدولين التاليين:

| المدة( أشهر) | الرمز | النشاط |
|---|---|---|
| 3 | A | الحصول على مخطط المشروع |
| 1 | B | تحضير الأرضية |
| 1 | C | طلب لوازم البناء |
| 5 | D | حفر الأساسات |
| 2 | E | طلب الأبواب و النوافذ |
| 3 | F | تسليم اللوازم |
| 4 | G | وضع الاساسات |
| 3 | H | وضع الجدران و الاسقف |
| 2 | I | تركيب الابواب و النوافذ |
| 5 | J | تبليط الارضية |
| 2 | K | تمديد الكهرباء |
| 5 | L | أعمال الدهن |
| 4 | M | أعمال السطح |

| النشاط | B .C | E.D | H.G.F | J.I | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| النشاط السابق | A | C | B | G.F | G.H | I | J.K.D.E |

**المطلوب**: . رسم الشبكة و تحديد مدة انجاز المشروع.

. اعداد جدولة لأنشطة المشروع.

. تحديد المسار الحرج و اظهاره في الشبكة.

**التمرين الثالث**: يحتوي أحد المشروعات على تسعة أنشطة، والجدول التالي يوضح ترتيبها وزمنها( بالأسبوع):

| المدة | الانطـــــلاق | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | H | G | F | E | D | C | B | A | | |
| 5 | | | | | | | | | | A | الوصـــول |
| 4 | | | | | | | | | X | B | |
| 7 | | | | | | | | | | C | |
| 3 | | | | | | | | | | D | |
| 5 | | | | | | X | X | X | | E | |
| 1 | | | | | | | X | X | | F | |
| 8 | | | | | | | | | X | G | |
| 8 | | | | | X | | | | | H | |
| 2 | | X | | X | | | | | | I | |

**المطلوب**: نفس أسئلة التمرين الثاني.

**التمرين الرابع**: يبين الجدول التالي الأنشطة الرئيسية المطلوبة لتصميم و تصنيع منتوج ، وذلك وفقا للمدة الموضحة في الجدول التالي:

| النشاط | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| النشاط السابق | / | / | A | B | .B | $A^*+4$ | C.D.E | B+5 | G.H |
| المدة(ايام) | 7 | 5 | 6 | 8 | 3 | 5 | 6 | 5 | 4 |

$A^*+4$: تعني أن النشاط يمكنه أن يبدأ بعد 4 أيام فقط من بدء النشاط A .

B+5 : تعني أن النشاط يمكنه أن يبدأ بعد 5 أيام فقط من نهاية النشاط B.

**المطلوب**: تحديد أدنى مدة لإنجاز المشروع و كذا اظهار المسار الحرج

**التمرين الخامس**: يتكون أحد المشاريع من الأنشطة التالية التي تظهر مدتها( بالأسابيع) و كذا العلاقات بين الأنشطة في الجدولين التاليين:

| الأنشطة | النشاط السابق |
|---|---|
| E . F. C | B |
| I | D |
| J | G. H |
| K | H. G. E. C |
| L | C |
| M | A |
| N | I . F |

| النشاط | الزمن المتفائل | الزمن المحتمل | الزمن المتشائم |
|---|---|---|---|
| A | 10 | 12 | 14 |
| B | 2 | 8 | 32 |
| C | 1 | 4 | 7 |
| D | 2 | 3 | 4 |
| E | 8 | 12 | 22 |
| F | 15 | 18 | 27 |
| G | 3 | 5 | 13 |
| H | 2 | 4 | 12 |
| I | 10 | 13 | 22 |
| J | 4 | 6 | 14 |
| K | 2 | 3 | 4 |
| L | 4 | 6 | 8 |
| M | 1 | 4 | 7 |
| N | 2 | 2 | 8 |

**المطلوب:**

-ايجاد الوقت المتوقع لإنهاء المشروع و كذا تباينه

-ايجاد نسبة احتمال انهاء المشروع في 30 أسبوعا و 33 أسبوعا.

-ايجاد الزمن المتوقع الذي يقابل نسبة احتمال انجاز المشروع 82.64 %

-ماذا يحدث للمشروع: أ/ لو يتأخر النشاط M ب5 أسابيع. ب/ لو يتأخر النشاط K ب 7 أسابيع.

**التمرين السادس:** يتكون مشروع من احدى عشر نشاط حسب الترتيب التالي:

C و D يلي A ، E و F يلي B ، G يلي E ، I و H تلي C و G

J تلي D و H ، K تلي F و I

و اتضح ان المدة اللازمة لكل نشاط معطاة في الجدول التالي:

| النشاط | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الزمن(اسبوع) | 1 | 2 | 4 | 6 | 3 | 4 | 1 | 3 | 1 | 2 | 6 |

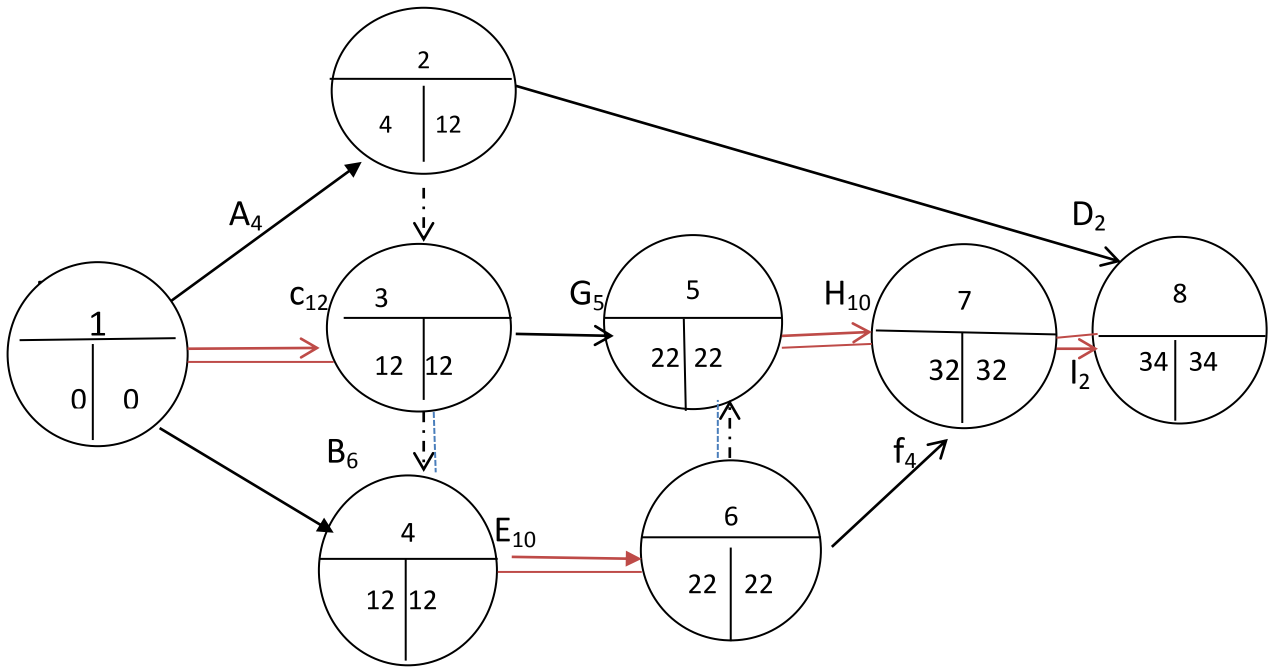
**المطلوب:** اذا كانت الانشطة التي تحتاج الى 6 اسابيع لتنفيذها يمكن تخفيضها بمقدار اسبوعين بتكلفة اضافية قدرها 20دج كل اسبوع مخفض ، و أن الانشطة التي تحتاج الى 3 او 4 اسابيع لتنفيذها يمكن تخفيض مدتها بمقدار اسبوع بتكلفة اضافية قدرها 30دج . فهل يمكن انهاء المشروع في 10 اسابيع .

اذا كان نعم ، فما هي تكلفته.

**الحلول:**

**حل التمرين الأول:**

✓ تحديد تاريخ بدء الطالب في الطباعة: يتطلب الأمر رسم الشبكة لتحديد مدة انجاز أنشطته:




اذا كانت مدة المشروع هي 34شهرا فان الطالب يمكنه البدء في طباعة عمله ابتداءا من 9جوان 2020

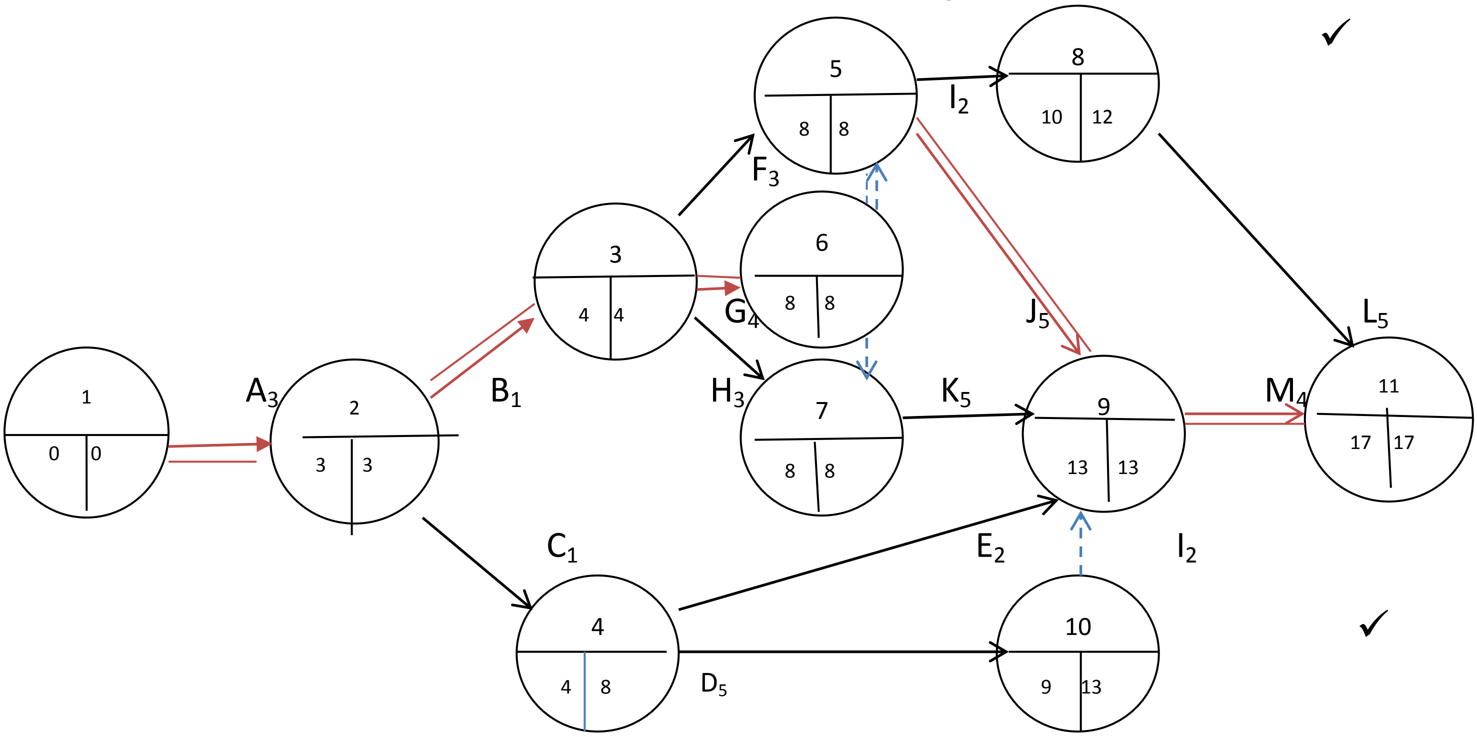
✓ تحديد الأنشطة التي تحتاج للعناية من أجل انهاء المشروع في وقته:

تمثل أنشطة المسار الحرج التي لا تقبل التأخير في التنفيذ من أجل انهاء المشروع في وقته ، وهي : C ; E , H, I

**حل التمرين الثاني:**

✓ رسم الشبكة و تحديد مدة المشروع:

✓




✓

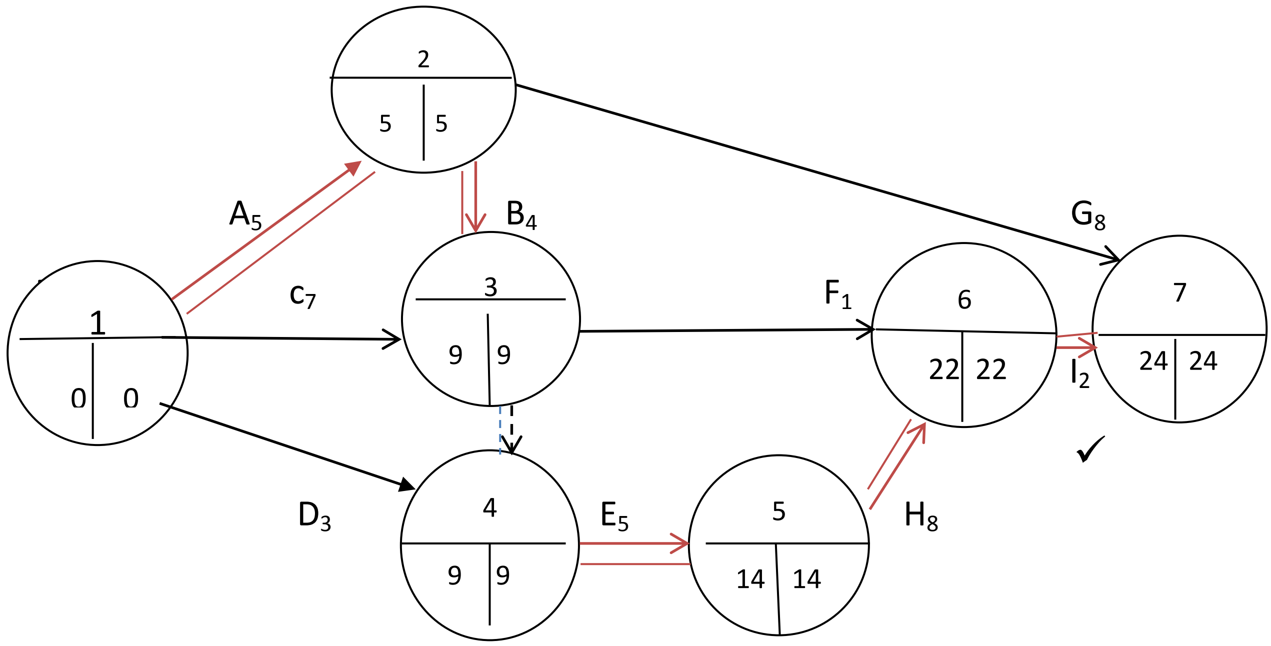
مدة المشروع شهرا 17.

✓ اعداد جدولة أزمنة المشروع:

| نشاط حرج | $T_t$ | $LF_i$ | LSi | $EF_i$ | $ES_i$ | $D_i$ | النشاط |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| حرج | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | A |
| حرج | 0 | 4 | 3 | 4 | 3 | 1 | B |
| / | 4 | 8 | 7 | 4 | 3 | 1 | C |
| / | 4 | 13 | 8 | 9 | 4 | 5 | D |
| / | 7 | 13 | 11 | 6 | 4 | 2 | E |
| / | 1 | 8 | 5 | 7 | 4 | 3 | F |
| حرج | 0 | 8 | 4 | 8 | 4 | 4 | G |
| / | 1 | 8 | 5 | 7 | 4 | 3 | H |
| / | 2 | 12 | 10 | 10 | 8 | 2 | I |
| حرج | 0 | 13 | 8 | 13 | 8 | 5 | J |
| / | 3 | 13 | 11 | 10 | 8 | 2 | K |
| / | 2 | 17 | 12 | 15 | 10 | 5 | L |
| حرج | 0 | 17 | 13 | 17 | 13 | 4 | M |

## حل التمرين الثالث:

✓ رسم الشبكة و تحديد مدة المشروع: أنشطته:




✓

مدة المشروع: أسبوع.24.

✓ اعداد جدولة أزمنة المشروع:

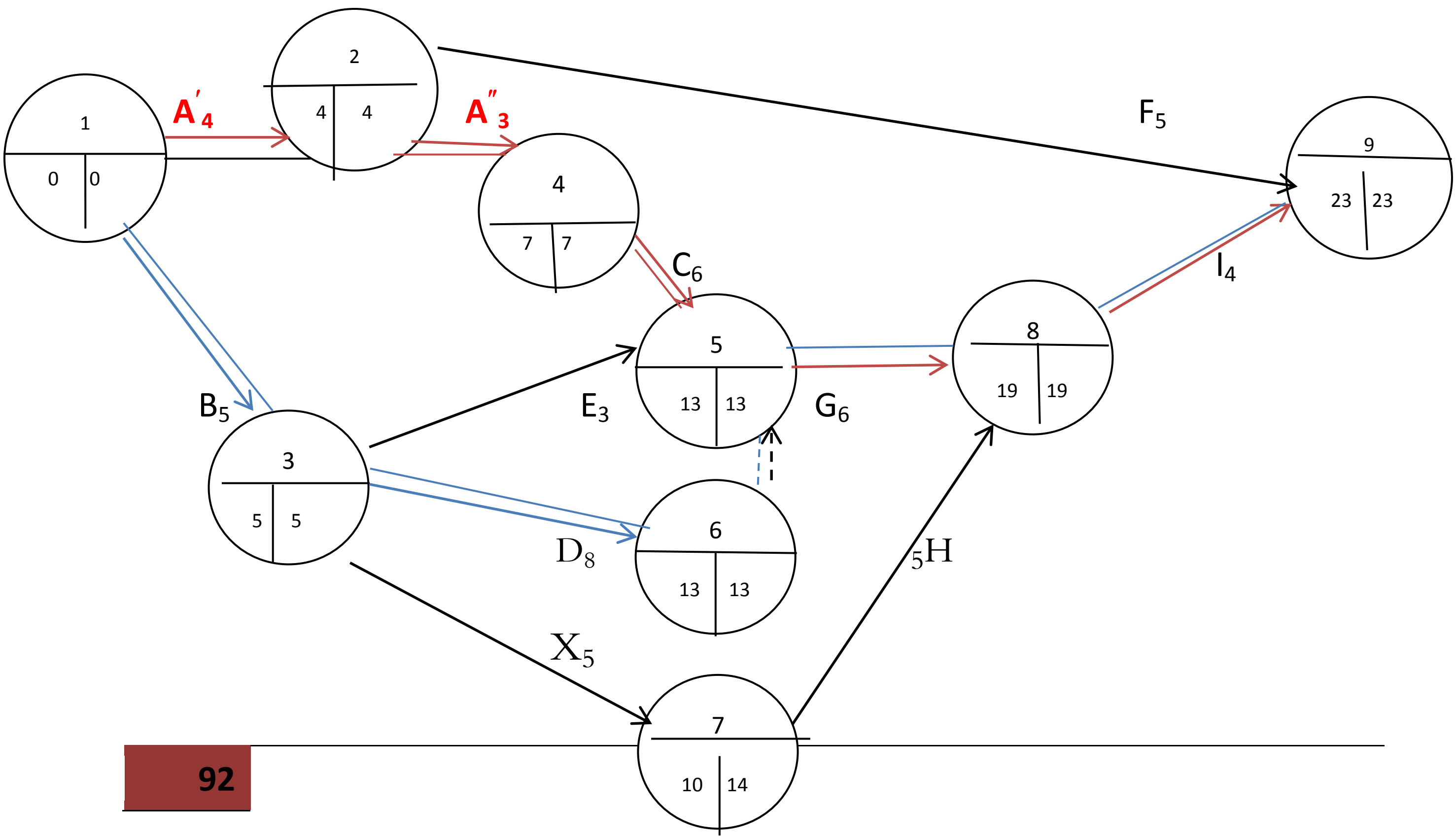
| نشاط حرج | $T_t$ | $LF_i$ | LSi | $EF_i$ | $ES_i$ | $D_i$ | النشاط |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| حرج | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | A |
| حرج | 0 | 9 | 5 | 9 | 5 | 4 | B |
| / | 2 | 9 | 2 | 7 | 0 | 7 | C |
| / | 6 | 9 | 6 | 3 | 0 | 3 | D |
| حرج | 0 | 14 | 9 | 14 | 9 | 5 | E |
| / | 12 | 22 | 21 | 10 | 9 | 1 | F |
| / | 11 | 24 | 16 | 13 | 5 | 8 | G |
| حرج | 0 | 22 | 14 | 22 | 14 | 8 | H |
| حرج | 0 | 24 | 22 | 24 | 22 | 2 | I |

المسار الحرج هو : A.B.E.H.I

## حل التمرين الرابع:

✓ رسم الشبكة و تحديد المسار الحرج:

- بالنسبة للنشاط A يتم تجزئته الى نشاطين : $A'_4$ ، $A''_3$.
- بالنسبة لـ B+5، يتم اضافة نشاط مدته 5 أيام أي : $X_5$



مدة المشروع 23 يوم ، وهناك مسارين حرجين:

- المسار الأول: A′ . A″. C. G.I
- المسار الثاني: B.D.G.I

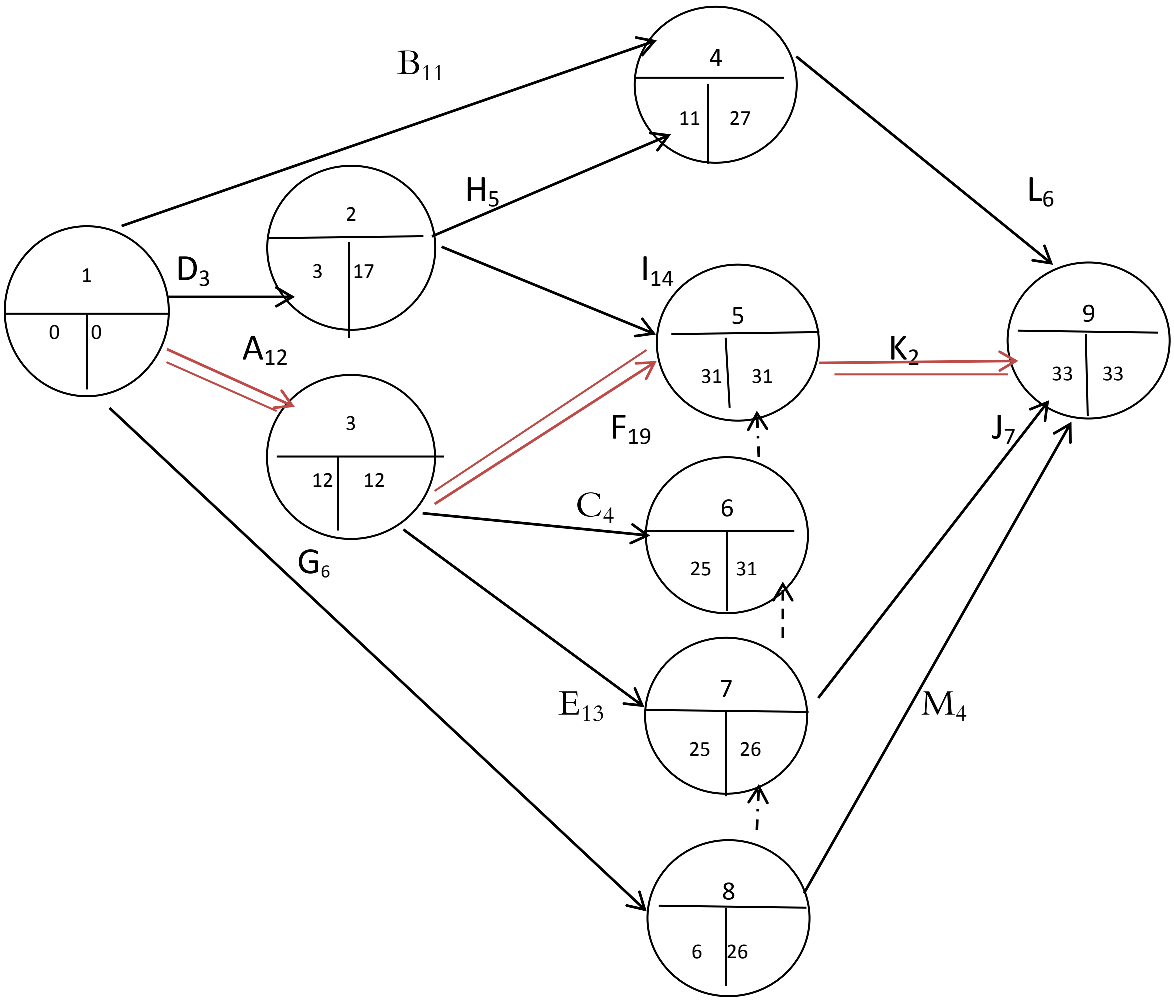
**حل التمرين الخامس:**

✓ ايجاد الزمن المتوقع للمشروع و تباينه:

نحسب أولا الزمن المتوقع لكل الأنشطة:

| النشاط | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Te | 12 | 11 | 4 | 3 | 13 | 19 | 6 | 5 | 14 | 7 | 2 | 6 | 4 |

نرسم الشبكة مع تثبيت قيمة الزمن المتوقع لكل نشاط:




مدة المشروع 33 أسبوع و تباينه هو تباين المسار الحرج أي:

$\partial^2 = \partial^2_A + \partial_F^2 + \partial^2_K = 0.43 + 4 + 0.1 = 4.53$

✓ ايجاد نسبة احتمال انهاء المشروع في 30 أسبوعا و 33 أسبوعا:

عند 33أسبوعا :

$$Z = \frac{D - Te}{\sigma_{te}} \quad = 33-33/\sqrt{4.53} \quad =0$$

بالرجوع الى جدول التوزيع الطبيعي نجد أن قيمة الاحتمال المقابلة لـ Z هي 0. ، و أن احتمال انهاء المشروع في *33*أسبوع هو 0 + 0.5= 0.50 أي بنسبة50 % .

عند 30أسبوعا:

$$Z = \frac{D - Te}{\sigma_{te}} \quad =30-33/\sqrt{4.53}=-1.41$$

بالرجوع الى جدول التوزيع الطبيعي نجد أن قيمة الاحتمال المقابلة لـ Z هي 0.4207، و أن احتمال انهاء المشروع في 30اسبوع هو 0.5 -0.4207 = 0.0793أي بنسبة7.93 % .

✓ ايجاد الزمن المتوقع الذي يقابل نسبة احتمال انجاز المشروع82.64 %:

$$Z = \frac{D - Te}{\sigma_{te}} \quad = D-33 \quad /\sqrt{4.53} \quad =0.94$$

$$D = 35$$

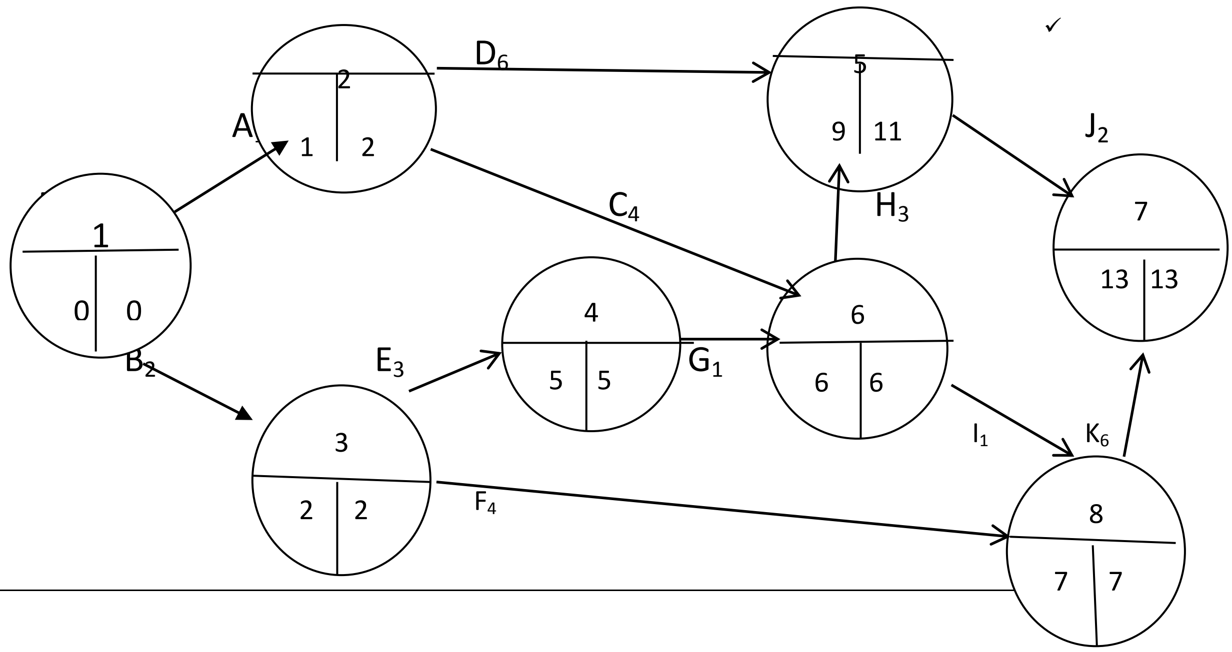
✓ لو يتأخر النشاط M بـ5 أسابيع لن يتأخر مدة انجاز المشروع لأن $Tt_M = 23$ .

✓ لو يتأخر النشاط E بـ3 أسابيع تتأثر مدة انجاز المشروع لأن $Tt_E = 1$ .

**حل التمرين السادس:**

✓ نقوم برسم الشبكة مع حساب التكلفة الاجمالية للمشروع:

✓



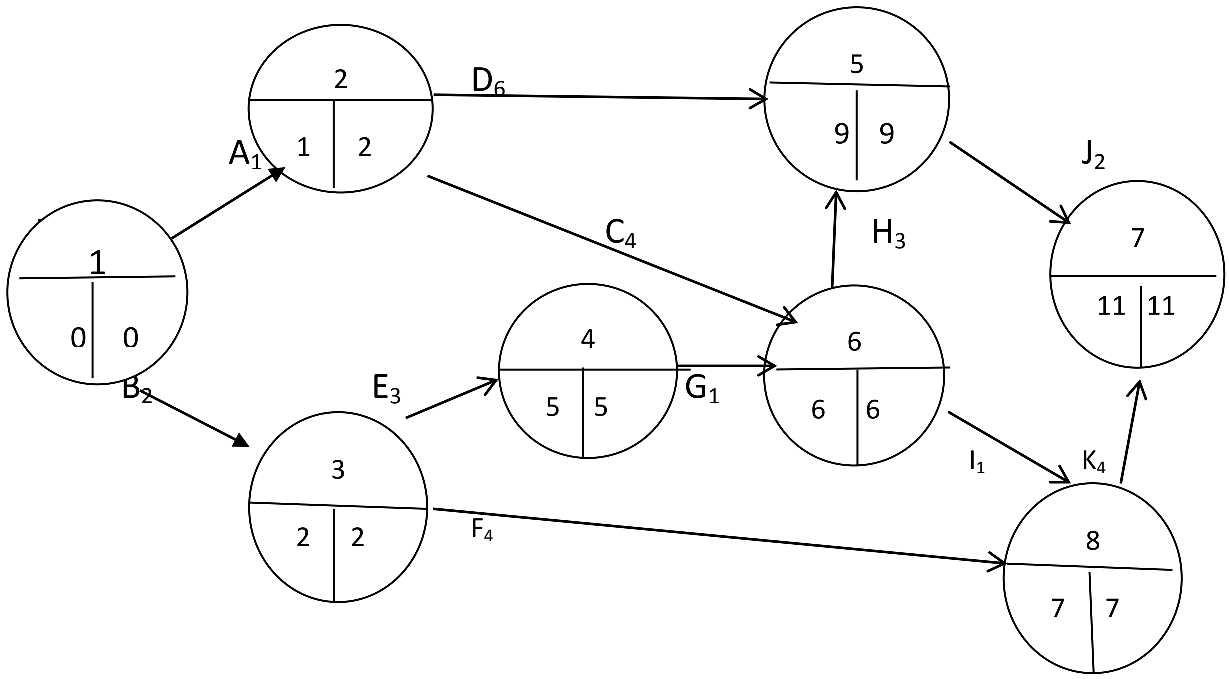
✓ نحدد المسارات في الشبكة و منها المسار الحرج وزمنها العادي:

| المسارات | الزمن العادي | المسار الحرج |
|---|---|---|
| A.D.J | 9 | |
| A.C.H.J | 10 | |
| A.C.I.K | 12 | |
| B.E.G.H.J | 10 | |
| B.E.G.I.K | 13 | حرج |
| B.F.K | 12 | |

✓ نقوم بحساب ميل التكلفة لكل نشاط و الذي يظهر في الجدول التالي:

| النشاط | التغير في الزمن | ميل التكلفة |
|---|---|---|
| B | / | / |
| E | 1 | 30 |
| G | / | / |
| I | / | / |
| K | 2 | 20 |

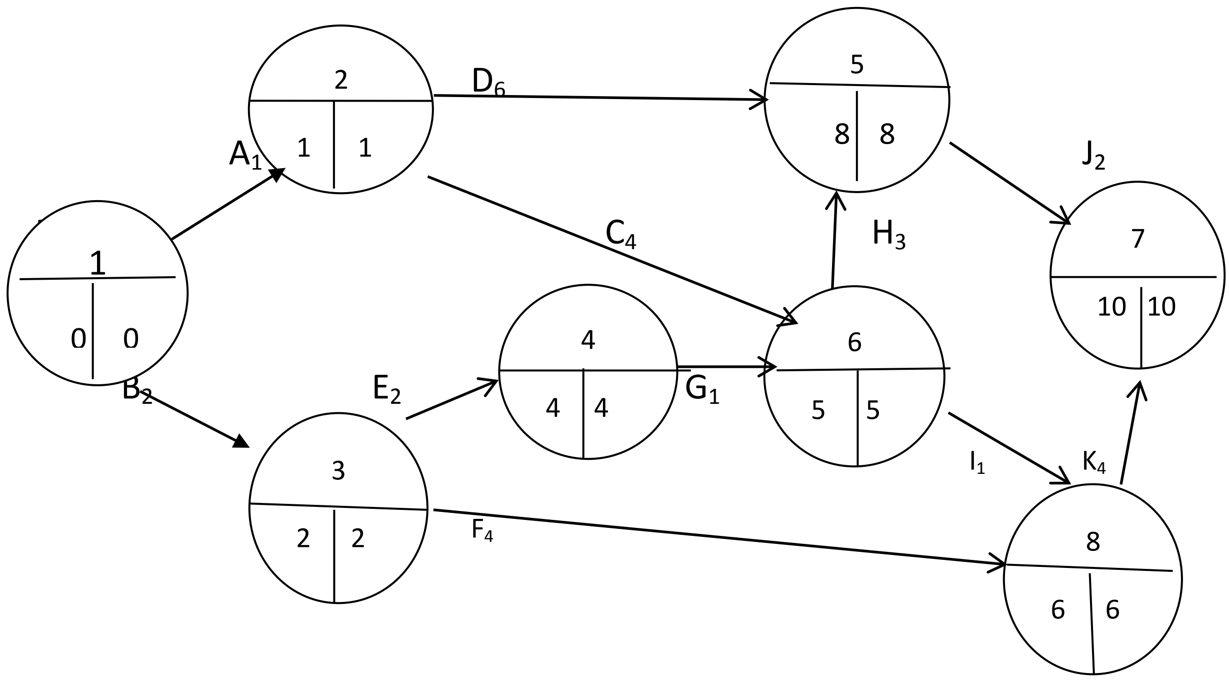
✓ نقوم بتعجيل النشاط الحرج ذي الأقل ميل تكلفة ، وفي هذه الحالة النشاط **K**هو الأقل ميلا بحيث يتم تخفيضه بوحدتين زمنيتين واحدة ليصبح زمنه 4اسابيع. وتكون الشبكة الجديدة بعد التخفيض كالتالي:



والنتيجة تصبح أن مدة المشروع تكون 11 أسبوع بدل 15أسبوعا، وتكون التكلفة الاضافية مساوية لـ:

$$C_1 = 20 \times 2 = 40DA$$

- ✓ نواصل عملية التعجيل بالنشاط الحرج ذي الأقل ميل بعد أن أصبح النشاط Kغير قابل للتعجيل، وهو النشاط E الذي نخفضه بمقدار التغير في الزمن، أي بوحدة زمنية واحدة وتكون الشبكة الجديدة بعد التخفيض كالتالي:




والنتيجة تصبح أن مدة المشروع تكون 10 أسبوع بدل 11أسبوعا، وتكون التكلفة الاضافية مساوية لـ:

$$C_1 = 40 + 30 \times 1 + = 70DA$$

و بالتالي، فانه يمكن انجاز المشروع في 10اسلبيع بدل 13 أسبوع بتكلفة اضافية قدرها 70وحدة نقدية.

## 2. تمارين مقترحة

**التمرين الأول:** مشروع يتكون من سبعة أنشطة يمكن ترتيبها وفق القائمتين التاليتين:

قائمة الأنشطة –1–

| النشاط | المدة(الأسبوع) | النشاط السابق |
|---|---|---|
| A | 7 | / |
| B | 3 | A |
| C | 9 | A |

قائمة الأنشطة – 2–

| النشاط | المدة(الأسبوع) | النشاط السابق |
|---|---|---|
| A | 7 | / |
| B | 3 | / |
| C | 9 | / |

| | | |
|---|---|---|
| A | 5 | D |
| C | 6 | E |
| D | 5 | F |
| Á | 2 | G |

| | | |
|---|---|---|
| A | 5 | D |
| B | 6 | E |
| C | 5 | F |
| F | 2 | G |

**المطلوب:** -رسم شبكة الأعمال و تحديد المدة اللازمة للمشروع لكل قائمة

- ما هي أفضل قائمة. وماذا تستنتج؟
- اعداد جدولة لأزمنة أنشطة المشروع لأفضل قائمة.

**التمرين الثاني:** يتكون مشروع من النشاطات التالية:

| للقيام ب | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| يجب القيام ب | / | E | E | A | A | D.E | B | G | J ,C ,H ,F | A | J |
| الوقت المتفائل | 5 | 10 | 2 | 1 | 4 | 4 | 2 | 0 | 2 | 1 | 4 |
| الوقت المتشائم | 11 | 10 | 8 | 13 | 10 | 10 | 2 | 6 | 14 | 7 | 10 |
| الوقت المحتمل | 11 | 10 | 5 | 7 | 4 | 7 | 2 | 6 | 8 | 4 | 6 |

**المطلوب:** . رسم شبكة PERT

. تحديد الزمن المتوقع لإنجاز المشروع و تباينه.

**التمرين الثالث:** توفرت البيانات التالية عن احدى المشاريع العلمية : ( الزمن بالأشهر):

| ألنشاط | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المتفائل | 3 | 1 | 4 | 8 | 7 | 5 | 3.5 | 6 | 1 | 1 | 1.5 | 7 |
| المحتمل | 5 | 1.5 | 5 | 10 | 10 | 9.5 | 5 | 8 | 1 | 2 | 3 | 9 |
| المتشائم | 7 | 5 | 12 | 24 | 13 | 11 | 6.5 | 16 | 1 | 3 | 4.5 | 11 |

كما توفرت العلاقات التالية:

| النشاط | C | D ,E,F | G | H | I,j | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| النشاط السابق | A | C | E,F | D,E,F | H | B,I,J | G |

**المطلوب:** ايجاد الوقت المتوقع لإنهاء المشروع و كذا تباينه.

. ايجاد سبة احتمال انهاء المشروع في 37و 34شهر.

**التمرين الرابع:** اليك المعلومات الخاصة بمشروع بناء مدرسة :

| النشاط | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| النشاط السابق | / | A | / | / | B .C | B.C | E | D.G | H.F |
| الزمن(اسبوع) | 4 | 6 | 4 | 12 | 10 | 24 | 7 | 13 | 3 |

**المطلوب**: . ايجاد الوقت اللازم لإنجاز المشروع

. ايجاد البدائل الثلاثة لعملية المقايضة بين الزمن و التكلفة ، اذا علمت أن :

| النشاط | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكلفة | 20 | 18 | 22 | 13 | 50 | 14 | 7 | 11 | 21 |
| الزمن الجديد | 2 | 3 | 3 | 8 | 9 | 18 | 7 | 11 | 3 |
| التكلفة الجديدة | 42 | 36 | 32 | 29 | 54 | 56 | 7 | 33 | 21 |

**التمرين الخامس**: يتكون مشروع من الانشطة التالية :

| النشاط | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| النشاط السابق | / | / | / | A ,B,C | A ,B,C | A ,B,C | E | D | G,H |
| المدة(اسبوع) | 2 | 3 | 5 | 4 | 3 | 10 | 4 | 3 | 3 |

اذا علمت أن النشاطات التي تحتاج الى خمسة أسابيع لتنفيذها يمكن تخفيضها بمقدار اسبوع بتكلفة قدرها 10دج ، وأن النشاطات التي تحتاج الى عشرة أسابيع يمكن تخفيضها بأسبوعين بتكلفة اجمالية قدرها 24دج، و أن النشاطات التي تحتاج الى ثلاثة اسابيع يمكن تخفيضها بأسبوعين بتكلفة اجمالية قدرها 40دج.

**المطلوب**: ايجاد أدنى زمن لا نجاز المشروع و كذا التكلفة المقابلة له

**التمرين السادس**: يبين الجدول التالي الأنشطة الرئيسية المطلوبة لتصميم و تصنيع منتوج ، وذلك وفقا للمدة الموضحة في الجدول التالي:

| النشاط | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| النشاط السابق | G.M | H.I | $B^*$+2 | / | .H | B.L | / | G.M | D | A.K | / | C.E | D |
| المدة(ايام) | 7 | 7 | 2 | 3 | 5 | 1 | 5 | 4 | 8 | 12 | 7 | 7 | 6 |

$B^*$+2: تعني أن النشاط يمكنه أن يبدأ بعد يومين فقط من بدء النشاط B.

**المطلوب**: تحديد أدنى مدة لإنجاز المشروع و كذا اظهار المسار الحرج

# الفصل الرابع : تحليل الانحدار الخطي البسيط و المتعدد

## أهداف الفصل:

ينتظر من الطالب بعد قراءة هذا الفصل أن يصبح قادرا على:

- تشكيل معادلتي الانحدار الخطي البسيط و المتعددة.
- التفسير الاقتصادي لمعالم نموذج الانحدار الخطي.
- اختبار معنوية معالم معادلة الانحدار الخطي بنوعيها البسيط و المتعدد.
- اختبار المعنوية الكلية لمعادلة الانحدار الخطي بنوعيها البسيط و المتعدد.

## محتوى الفصل:

I. الانحدار الخطي البسيط.

1. كتابة و فرضيات النموذج
2. . تقدير معالم النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى.
3. تقييم نموذج الانحدار المقدر.

II. الانحدار الخطي المتعدد

1. كتابة و فرضيات النموذج.
2. تقدير معالم النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى.
3. تقييم نموذج الانحدار المقدر.

III. تمارين تطبيقية.

1. تمارين محلولة.
2. تمارين مقترحة.

**تمهيد:**

يعد الانحدار الخطي من أهم الأساليب الاحصائية استعمالا في قياس العلاقة الاقتصادية ، اذ يقوم ببناء نموذج احصائي لتقدير العلاقة بين متغير كمي واحد هو المتغير التابع ، و متغير كمي آخر أو عدة متغيرات كمية وهي المتغيرات المستقلة بحيث تنتج معادلة احصائية توضح العلاقة بين المتغيرات. فعندما تكون العلاقة في النموذج الاحصائي بين متغير تابع واحد و متغير مستقل واحد فان هذا النموذج هو أبسط نماذج الانحدار و يسمى بالنموذج الخطي البسيط، و عندما تكون عدد المتغيرات المستقلة أكثر من متغير كمي واحد فان النموذج يسمى بنموذج الانحدار المتعدد.

## I. الانحدار الخطي البسيط:

### 1. كتابة و فرضيات النموذج:

#### أولا. كتابة النموذج:

يتشكل النموذج الخطي البسيط من معادلة خطية من الدرجة الأولى تعكس المتغير التابع y كدالة في المتغير المستقل، وذلك على النحو التالي:

$$Y = f(x)$$

كما يبدأ الانحدار البسيط عادة برسم مجموعة أزواج قيم XY في شكل انتشار ثم التحديد بالنظر ما اذا كانت هناك علاقة خطية تقريبية ، حيث تصاغ العلاقة الخطية كالتالي:[1]

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i \quad , \quad i=1 \ldots\ldots\ldots. n$$

حيث $B_0$ و $B_1$: هي ثوابت غير معلومة تسمى بالمعالم ، فالمعلمة $B_0$ تمثل تقاطع خط الانحدار مع المحور العمودي وهي عبارة عن القيمة التي تتخذها y عندما تكون قيمة x مساوية للصفر. أما المعلمة $B_1$ فتمثل الميل الحدي الذي يقيس مقدار تغير y اذا تغير x بوحدة واحدة.

i: هو مؤشر للدلالة على رقم المشاهدة ($i=1 \ldots\ldots\ldots. n$) حيث n هو طول العينة المختارة من المجتمع الذي نرغب في دراسته.

غير أن المعادلة أعلاه لا يمكن أن تشرح العلاقة بين المتغيرين بشكل دقيق ، فهناك أسباب مهمة تجعلها غير معبرة تعبيرا كاملا ، فقد يكون هناك انحراف بين العلاقة الحقيقية و المعادلة الاحصائية التي تمثلها نتيجة أخطاء في القياسات أو في اختيار المتغير المستقل ، مما يتطلب الأمر اضافة متغير جديد يسمى بالحد العشوائي الذي يرمز له بالرمز $\varepsilon_i$ ، لتتحول بذلك العلاقة الرياضية المؤكدة الى علاقة احتمالية أو عشوائية على النحو التالي:[2]

---

[1] حسين علي بخيت، سحر فتح الله ، ***الاقتصاد القياسي***، دار اليازوري، الأردن، 2006، ص 40

[2] محمد شيخي، ***طرق الاقتصاد القياسي، محاضرات و تطبيقات***، ط1، دار حامد، الأردن، 2011، ص 19

$$Y_i = B_0 + B_1X_i + \varepsilon_i \quad , \quad i=1..........n$$

وبشكل عام ، فان نموذج الانحدار الخطي البسيط يعني ايجاد صيغة أو معادلة رياضية تعبر عن العلاقة بين متغيرين ، بحيث تستعمل هذه العلاقة من أجل التوقع ( بعد تقديرها و تقييمها) بالقيم اللاحقة أو المستقبلية للمتغير التابع حسب المعلوم من المتغير المستقل.

**مثال:** نموذج خطي بسيط ممثل لدالة الاستهلاك العائلي : اذا اخترنا عينة مكونة من 12عائلة فانه من أجل كل عائلة i يمكن كتابة دالة الاستهلاك العائلي على الشكل التالي:

$$C_i = B_0 + B_1R_i + \varepsilon_i \quad , \; i= 1,2..........12$$

مع $C_i$ يرمز لاستهلاك العائلة i وهو المتغير التابع ، $R_i$ يرمز لدخل العائلة i وهو المتغير المستقل.

وتعني هذه الدالة أن الاستهلاك العائلي هو متغير تابع للدخل بحيث يتحدد داخل النموذج ( اي كلما تغير الدخل تغير استهلاك العائلة ) ، أما الدخل فهو متغير مستقل يتحدد خارج النموذج ( أي أنه غير تابع للاستهلاك بل مستقل عنه ).

## ثانيا. فرضيات النموذج:

يمكن تلخيص فرضيات نموذج الانحدار الخطي البسيط فيما يلي:[1]

- **الفرضية الأولى: التوقع الرياضي للأخطاء معدوم**

وتعني هذه الفرضية أن الأخطاء لا تدخل في تفسير y ،اذ أنها تعبر عن حدود عشوائية تأخذ قيما سالبة ، موجبة أو معدومة لا يمكن قياسها أو تحديدها بدقة ، وتخضع لقوانين الاحتمال بحيث يكون وسطها أو توقعها الرياضي مساويا للصفر. أي $\mathbf{E(\varepsilon_i)=0}$

- **الفرضية الثانية: تجانس( ثبات) تباين الأخطاء**

تتعلق بتباين حد الخطأ بحيث تكون قيمة $\mathbf{var(\varepsilon_i)= E(\varepsilon^2_i)= \sigma^2}$ ، أي أن قيمة التباين ثابتة عند القيم $x_i$ ، ما يعني أن البيانات التي جمعت لتقدير العلاقة يمكن الاعتماد عليها بنفس الدرجة ، فكل مشاهدة تؤثر بنفس القوة في العلاقة التي يطلب تقديرها.

- **الفرضية الثالثة: عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء**

تفترض أن القيم المختلفة لحد الخطأ $\varepsilon_i$ تكون مستقلة عن بعضها البعض ، أي بعبارة أخرى أن التباينات المشتركة لأخطاء الملاحظات المختلفة تكون معدومة ، وهذا على مختلف مشاهدات مكونات العينة . ويعبر عنها رياضيا بـ :

$$\mathbf{cov(\varepsilon_i , \varepsilon_j)= E(\varepsilon_i , \varepsilon_j) = 0 \quad , \forall i\neq j \quad , i,j=1......n}$$

- **الفرضية الرابعة: تتعلق بقيم المتغير المستقل $x_i$**

[1] محمد شيخي، مرجع سابق، ص20

تفترض أن البيانات المتعلقة بهذا المتغير قادرة على اظهار تأثيرها في تغير قيم المتغير التابع ، حيث تكون قيمة واحدة على الأقل من قيم المتغير المستقل مختلفة عن بقية القيم .

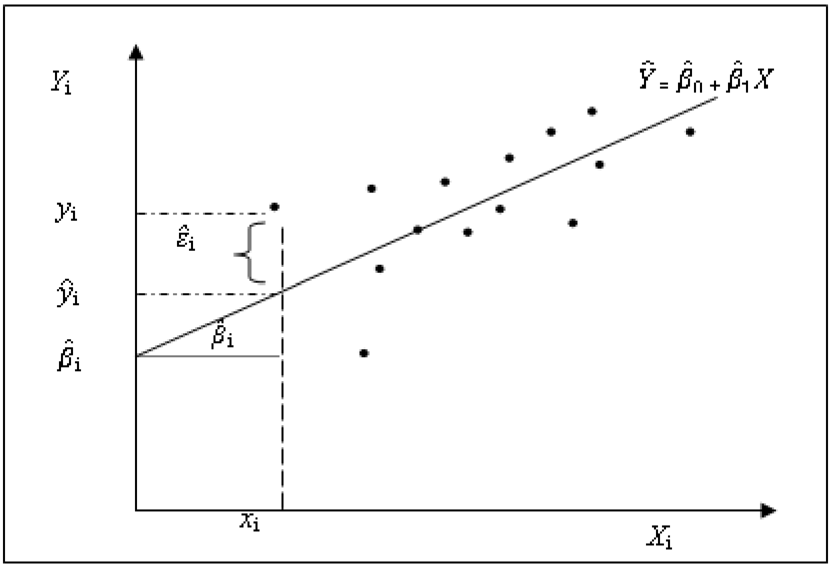
## 2. تقدير معالم النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

يقصد بتقدير النموذج ايجاد مقدرات لمعالم النموذج $B_0$ و $B_1$ بدلالة المتغيرات $X$و $Y$ ، و تسمى بمقدرات المعالم أو مقدرات النموذج حيث يرمز لها بالرمز $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ على الترتيب، وهي أحسن القيم الممكنة للتعبير عن النموذج في صيغته الخطية. لذا، يتطلب الأمر استخدام طريقة المربعات الصغرى التي تهدف الى ايجاد أفضل خط مستقيم لعينة مشاهدات $x$و $y$ من بين خطوط لانهائية العدد تصف المعادلة الخطية، بحيث يتم ذلك بجعل مجموع انحرافات القيم الحقيقية $y_i$ عن القيم التقديرية $\hat{Y}i$ أقل ما يمكن، أي جعل مجموع مربعات الأخطاء العشوائية عند نهايتها الصغرى:[1]

$$\text{Min} \longrightarrow \sum_{i=1}^{rn} \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{rn} (y_i - \hat{Y}i)^2$$

حيث: $y_i$ تمثل قيم المتغير التابع الفعلي و $\hat{Y}i$ قيم المتغير التابع المقدرة .

ويمكن توضيح ذلك في الشكل التالي:




وهذا ما يمكن كتابته رياضيا ب

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{rn} \varepsilon^2_i = \sum_{i=1}^{rn} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$$

[1] دومينيك سلفاتور، *نظريات ومسائل في الإحصاء والاقتصاد القياسي*، ط2،ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1993، ص ص 146، 147

وكشرط رياضي لتصغير مجموع مربعات الأخطاء يجب أن تكون المشتقات الجزئية بالنسبة لكل من $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ معدومة ، أي :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Sigma \varepsilon_i^2}{\partial \hat{B}_0} = 0 \\ \dfrac{\partial \Sigma \varepsilon_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 0 \end{cases}$$

وبحل جملة المعادلتين السابقتين نتحصل على تقدير معلمتي النموذج كما يلي:[1]

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \dfrac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ \hat{B}_0 = \bar{y} - \hat{B}_1 \bar{x} \end{cases}$$

ويكون النموذج المقدر ( خط الانحدار) بطريقة المربعات الصغرى كما يلي:

$$\hat{y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 x_i$$

**مثال:** ترغب إحدى الشركات في تحديد العلاقة بين إنفاقها على الدعاية ( X ) وعوائد المبيعات ( Y ) ، كلاهما بالمليون دولار ، وذلك باستخدام البيانات المبينة في الجدول التالي:

| السنة($i$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| اعلانات($x_i$) | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 |
| مبيعات($y_i$) | 25.6 | 32.7 | 45.4 | 53.9 | 59 | 62.6 | 65 | 65.5 |

المطلوب: – ايجاد معادلة انحدار عوائد المبيعات و نفقات الدعاية. وماذا تعني مقدرات النموذج اقتصاديا.

**الحل:**

✓ ايجاد مقدرات النموذج:

| I | $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 25.6 | 102.4 | 16 |
| 2 | 8 | 32.7 | 261.6 | 64 |
| 3 | 12 | 45.4 | 544.8 | 144 |
| 4 | 16 | 53.9 | 862.4 | 256 |

[1] هاري كلجيان، والاس أوس، ترجمة المرسي حجازي و عبد القادر عطية، ***مقدمة في الاقتصاد القياسي المبادئ و التطبيقات***، ط1، النشر العلمي و المطابع، جامعة الملك سعود، السعودية، 2001، ص 85.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 20 | 59 | 1180 | 400 |
| 6 | 24 | 62.6 | 1502.4 | 576 |
| 7 | 28 | 65 | 1820 | 784 |
| 8 | 32 | 65.5 | 2105.6 | 1024 |
| $n = 8$ | $\Sigma X_i = 144$<br>$\overline{X} = 18$ | $\Sigma Y_i = 410$<br>$\overline{Y} = 51.25$ | $\Sigma X_i y_i = 8379.2$ | $\Sigma x^2 = 3264$ |

وبتطبيق القانون نجد:

$$\hat{\beta}_1 = 8(8379.2) - (144)(410) / \ 8(3264) - (144)^2$$

$$\hat{\beta}_1 = 1.486904762$$

$$\hat{\beta}_0 = 51.25 - (4.73)(7) = 21.8771428$$

✓ كتابة معادلة الانحدار:

ومن ثم، تكون معادلة خط الانحدار هي:

$$\hat{Y}i = 24.485 + 1.486 Xi$$

تعني قيمة $\hat{\beta}_0$ أنه عند عدم قيام الشركة بإنفاق أية مبالغ على الدعاية ( أي $X_i = 0$ ) ، فإن عوائد المبيعات للشركة ( $Y_i$ ) هي 24.485 مليون دولار. أما قيمة $\hat{\beta}_1$ فتمثل الميل الحدي للمبيعات بحيث اذا ارتفعت الدعاية بوحدة واحدة فان هذا سيؤدي الى ارتفاع المبيعات بـ 1.486.

**ملاحظة:**

**يمكن حساب $\hat{\beta}_1$ انطلاقا من العلاقة التالية:**

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i - n \ \overline{X}.\overline{Y}}{\sum x_i^2 \ - n \, \overline{X}^2}$$

## 3. تقييم نموذج الانحدار المقدر:

بعدما قمنا بتقدير معالم النموذج بواسطة صيغ اشتقاق بطريقة المربعات الصغرى ، نأتي الى تقييم هذه النتائج من الناحية الاحصائية من خلال اختبار معنوية معالم الانحدار ، اختبار المعنوية الكلية للنموذج و القوة التفسيرية للنموذج.

## أولا. اختبار معنوية معالم الانحدار ( اختبار التوزيع t ):

بما أن $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ هي تقديرات لمعاملات المجتمع الاحصائي $B_1$ و $B_0$ كان لابد من اختبار المعنوية الاحصائية لهذه المعلمات من أجل معرفة فيما اذا كانت التقديرات التي تم الحصول عليها من العينة للمعلمات تختلف عن القيم الحقيقية بالمجتمع اختلافا معنويا أو لا تختلف.

ولاختبار معنوية $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ نستخدم الفرض الصفري $H_0$ و الفرض البديل $H_1$ التاليين كما يلي:

- ✓ **الفرض الصفري**: تنص على عدم وجود علاقة بين المتغيرين X و Y أي أن: [1]

$$H_0: B_0 = 0$$
$$B_1 = 0$$

- ✓ **الفرض البديل**: تنص على وجود علاقة بين المتغيرين X و Y أي أن :

$$H_1: B_0 \neq 0$$
$$B_1 \neq 0$$

و المرجو من تحليل الانحدار أن نقبل الفرض البديل و نرفض الفرض الصفري، لأن كل من $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ لا تساوي الصفر. ولتحقيق ذلك يتم استخدام اختبار ستودنت ( t) عند مستوى معنوية معينة و درجة حرية $(n-k)$ حيث:

n: عدد المشاهدات.

K: عدد المعالم المقدرة ، وعددها (2) في تحليل الانحدار البسيط.

- **شكل الاختبار:**

**بالنسبة لـ** $\hat{\beta}_1$ :

تكون الصيغة الرياضية لهذا الاختبار كالتالي:[2]

$$t_c = \frac{\hat{B}_1}{\hat{\sigma}_{B1}}$$

حيث: $t_c$ : هي قيمة t المحسوبة عند مستوى معنوية معين و درجة حرية $(n-k)$ .

$\hat{\beta}_1$ : القيمة التقديرية لـ $B_1$ الحقيقية.

$\hat{\sigma}_{B1}$ : الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة $\hat{\beta}_1$ ، مع العلم أنه يعطى بالصيغة التالية: التالي:

$$\hat{\sigma}_{B1} = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{\Sigma(x_i - \overline{x})^2(n-2)}}$$

**بالنسبة لـ** $\hat{\beta}_0$

---

[1] هاري كلجيان، والاس أوس، مرجع سابق، ص 149

[2] Régis Bourbonnais, ***Econométrie, cours et exercices corrigés*** , 9édition , Dunod, Paris, 2015 ,p26

تكون الصيغة الرياضية لهذا الاختبار كالتالي:[1]

$$t_c = \frac{\hat{B}_0}{\hat{\sigma}_{B0}}$$

مع العلم أن:

$$\hat{\sigma}_{B0} = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{n-k}\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X^2}}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}\right]}$$

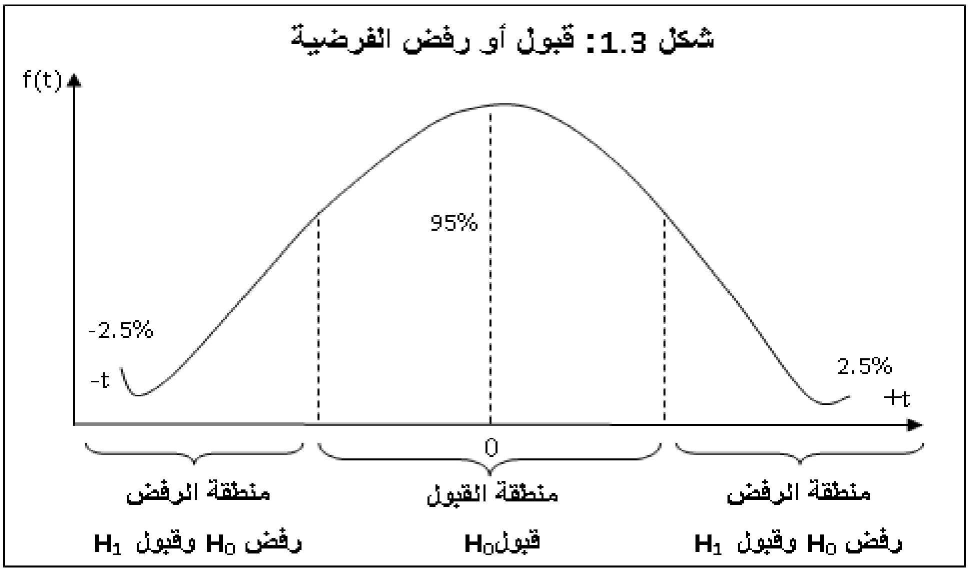
- **قرار الاختبار:**

بعد حساب قيمة (t) يتم مقارنتها مع القيمة الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند درجات حرية (n-2) و مستوى معنوية (1% أو 5%) لتحديد قبول أو رفض الفرض الصفري ، فاذا كانت:

✓ قيمة t المحتسبة أكبر من القيمة الجدولية أي $(t_c \geq t_t)$ يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل، وهذا يعني أن المعلمة ذات معنوية احصائية.

✓ قيمة t المحتسبة أصغر من القيمة الجدولية أي $(t_c \leq t_t)$ يتم رفض الفرض البديل وقبول الفرض الصفري. وهذا يعني عدم معنوية المعلمة المقدرة.

ويمكن توضيح ذلك بالشكل التالي:




المصدر: حسن علي بخبت، مرجع سابق، ص84

**مثال:** اعتمادا على بيانات المثال السابق اختبر عند معنوية 5% المقدرتين $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$

[1] Iid

**الحل:**

بالاعتماد على الصيغة الرياضية للاختبار فإننا نحتاج الاحصاءات التالية:

| $(x_i - \overline{x})^2$ | $\varepsilon_i^2$ | $\varepsilon_i$ | $\hat{Y}i$ |
|---|---|---|---|
| 196 | 23.3192 | -4.829 | **30 .429** |
| 100 | 13.4909 | -3.673 | **36 .373** |
| 36 | 9.5048 | 3 .083 | **42.317** |
| 4 | 31.7983 | 5.639 | **48.261** |
| 4 | 22.9920 | 4.795 | **54.205** |
| 36 | 6 .0074 | 2.451 | **60.149** |
| 100 | 1.1946 | -1.093 | **66.093** |
| 196 | 42.7323 | -6.537 | **72.037** |
| $\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = 672$ | $\Sigma\varepsilon_i^2 = 151.0395$ | $\Sigma\varepsilon_i=0$ | $\Sigma\hat{Y}i$ = **409.864** |

✓ **بالنسبة ل** $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\sigma}_{B1} = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{\Sigma(x_i-\overline{x})^2\,(n-2)}} = \sqrt{\frac{151.0395}{672(6)}} = 0.193$$

و

$$t_c = \frac{\hat{B}_1}{\hat{\sigma}_{B1}} = \frac{1.486}{0.193} = 7.699$$

بما أن قيمة t المحسوبة و البالغة 7.699 أكبر من قيمة tالجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (6) و البالغة 2.45، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل ، أي معنوية المعلمة المقدرة $\hat{\beta}_1$

✓ **بالنسبة ل** $\hat{\beta}_0$

$$\hat{\sigma}_{B0} = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{n-k}\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}\right]} = \sqrt{\frac{151.0395}{6}\left[\frac{1}{8} + \frac{(18)^2}{672}\right]} = 3.9092$$

$$t_c = \frac{\hat{B}_0}{\hat{\sigma}_{B0}} = \frac{24.485}{3.9092} = 6.263$$

بما أن قيمة t المحسوبة و البالغة 6.263أكبر من قيمة tالجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (6) و البالغة 2.45، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل ، أي معنوية المعلمة المقدرة $\hat{\beta}_0$

**ثانيا. اختبار المعنوية الكلية للانحدار ( اختبار F):**

يوضح هذا الاختبار دلالة النموذج بصورة عامة باستخدام نسبة الانحرافات المفسرة الى الانحرافات غير المفسرة ، وتكون الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها هي :

$$\begin{cases} H_0 : B_0=B_1=0 \\ H_1 : B_0 \neq B_1 \neq 0 \end{cases}$$

- **شكل الاختبار:**

تكون الصيغة الرياضية لهذا الاختبار كالتالي:[1]

$$F_c = \frac{\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2 / k-1}{\Sigma\varepsilon_i^2 / (n-k)}$$

حيث: $F_c$ : هي قيمة t المحسوبة عند مستوى معنوية معين و درجة حرية (1 ,n- k)

k : هو عدد الوسائط (في حالة الانحدار الخطي البسيط تكون k=2)

n : عدد المشاهدات

- **قرار الاختبار:**

بعد حساب قيمة (F) يتم مقارنتها مع القيمة الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند درجات حرية (1,n−2) و مستوى معنوية (1% أو 5%) لتحديد قبول أو رفض الفرض الصفري ، فاذا كانت:

✓ قيمة (F) المحتسبة أكبر من القيمة الجدولية أي $(F_c \geq F_t)$ يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل، وهذا يعني أن المتغير x يؤثر في المتغير y.

✓ قيمة (F) المحتسبة أصغر من القيمة الجدولية أي $(F_c \leq F_t)$ يتم رفض الفرض البديل وقبول الفرض الصفري. وهذا يعني أن المتغير x لا يؤثر في المتغير y.

**مثال:** اعتمادا على بيانات المثال السابق اختبر المعنوية الكلية للنموذج عند معنوية 5%.

**الحل:**

بالاعتماد على الصيغة الرياضية للاختبار فإننا نحتاج الاحصاءات التالية:

| $\hat{Y}-\bar{Y}$ | $(\hat{Y}-\bar{Y})^2$ |
|---|---|
| -20.821 | 433.5140 |
| -14.877 | 221.3251 |
| -8.933 | 79.7984 |
| -2.989 | 8 .9341 |
| 2.955 | 8.7320 |
| 8.899 | 79.1922 |

[1] محمد شيخي، مرجع سابق، ص44

| | |
|---|---|
| 220.3146 | 14.843 |
| 432.0993 | 20.787 |
| $\Sigma(\hat{Y}-\bar{Y})^2 = 1483.9097$ | $\Sigma(\widehat{Y-\bar{Y}}) = 0$ |

وبتطبيق العلاقة نجد:

$$F_c = \frac{\Sigma(\hat{Y}-\bar{Y})^2 / k-1}{\Sigma\varepsilon_i^2 / (n-k)} = \frac{1483.9097/2-1}{151.0395/8-2}$$

$$F_c = 58.9478$$

بما أن قيمة Fالمحسوبة و البالغة 58.9478أكبر من قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (6،1) للبسط و المقام و البالغة 5.99 ، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل ، أي معنوية العلاقة المقدرة.

## ثالثا. اختبار القوة التفسيرية للنموذج( معامل التحديد $R^2$):

يعتبر معامل التحديد من أهم المعاملات التي تقيس علاقة الارتباط بين متغيرين بحيث وجود مثل هذه العلاقة يعني ضمنيا أن أحد المتغيرين يعتمد في تفسيره أو في حدوثه على المتغير الآخر. فهو اذن يقيس جوة النموذج من خلال شرح نسبة الانحرافات الكلية أو التغيرات التي تحدث في المتغير التابع $y_i$ و المشروحة بواسطة المتغير المستقل $x_i$ . ويتم استخراج قيمته الجبرية كالتالي:[1]

لدينا: $Y_i = \hat{Y}_i + \varepsilon_i$

وبطرح $\bar{y}$ من الطرفين نجد: $(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y} - \bar{Y}) + \varepsilon_i$

وبتربيع طرفي المعادلة أعلاه و جمعها بالنسبة لكل i نجد:

$$\Sigma(Y_i - \bar{Y})^2 = \Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2 + \Sigma\varepsilon_i^2$$

حيث:

$\Sigma(Y_i - \bar{Y})^2$: يمثل مجموع مربعات الانحرافات الكلية في المتغير y، يرمز له بـ TSS.

$\Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2$: يمثل مجموع مربعات الانحرافات المفسرة ، يرمز له بـ ESS.

$\Sigma\varepsilon_i^2$ : يمثل مجموع مربعات البواقي، يرمز له بـ RSS.

وبإعادة صياغة المعادلة السابقة نتحصل على :

$$TSS = ESS + RSS$$

[1] Régis Bourbonnais, opcit, pp33,34

وبتقسيم كل الاطراف على الانحرافات الكلية نجد:

1= ESS/TSS + RSS/TSS

وبالتالي نعرف معامل التحديد $R^2$ كما يلي:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

أي:

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{\Sigma(Y_i - \bar{Y})^2}$$

وتتراوح قيمة معامل التحديد بين الصفر و الواحد ،ب اذا كان :

- $R^2=1$ : تكون العلاقة تامة بحيث جميع نقاط الانتشار تقع على خط الانحدار المقدر ، أي $Y_i=\hat{Y}_i$
- $R^2=0$ : تكون العلاقة معدومة بحيث يكون خط انحدار العينة خطا أفقيا، أي $\hat{Y} = \bar{Y}$.

وكل من هاتين الحالتين نادرة الحدوث، ففي الأحوال العادية يفسر خط الانحدار جزءا من التغيرات في y وبالتالي يكون هناك جزءا آخر غير مفسر بواسطة الخط، ومن ثم نجد في أغلب الحالات $0<R^2<1$.

**قاعدة :**

**يمكن توضيح العلاقة بين احصائي F و معامل $R^2$ في نموذج المتغيرين كالآتي:**

$$F_c = \frac{R^2/1}{1-R^2}(n-2)$$

**يمكن توضيح العلاقة بين معامل الانحدار الخطي و معامل التحديد في نموذج المتغيرين كالآتي:**

$$R^2 = \frac{\widehat{B_1}\Sigma(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\Sigma(Y_i - \bar{Y})^2}$$

**مثال:** اعتمادا على بيانات المثال السابق أوجد مقدار ما يفسره المتغير المستقل من التغير في المتغير التابع y.

**الحل:**

بالاعتماد على الصيغة الرياضية للاختبار فإننا نحتاج الاحصاءات التالية:

| $(Y_i - \bar{Y})^2$ | $Y_i - \bar{Y}$ |
|---|---|
| 657.9225 | -25.65 |
| 344.1025 | -18.55 |
| 34.2225 | -5.85 |
| 7.0225 | 2.65 |
| 60.0625 | 7.75 |

| | |
|---|---|
| 128.8225 | 11.35 |
| 189.0625 | 13.75 |
| 203.0625 | 14.25 |
| $\Sigma(\mathrm{Y_i}-\bar{\mathrm{Y}})^2=\mathbf{1624.28}$ | $(\mathrm{Y_i}-\bar{\mathrm{Y}})=\mathbf{0}$ |

و بالتالي:

$$R^2=1-\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{\Sigma(\mathrm{Y_i}-\bar{\mathrm{Y}})^2}=1-\frac{151.0395}{1624.28}$$

$$\mathbf{R^2=90.70\%}$$

وهذه النتيجة تعني أن المتغير المستقل و الممثل في الاعلانات يفسر حوالي *90.70%* من التغير الحاصل في المتغير التابع أي المبيعات ، وأن النسبة المتبقية و البالغة *9.30%* تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة.

## II. الانحدار الخطي المتعدد:

### 1. كتابة و فرضيات النموذج:

#### أولا. كتابة النموذج:

الانحدار الخطي المتعدد هو عبارة عن ايجاد معادلة رياضية تعبر عن العلاقة بين المتغير التابع (y) على العديد من المتغيرات المستقلة $x_1, x_2, \ldots.. x_k$ ، لذا فهو يستخدم في التوقع بتغيرات المتغير التابع الذي يؤثر فيه عدة متغيرات مستقلة. فعلى سبيل المثال نجد أن دالة الطلب التي تدل على أن الكمية المطلوبة من سلعة معينة تتأثر بسعر تلك السلعة و أسعار السلع البديلة و دخل المستهلك وغيرهم.

ويمكن التعبير عن هذه العلاقة بالصيغة الرياضية التالية:[1]

$$\mathbf{y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+\beta_2X_{i2}+\ldots\ldots+\beta_kX_{ik}+\varepsilon_i}$$

في الواقع فإن المعادلة أعلاه هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات التالي:

$$\mathrm{I=1:}\quad y_1=\beta_0+\beta_1X_{11}+\beta_2X_{12}+\ldots\ldots+\beta_kX_{1k}+\varepsilon_1$$

$$\mathrm{I=2:}\quad y_2=\beta_0+\beta_1X_{21}+\beta_2X_{22}+\ldots\ldots+\beta_kX_{2k}+\varepsilon_2$$

.............................................................................................

$$\mathrm{I=n:}\quad y_n=\beta_0+\beta_1X_{n1}+\beta_2X_{n2}+\ldots\ldots+\beta_kX_{nk}+\varepsilon_n$$

هذه المعادلات تتضمن (K+1) من المعلمات المطلوب تقديرها ، علما أن الحد الأول منها ($B_0$) يمثل الحد الثابت، الأمر الذي يتطلب اللجوء الى المصفوفات و المتجهات لتقديرها . لذا ، فانه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كالتالي:[2]

[1] هاري كلجيان، والاس أوس، ترجمة المرسي حجازي و عبد القادر عطية، مرجع سابق، ص202

[2] Régis Bourbonnais, opcit, p 48.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

ونكتبها باختصار:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \varepsilon$$

حيث:

Y: متجه عمودي من الدرجة $(n\times1)$ يحتوي على n مشاهدة للمتغير Y

X: مصفوفة من درجة $(1+ (n\times k))$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة وعمودها الأول يحتوي على قيم الواحد الصحيح ليمثل الحد الثابت.

β: متجه عمودي من الدرجة $(1\times(1+ k))$ يحتوي على المعالم المجهولة.

ε: متجه عمودي من الدرجة $(n\times1)$ يحتوي على قيم الأخطاء العشوائية .

## ثانيا. فرضيات النموذج:

يمكن تلخيص فرضيات نموذج الانحدار الخطي المتعدد فيما يلي: [1]

- **الفرضية الأولى:** النموذج الخطي بالنسبة لمعالم النموذج وشعاع الأخطاء، يعني أنه يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$y_i=\beta_0+ \beta_1X_{i1}+ \beta_2X_{i2}+\dots\dots+ \beta_kX_{ik} +\varepsilon_i \quad i= 1,2\dots\dots\dots\dots n$$

- **الفرضية الثانية:** التوقع الرياضي للأخطاء معدوم، أو بعبارة أخرى متوسط الأخطاء معدوم . أي $\mathbf{E(\varepsilon_i)=0}$
- **الفرضية الثالثة:** تشتت الأخطاء حول المتوسط ثابت، و يعبر عنه رياضيا بـ $\mathbf{var}\ (\varepsilon_i)= \mathbf{E}(\varepsilon^2_i)= \sigma^2$.
- **الفرضية الرابعة:** عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء، بمعنى أن التباينات المشتركة لأخطاء الملاحظات المختلفة تكون معدومة وهذا على طول العينة. و يعبر عنه رياضيا بـ :

$$\mathbf{cov}(\varepsilon_i , \varepsilon_j)= \mathbf{E}(\varepsilon_i , \varepsilon_j) = 0 \quad , \forall i\neq j \quad , i,j=1\dots\dots n.$$

- **الفرضية الخامسة:** عدد المشاهدات n هو أكبر من عدد المتغيرات المفسرة، وهي الحالة التي تلغي الارتباط الخطي بين المتغيرات المستقلة.

## 2. تقدير معالم النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

نعني بتقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد ايجاد قيم المعلمات $B_0, B_1\dots\dots B_k$ بطريقات المربعات الصغرى التي تجعل مجموع مربعات الانحرافات أقل ما يمكن، أي تصغير القيمة $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2$ الى اقل قيمة ممكنة على النحو التالي: [2]

[1] محمد شيخي، مرجع سابق، ص58، 59

[2] اري كلجيان، والاس أوس، ترجمة المرسي حجازي و عبد القادر عطية، مرجع سابق، ص ص 207، 208

$$\text{Min} \longrightarrow \sum_{i=1}^{rn} \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{rn} (y_i - \hat{Y}i)^2$$
$$= (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2} - \dots\dots - \hat{\beta}_k X_{ik})^2$$

وبأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لقيم $B_0, B_1 \dots\dots B_k$ و مساواتها بالصفر نتحصل على ما يلي:

$$\frac{\partial \Sigma \varepsilon_i^2}{\partial \hat{B}_0} = 2\Sigma(y_i - \hat{B}_1 X_1 - \hat{B}_2 X_2 \dots\dots \hat{B}_k \hat{X}_k) = 0$$
$$\frac{\partial \Sigma \varepsilon_i^2}{\partial \hat{B}_1} = -2\Sigma X_{11}(y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_2 X_2 \dots\dots \hat{B}_k \hat{X}_k) = 0$$

.................................................................

$$\frac{\partial \Sigma \varepsilon_i^2}{\partial \hat{B}_k} = -2\Sigma X_{ik}(y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_2 X_2 \dots\dots \hat{B}_k \hat{X}_k) = 0$$

بفك الأقواس و القسمة على (2) واعادة كتابة المعادلات الطبيعية مقابلة للنموذج الخطي العام بحيث سنكتفي على سبيل المثال بنموذج بثلاث مقدرات :

$$\Sigma y_I = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \Sigma X_{1i} + \hat{B}_2 X_{2i}$$
$$\Sigma X_{1I} y = \hat{B}_0 \Sigma X_{1I} + \hat{B}_1 \Sigma X_{1I}^2 + \hat{B}_2 \Sigma X_{1I} X_{2I}$$
$$\Sigma X_{2I} y = \hat{B}_0 \Sigma X_{21I} + \hat{B}_1 \Sigma X_{1I} X_{2I} + \hat{B}_2 \Sigma X_{2I}^2$$

وباستخدام الانحرافات نتحصل على:

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \dfrac{(\sum X_1 y)(\Sigma X_2^2) - (\sum X_2 y)(\sum X_1 X_2)}{(\Sigma X_1^2)(\Sigma X_2^2) - (\Sigma X_1 X_2)^2} \\[2ex] \hat{B}_2 = \dfrac{(\sum X_2 y)(\Sigma X_1^2) - (\sum X_1 y)(\sum X_1 X_2)}{(\Sigma X_1^2)(\Sigma X_2^2) - (\Sigma X_1 X_2)^2} \\[2ex] \hat{B}_0 = \bar{y} - \hat{B}_1 \bar{X}_1 - \hat{B}_2 \bar{X}_2 \end{cases}$$

**مثال:** الجدول التالي يتضمن البيانات الخاصة بالاستيرادات كمتغير تابع والدخل القومي كمتغير مستقل أول و أسعار الاستيرادات كمتغير مستقل ثاني في أحد الدول للمدة 2000-2008:

| اسعار الاستيرادات | الدخل القومي | الاستيرادات | السنة |
|---|---|---|---|
| 100 | 100 | 100 | **2000** |
| 99 | 104 | 106 | **2001** |
| 110 | 106 | 107 | **2002** |
| 126 | 111 | 120 | **2003** |
| 113 | 111 | 110 | **2004** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2005 | 116 | 115 | 103 |
| 2006 | 124 | 120 | 102 |
| 2007 | 133 | 124 | 103 |
| 2008 | 137 | 126 | 98 |

المطلوب: 1. اكتب النموذج بشكل مصفوفي.

2.قدر معالم النموذج.

3. اكتب معادلة الانحدار لهذا المثال.

**الحل:**

✓ كتاب الشكل المصفوفي للمثال:

عدد المتغيرات المستقلة في المثال هو K=2 و بإضافة الحد الثابت للنموذج نتحصل على K+1=3 ، وعدد المشاهدات هو 9:

$$\mathbf{y_i=\beta_0+ \beta_1X_{i1}+ \beta_2X_{i2} +\varepsilon_i \quad i=1,2.........9}$$

$$\begin{cases} y_1=\beta_0+\beta_1X_{11}+ \beta_2X_{12}+ \varepsilon_1 \\ y_2= \beta_0+\beta_1X_{21}+ \beta_2X_{22} +\varepsilon_2 \\ y_3= \beta_0+\beta_1X_{31}+ \beta_2X_{32} +\varepsilon_3 \\ y_4= \beta_0+\beta_1X_{41}+ \beta_2X_{42} +\varepsilon_4 \\ y_5= \beta_0+\beta_1X_{51}+ \beta_2X_{52} +\varepsilon_5 \\ y_6= \beta_0+\beta_1X_{61}+ \beta_2X_{62} +\varepsilon_6 \\ y_7= \beta_0+\beta_1X_{71}+ \beta_2X_{72} +\varepsilon_7 \\ y_8= \beta_0+\beta_1X_{81}+ \beta_2X_{82} +\varepsilon_8 \\ y_9= \beta_0+\beta_1X_{91}+ \beta_2X_{92} +\varepsilon_9 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 106 \\ 107 \\ 120 \\ 110 \\ 116 \\ 124 \\ 133 \\ 137 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 100 & 100 \\ 1 & 104 & 99 \\ 1 & 106 & 110 \\ 1 & 111 & 126 \\ 1 & 111 & 113 \\ 1 & 115 & 103 \\ 1 & 120 & 102 \\ 1 & 124 & 103 \\ 1 & 126 & 98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{bmatrix}$$

✓ تقدير معالم النموذج:

بالاعتماد على الصيغة الرياضية للمعلمات فإننا نحتاج الاحصاءات التالية:

| $Y_i - \bar{Y}$ | $X_1 - \bar{X}$ | $X_2 - \bar{X}$ | $X_1y$ | $X_2y$ | $X_1X_2$ | $X_1^2$ | $X_2^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -17 | -13 | -6 | 221 | 102 | 78 | 169 | 36 |
| -11 | -9 | -7 | 99 | 77 | 63 | 81 | 49 |
| -10 | -7 | 4 | 70 | -40 | -28 | 49 | 16 |
| 3 | -2 | 20 | -6 | 60 | -40 | 4 | 400 |
| -7 | -2 | 7 | 14 | -49 | -14 | 4 | 49 |
| -1 | 2 | -3 | -2 | 3 | -6 | 4 | 9 |
| 7 | 7 | -4 | 49 | -28 | -28 | 49 | 16 |
| 16 | 11 | -3 | 176 | -48 | -33 | 121 | 9 |
| 20 | 13 | -8 | 260 | -160 | -104 | 169 | 64 |
| | | | $\Sigma = 881$ | $\Sigma = -83$ | $\Sigma = -112$ | $\Sigma = 650$ | $\Sigma = 648$ |

بتطبيق القانون نجد:

$$\hat{B}_1 = \frac{(648)(881) - (-112)(-83)}{(560)(648) - (-112)^2} = 1.374$$

$$\hat{B}_2 = \frac{(650)(-83) - (-112)(881)}{(560)(648) - (-112)^2} = 0.109$$

$$\hat{B}_0 = 117 - (1.374)(113) - (0.109)(106) = -49.816$$

✓ كتابة معادلة الانحدار الخطي المتعدد :

$$\hat{Y} = -49.816 + 1.374X1 + 0.109\,X2$$

و تشير المعادلة التقديرية أعلاه الى وجود علاقة طردية بين المتغير التابع الذي يمثل الاستيرادات و المتغير المستقل الأول الذي يمثل الدخل القومي بحيث كل زيادة في هذا الأخير بوحدة واحدة ستزداد الاستيرادات بمقدار 1.374 وحدة مع ثبات أثر المتغير المستقل الثاني. كما تشير هذه المعادلة الى وجود علاقة طردية بين المتغير التابع و المتغير المستقل الثاني الذي يمثل أسعار الاستيرادات بحيث كل زيادة في هذا الأخير بوحدة واحدة ستزداد الاستيرادات بمقدار 0.109 وحدة مع ثبات أثر المتغير المستقل الأول.

## 3. تقييم نموذج الانحدار المقدر

يتم اختبار معنوية الانحدار المتعدد و المقدر بنقس الطريقة التي رأيناها في نموذج الانحدار البسيط ، وذلك كما يلي:

### أولا. اختبار معنوية معالم الانحدار ( اختبار التوزيع t ):

لاختبار معنوية $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_2$ نستخدم الفرض الصفري $H_0$ و الفرض البديل $H_1$ التاليين كما يلي:

✓ **الفرض الصفري**: تنص على عدم وجود علاقة بين المتغير التابع و المتغيرات المستقلة أي أن:[1]

$$H_0:\ B_1 = 0$$
$$B_2 = 0$$

✓ **الفرض البديل**: تنص على وجود علاقة بين المتغير التابع و المتغيرات المستقلة أي أن:

$$H_1:\ B_1 \neq 0$$
$$B_2 \neq 0$$

- **شكل الاختبار:**

**بالنسبة لـ** $\hat{B}_1$:

تكون الصيغة الرياضية لهذا الاختبار كالتالي:

$$t_c = \frac{\hat{B}_1}{\hat{\sigma}_{B1}}$$

حيث: $t_c$ : هي قيمة $t$ المحسوبة عند مستوى معنوية معين و درجة حرية $(n-k)$ .

$\hat{B}_1$: القيمة التقديرية لـ $B_1$ الحقيقية.

$\hat{\sigma}_{B1}$ : الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة $\hat{B}_1$، مع العلم أنه يعطى بالصيغة التالية: التالي:

$$\hat{\sigma}_{B1} = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n-k}\ \frac{\Sigma X_2^2}{\Sigma X_1^2 \Sigma X_2^2 - (\Sigma X_1 X_2)^2}}$$

**بالنسبة لـ** $\hat{B}_2$:

تكون الصيغة الرياضية لهذا الاختبار كالتالي:

$$t_c = \frac{\hat{B}_2}{\hat{\sigma}_{B2}}$$

مع العلم أن :

$$\hat{\sigma}_{B2} = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n-k}\ \frac{\Sigma X_1^2}{\Sigma X_1^2 \Sigma X_2^2 - (\Sigma X_1 X_2)^2}}$$

- **قرار الاختبار:**

بعد حساب قيمة $(t)$ يتم مقارنتها مع القيمة الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند درجات حرية $(n-K)$ و مستوى معنوية (1% أو 5%) لتحديد قبول أو رفض الفرض الصفري ، فاذا كانت:

[1] حسين علي بخيت، سحر فتح الله ، مرجع سابق، ص ص 161 ، 162

✓ قيمة t المحتسبة أكبر من القيمة الجدولية أي $(t_c \geq t_t)$ يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل، وهذا يعني أن المعلمة ذات معنوية احصائية.

✓ قيمة t المحتسبة أصغر من القيمة الجدولية أي $(t_c \leq t_t)$ يتم رفض الفرض البديل وقبول الفرض الصفري. وهذا يعني عدم معنوية المعلمة المقدرة.

**مثال**: اعتمادا على بيانات المثال السابق اختبر عند معنوية 5% المقدرتين $\widehat{B}_1$ و $\widehat{B}_2$.

**الحل**:

بالاعتماد على الصيغة الرياضية للاختبار فإننا نحتاج الاحصاءات التالية:

| Y | $\hat{y}$ | ε | $ε^2$ |
|---|---|---|---|
| 100 | 98.484 | 1.516 | 2.298 |
| 106 | 103.871 | 2.129 | 4.532 |
| 107 | 107.818 | -0.818 | 0.669 |
| 120 | 116.432 | 3.568 | 12.730 |
| 110 | 115.015 | -5.015 | 25.150 |
| 116 | 119.421 | -3.421 | 11.703 |
| 124 | 126.182 | -2.182 | 4.761 |
| 133 | 131.787 | 1.213 | 1.471 |
| 137 | 133.99 | 3.01 | 9.060 |
| | | | **Σ =72.374** |

✓ **بالنسبة لـ** $\widehat{B}_1$:

$$\hat{\sigma}_{B1}=\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n-k}\,\frac{\Sigma X_2^2}{\Sigma X_1^2\Sigma X_2^2-(\Sigma X_1X_2)^2}}=\sqrt{\frac{72.374}{6}\,\frac{648}{(650)(648)-(-112)^2}}=0.1382$$

و

$$t_c=\frac{\widehat{B}_1}{\hat{\sigma}_{B1}}=\frac{1.374}{0.1382}=9.942$$

بما أن قيمة t المحسوبة و البالغة 9.942 أكبر من قيمة tالجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (6) و البالغة 2.45، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل ، أي معنوية المعلمة المقدرة $\widehat{B}_1$

✓ **بالنسبة لـ** $\widehat{B}_2$

$$\hat{\sigma}_{B2}=\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n-k}\,\frac{\Sigma X_1^2}{\Sigma X_1^2\Sigma X_2^2-(\Sigma X_1X_2)^2}}=\sqrt{\frac{72.374}{6}\,\frac{650}{(650)(648)-(-112)^2}}=0.1384$$

$$t_c=\frac{\widehat{B}_2}{\hat{\sigma}_{B2}}=\frac{0.109}{0.1384}=0.787$$

بما أن قيمة t المحسوبة و البالغة0.787 أقل من قيمة tالجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (6) و البالغة 2.45، فانه يتم قبول الفرض الصفري ورفض الفرض البديل ، أي عدم معنوية المعلمة المقدرة $\widehat{B}_2$.

**ثانيا. اختبار المعنوية الكلية للانحدار ( اختبار F):**

يوضح هذا الاختبار دلالة النموذج بصورة عامة باستخدام نسبة الانحرافات المفسرة الى الانحرافات غير المفسرة ، وتكون الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها هي :

$$\begin{cases} H_0 : B_0=B_1=\ldots\ldots B_k=0 \\ H_1 : B_0\neq B_1\neq\ldots\ldots B_k\neq 0 \end{cases}$$

- **شكل الاختبار:**

تكون الصيغة الرياضية لهذا الاختبار كالتالي:[1]

$$F_c = \frac{\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2 / k-1}{\Sigma\varepsilon_i^2 / (n-k)}$$

حيث: $F_c$ : هي قيمة t المحسوبة عند مستوى معنوية معين و درجة حرية (K−1 ,n- k)

n : عدد المشاهدات

- **قرار الاختبار:**

بعد حساب قيمة (F) يتم مقارنتها مع القيمة الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند درجات حرية (K-1,n-K) و مستوى معنوية (1% أو 5%) لتحديد قبول أو رفض الفرض الصفري ، فاذا كانت:

✓ قيمة (F) المحتسبة أكبر من القيمة الجدولية أي ($F_c \geq F_t$) يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل، وهذا يعني معنوية العلاقة المدروسة.

✓ قيمة (F )المحتسبة أصغر من القيمة الجدولية أي ($F_c \leq F_t$) يتم رفض الفرض البديل وقبول الفرض الصفري. وهذا يعني عدم معنوية العلاقة المدروسة.

**مثال**: اعتمادا على بيانات المثال السابق اختبر المعنوية الكلية للنموذج عند معنوية 5%.

**الحل:**

بالاعتماد على الصيغة الرياضية للاختبار فإننا نحتاج الاحصاءات التالية:

[1] محمد شيخي، مرجع سابق، ص73، 74

| $(\widehat{Y}-\overline{Y})^2$ | $\widehat{Y}-\overline{Y}$ |
|---|---|
| 342.842 | -18.516 |
| 172.37 | -13.129 |
| 84.309 | -9.182 |
| 0.322 | -0.568 |
| 3.94 | -1.985 |
| 5.861 | 2.421 |
| 84.309 | 9.182 |
| 218.655 | 14.787 |
| 288.660 | 16.99 |
| $\Sigma = 1201.268$ | |

و بتطبيق القانون نجد:

$$F_c = \frac{\Sigma(\widehat{Y}-\overline{Y})^2 / k-1}{\Sigma\varepsilon_i^2 / (n-k)} = \frac{\frac{1201.268}{2}}{\frac{72.374}{6}} = 49.794$$

بما أن قيمة Fالمحسوبة و البالغة 49.794 أكبر من قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (6،2) للبسط و المقام و البالغة 5.14 ، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل ، أي معنوية العلاقة المقدرة.

**ثالثا. اختبار القوة التفسيرية للنموذج( معامل التحديد $R^2$):**

هو مقياس يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع. و يستعمل من أجل ذلك الصيغة الرياضية التالية:[1]

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{\Sigma(Y_i-\overline{Y})^2}$$

غير أنه يعاب على $R^2$أنه يتزايد دوماً بتزايد عدد المتغيرات المستقلة وذلك بغض النظر عما إذا كانت تلك المتغيرات تلعب أو لا تلعب دور في تفسير التباين الخاص بـ Y. لذلك يفضل استعمال معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$ للتخلص من هذا القصور، والذي يعطى بالصيغة التالية:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{(n-1)}{n-k}(1-R^2)$$

**مثال:** اعتمادا على بيانات المثال السابق أوجد مقدار ما تفسره المتغيرات المستقلة من التغير في المتغير التابع

**الحل:**

[1] Régis Bourbonnais, opcit, p p 54, 55

بالاعتماد على الصيغة الرياضية فإننا نحتاج للإحصائيات التالية :

| $Y_i-\bar{Y}$ | $(Y_i-\bar{Y})^2$ |
|---|---|
| -17 | 289 |
| -11 | 121 |
| -10 | 100 |
| 3 | 9 |
| -7 | 49 |
| -1 | 1 |
| 7 | 49 |
| 16 | 256 |
| 20 | 400 |
| | $\Sigma$= 1274 |

و بتطبيق القانون نجد:

$$R^2=1-\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{\Sigma(Y_i-\bar{Y})^2}=1-\frac{72.374}{1274}=0.9432$$

$$R^2=94.32\%$$

أما معامل التحديد المعدل فهو:

$$\bar{R}^2=1-\frac{(n-1)}{n-k}(1-R^2)=1-\frac{8}{6}(1-0.9432)$$

$$\bar{R}^2=0.9243=92.43\%$$

وهذه النتيجة تعني أن المتغيرين المستقلين و الممثلين في الدخل القومي و الأسعار يفسران حوالي 92.43% من التغير الحاصل في المتغير التابع أي الاستيرادات ، وأن النسبة المتبقية و البالغة 7.57%تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة.

## III.تمارين تطبيقية:

### 1. تمارين محلولة:

**التمرين الأول:** بفرض توفر البيانات الخاصة بمقدار المبيعات اليومية لإحدى عشر عامل ( بالألف دينار) في محل تجاري حسب مدة الخدمة ( بالسنوات) ، والتي يلخصها الجدول التالي:

| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مبيعات يومية | 7 | 17 | 15 | 14 | 13 | 10 | 8 | 12 | 11 | 9 | 5 |
| مدة الخدمة | 4 | 13 | 11 | 12 | 12 | 8 | 6 | 11 | 10 | 9 | 3 |

**المطلوب:**

. أوجد خط الانحدار المقدر.

.احسب الانحراف المعياري للمعلمتين $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$

.اختبر مدى معنوية المعلمات المقدرة عند مستوى 5%.

. وضح مقدار ما يفسره المتغير المستقل من التغير في المتغير التابع.

**التمرين الثاني:** المعادلة التالية توضح مبيعات السيارات لمؤسسة معينة و الكتلة الأجرية الشهرية لعمالها خلال 12شهر،بعد تطبيق طريقة المربعات الصغرى:

$$\hat{S}_i = 1767,61 + 7.48Wi$$

حيث: $W_i$: الكتلة الاجرية الشهرية ، $S_i$: المبيعات الشهرية . كما أن:

$$\hat{\sigma}_{B0} = 238.87$$
$$\hat{\sigma}_{B1} = 3.12$$
$$R^2 = 0.8$$

**المطلوب:**

. اشرح المعنى الاقتصادي للمعلمتين المقدرتين

. اختبر صحة الفرضيتين $B_0= 0$ و $B_1=0$ عند مستوى معنوية 5%.

. اختبر مدى معنوية العلاقة الخطية بين $W_i$ و $S_i$ عند مستوى 5%.

**التمرين الثالث:** نقوم بعملية انحدار لمحاولة بناء نموذج يربط بين حجم المحصول من الحبوب ( مليون طن) و كميات الأمطار المتساقطة (100ملم) خلال 5سنوات. يظهر الجدول الموالي البيانات الخاصة بذلك:

| كمية الأمطار | 4 | 6 | 6 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| حجم المحصول | 36 | 47 | 43 | 34 | 20 |

**المطلوب:**

. قدر نموذج الانحدار المعطى.

. هل يمكن القول بأن خط الانحدار المقدر ذو دلالة احصائية عند مستوى 5%.

. أوجد معامل التحديد و علق على النتيجة.

**التمرين الرابع:** يتضمن الجدول الموالي بيانات حول الكمية المطلوبة شهريا(كغ) من سلعة معينة (y)، و سعر الوحدة الواحدة من السلعة (دج) ولتكن $x_1$ ، دخل الأسرة الشهري(100دج) و ليكن $x_2$ . كما أخذت هذه البيانات من عينة تتكون من 10 أسر:

| 80 | 74 | 68 | 60 | 58 | 52 | 48 | 46 | 44 | 40 | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 26 | 24 | 22 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 6 | $X_1$ |
| 24 | 21 | 20 | 14 | 12 | 9 | 7 | 5 | 4 | 4 | $X_2$ |

**المطلوب:**

. قدر معالم النموذج بطريقة المربعات الصغرى، وفسر تلك النتائج.

. اختبر فرضية العلاقة بين الكمية المطلوبة و السعر و الدخل عند مستوى 5%.

. أوجد معامل التحديد المعدل وعلق على النتيجة.

**التمرين الخامس:** من أجل دراسة أثر عدد سنوات دراسة الأب و الأم على عدد سنوات دراسة أبنائهم ، تم أخذ عينة مكونة من 20 شخص . في كل مرة يتم حساب عدد سنوات دراسة هذا الشخص (y) مع عدد سنوات دراسة أمه ($x_1$) و عدد سنوات دراسة أبيه ($x_2$).

$$Y = B_1 X_1 + B_2 X_2$$

كما تعطى المجاميع التالية:

$$\Sigma y = 51, \quad \Sigma y^2 = 181 \quad , \quad \Sigma x_1 = 54 \quad , \quad \Sigma x_1^2 = 228$$

$$\Sigma x_2 = 54, \quad \Sigma x_2^2 = 202 \quad , \quad R^2 = 0.95 \quad \Sigma yx_1 = 184$$

$$\Sigma yx_2 = 158 \quad , \quad \Sigma x_1 x_2 = 144$$

**المطلوب:**

. قدر معلمات النموذج.

. ما مقدار ما يفسره المتغيرين المستقلين من التغير الحاصل في المتغير التابع.

**الحلول:**

**حل التمرين الأول:**

✓ ايجاد خط الانحدار المقدر و الانحراف العياري لمعلمتي النموذج:

لإيجاد خط الانحدار و الانحراف المعياري نقوم بإعداد الجدول التالي:

| $(x_i - \bar{x})^2$ | $X_i y_i$ | $X_i^2$ | $Y_i$ | $X_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 28 | 16 | 7 | **4** |
| 16 | 221 | 169 | 17 | **13** |
| 4 | 165 | 121 | 15 | **11** |
| 9 | 168 | 144 | 14 | **12** |
| 9 | 156 | 144 | 13 | **12** |
| 1 | 80 | 64 | 10 | **8** |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 48 | 36 | 8 | **6** |
| 4 | 132 | 121 | 12 | **11** |
| 1 | 110 | 100 | 11 | **10** |
| 0 | 81 | 81 | 9 | **9** |
| 36 | 15 | 9 | 5 | **3** |
| **Σ=114** | **Σ=1204** | **Σ=1005** | **Σ=121** | Σ=99 |

و بتطبيق القانون نجد:

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i - n\,\overline{X.Y}}{\sum x_i^2 - n\,\bar{X}^2} = \frac{1204-11(9)(11)}{1005-11(81)} = 1$$

$$\hat{B}_0 = \bar{y} - \hat{B}_1\,\bar{x} = 11 - 1(9) = 2$$

$$\hat{Y}_i = 2 + X$$

✓ ايجاد الانحراف المعياري لمعلمتي النموذج:

نحتاج الى الاحصائيات التي تظهر في الجدول التالي:

| $(Y_i-\bar{Y})^2$ | $(Y_i-\hat{Y}_i)^2$ | $\hat{Y}_i$ |
|---|---|---|
| 16 | 1 | 6 |
| 36 | 4 | 15 |
| 16 | 4 | 13 |
| 9 | 0 | 14 |
| 4 | 1 | 14 |
| 1 | 0 | 10 |
| 9 | 0 | 8 |
| 1 | 1 | 13 |
| 0 | 1 | 12 |
| 4 | 4 | 11 |
| 36 | 0 | 5 |
| **Σ= 132** | **Σ=16** | |

و بتطبيق صيغة الانحراف نتحصل على:

$$\hat{\sigma}_{B1} = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2(n-2)}} = \sqrt{\frac{16}{(144)(9)}} = 0.124$$

$$\hat{\sigma}_{B0} = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{n-k}\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X^2}}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\right]} = \sqrt{\frac{16}{9}\left(\frac{1}{11}+\frac{81}{114}\right)} = 1.193$$

✓ اختبار معنوية المعلمات المقدرة:

- بالنسبة لـ$\widehat{B}_1$ :

$$t_c = \frac{\widehat{B}_1}{\widehat{\sigma}_{B1}} = \frac{1}{0.124} = 8.06$$

بما أن قيمة t المحسوبة و البالغة 8.06 أكبر من قيمة tالجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (9) و البالغة 2.26 ، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل ، أي معنوية المعلمة المقدرة $\widehat{B}_1$

- بالنسبة لـ $\widehat{B}_0$ :

$$t_c = \frac{\widehat{B}_0}{\widehat{\sigma}_{B0}} = \frac{2}{1.193} = 1.67$$

بما أن قيمة t المحسوبة و البالغة 1.67 أقل من قيمة tالجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (9) و البالغة 2.26 ، فانه يتم قبول الفرض الصفري ورفض الفرض البديل ، أي عدم معنوية المعلمة المقدرة $\widehat{B}_0$.

✓ حساب معامل التحديد:

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{\Sigma(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{16}{132}$$

$$R^2 = 87.88\ \%$$

وهذه النتيجة تعني أن المتغير المستقل و الممثل في مدة الخدمة يفسر حوالي 87.88% من التغير الحاصل في المتغير التابع أي المبيعات اليومية ، وأن النسبة المتبقية و البالغة 12,12% تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة.

**حل التمرين الثاني:**

✓ المعنى الاقتصادي للمعلمتين المقدرتين:

- 1767.61: يمثل عدد المبيعات اذا كانت الكتلة الأجرية معدومة .
- 7.48: اذا ارتفعت الكتلة الأجرية بوحدة واحدة فان المبيعات سترتفع بمقدار 7.48وحدة نقدية.

✓ اختبار صحة الفرضيتين $B_0= 0$ و $B_1=0$:

- بالنسبة لـ$\widehat{B}_1$ :

$$t_c = \frac{\widehat{B}_1}{\widehat{\sigma}_{B1}} = \frac{7.48}{3.12} = 2.39$$

بما أن قيمة t المحسوبة و البالغة 2.39 أكبر من قيمة tالجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (10) و البالغة 2.22 ، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل ، أي معنوية المعلمة المقدرة $\widehat{B}_1$

- بالنسبة لـ $\widehat{B}_0$ :

$$t_c = \frac{\widehat{B}_0}{\widehat{\sigma}_{B0}} = \frac{1767.61}{238.87} = 7.39$$

بما أن قيمة t المحسوبة و البالغة 7.39 أكبر من قيمة tالجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (10) و البالغة 2.22 ، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل ، أي معنوية المعلمة المقدرة $\widehat{B}_0$ .

✓ اختبار معنوية العلاقة الخطية:

بتطبيق الصيغة الاحصائية لاختبار فيشر نتحصل :

$$F_c = \frac{R^2/1}{1-R^2}(n-2) = \frac{0.8/1}{1-0.8}(12-2) = 40$$

بما أن قيمة Fالمحسوبة و البالغة40 أكبر من قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (1،10) للبسط و المقام و البالغة 4.96 ، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل ، أي معنوية العلاقة المقدرة.

**حل التمرين الثالث:**

✓ تقدير نموذج الانحدار المعطى:

لإيجاد خط الانحدار المقدر نقوم بإعداد الجدول التالي:

| $(Y_i-\bar{Y})^2$ | $X_i^2$ | $X_i\,y_i$ | $y_i$ | $X_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 16 | 144 | 36 | **4** |
| 121 | 36 | 282 | 47 | **6** |
| 49 | 36 | 258 | 43 | **6** |
| 4 | 9 | 102 | 34 | **3** |
| 256 | 1 | 20 | 20 | **1** |
| **Σ430** | **Σ=98** | **Σ=806** | **Σ= 180** | Σ=20 |

و بتطبيق القانون نجد:

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i - n\,\overline{X}.\overline{Y}}{\sum x_i^2 - n\,\bar{X}^2} = \frac{806-5(4)(36)}{98-5(16)} = 4.778$$

$$\hat{B}_0 = \bar{y} - \hat{B}_1\,\bar{x} = 36 - 4.778(4) = 16.888$$

$$\hat{Y}_i = \mathbf{16.888 + 4.778}X$$

✓ خط الانحدار المقدر ذو دلالة احصائية:

لمعرفة ذلك يتطلب الأمر تطبيق اختبار ستودنت الذي يحتاج الى الاحصائيات التالية:

| $(x_i-\bar{x})^2$ | $(Y_i-\hat{Y}_i)^2$ | $\hat{y}_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 36 |
| 4 | 2.085 | 45.556 |
| 4 | 6.533 | 45.556 |
| 1 | 7.717 | 31.222 |
| 9 | 2.775 | 21.666 |

| Σ=18 | Σ=19.11 |
|---|---|

و بتطبيق صيغة الانحراف نتحصل على:

$$\hat{\sigma}_{B1} = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2(n-2)}} = \sqrt{\frac{19.11}{(18)(3)}} = 0.594$$

وبتطبيق قانون اختبار $t$ نجد:

$$t_c = \frac{\hat{B}_1}{\hat{\sigma}_{B1}} = \frac{4.778}{0.594} = 8.043$$

بما أن قيمة t المحسوبة و البالغة 8.043 أكبر من قيمة tالجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (3) و البالغة 3.182 ، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل ، وبالتالي فان خط الانحدار المقدر ذو دلالة احصائية .

✓ ايجاد معامل التحديد:

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{\Sigma(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{19.11}{430}$$

$$R^2 = 95.60\ \%$$

وهذه النتيجة تعني أن المتغير المستقل و الممثل في كمية الامطار المتساقطة يفسر حوالي 95,6% من التغير الحاصل في المتغير التابع أي حجم المحصول، وأن النسبة المتبقية و البالغة 4,4% تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة.

## حل التمرين الرابع:

✓ تقدير معالم النموذج:

بالاعتماد على الصيغة الرياضية للمعلمات فإننا نحتاج الاحصاءات التالية:

| $Y_i - \bar{Y}$ | $X_1 - \bar{X}$ | $X_2 - \bar{X}$ | $X_1 y$ | $X_2 y$ | $X_1 X_2$ | $X_1^2$ | $X_2^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -17 | -12 | -8 | 204 | 136 | 96 | 144 | 64 |
| -13 | -8 | -8 | 104 | 104 | 64 | 64 | 64 |
| -11 | -6 | -7 | 66 | 77 | 42 | 36 | 49 |
| -9 | -4 | -5 | 36 | 45 | 20 | 16 | 25 |
| -5 | -2 | -3 | 10 | 15 | 6 | 4 | 9 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 4 | 2 | 12 | 6 | 8 | 16 | 4 |
| 11 | 6 | 8 | 66 | 88 | 48 | 36 | 64 |
| 17 | 8 | 9 | 136 | 153 | 72 | 64 | 81 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 14 | 12 | 322 | 276 | 168 | 196 | 144 |
| | | | Σ=956 | Σ=900 | Σ=524 | Σ=576 | Σ=504 |

بتطبيق القانون نجد:

$$\hat{B}_1=\frac{(\sum X_1y)(\Sigma X_2^2)-(\sum X_2y)(\sum X_1X_2)}{(\Sigma X_1^2)(\Sigma X_2^2)-(\Sigma X_1X_2)^2}=\frac{(956)(504)-(900)(524)}{(576)(504)-(524)^2}$$

$$\hat{B}_1=0.65$$

$$\hat{B}_2=\frac{(\sum X_2y)(\Sigma X_1^2)-(\sum X_1y)(\sum X_1X_2)}{(\Sigma X_1^2)(\Sigma X_2^2)-(\Sigma X_1X_2)^2}=\frac{(900)(576)-(956)(524)}{(576)(504)-(524)^2}$$

$$\hat{B}_2=1.11$$

$$\hat{B}_0=\bar{y}-\hat{B}_1\bar{X}_1-\hat{B}_2\overline{X_2}=57-(0.65)(18)-(1.11)(12)$$

$$\hat{B}_0=31.98$$

0.65: كلما زاد سعر الوحدة الواحدة من السلعة فان الكمية المطلوبة من السلعة تزيد بمقدار 0.65 مع ثبات الدخل الشهري.

1.11: كلما زاد الدخل الشهري للأسرة فان الكمية المطلوبة من السلعة تزيد بمقدار 1.11 مع ثبات سعر السلعة.

31.98: اذا كانت السلعة مجانية و لا يوجد دخل شهري للأسرة فان الكمية المطلوبة شهريا تقدر بـ 31,98كغ.

وبالتالي، فان معادلة الانحدار الخطي المتعدد تكون كالتالي:

$$\hat{Y}=31.98+0.65X1+1.11X2$$

✓ اختبار فرضية العلاقة بين الكمية و السعر و الدخل:

| $(\hat{Y}-\bar{Y})^2$ | $(Y_i-\hat{Y}_i)^2$ | $\hat{y}_i$ |
|---|---|---|
| 278.222 | 0.102 | 40.32 |
| 198.246 | 1.166 | 42.92 |
| 136.188 | 0.448 | 45.33 |
| 66.422 | 0.722 | 48.85 |
| 21.436 | 0.136 | 52.37 |
| 0 | 1 | 57 |
| 23.232 | 3.312 | 61.82 |
| 163.328 | 3.168 | 69.78 |
| 230.736 | 3.276 | 72.19 |

| | | |
|---|---|---|
| 502.656 | 0.336 | 79.42 |
| Σ=1620.466 | Σ=13.666 | |

و بتطبيق القانون نجد:

$$F_c = \frac{\Sigma(\hat{Y}-\bar{Y})^2 / k-1}{\Sigma\varepsilon_i^2 / (n-k)} = \frac{\frac{1620.466}{2}}{\frac{13.666}{7}} = 415.017$$

بما أن قيمة Fالمحسوبة و البالغة 415.017 أكبر من قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (7،2) للبسط و المقام و البالغة 4.74 ، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل ، أي معنوية العلاقة المقدرة.

✓ حساب معامل التحديد المعدل:

بالاعتماد على الصيغة الرياضية فإننا نحتاج للإحصائيات التالية :

| $(Y_i-\bar{Y})^2$ | $Y_i-\bar{Y}$ |
|---|---|
| 289 | -17 |
| 169 | -13 |
| 121 | -11 |
| 81 | -9 |
| 25 | -5 |
| 1 | 1 |
| 9 | 3 |
| 121 | 11 |
| 289 | 17 |
| 529 | 23 |
| Σ= 1634 | |

و بتطبيق القانون نجد:

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{\Sigma(Y_i-\bar{Y})^2} = 1 - \frac{13.666}{1634} = 0.9916$$

$$R^2 = 99.16\ \%$$

أما معامل التحديد المعدل فهو:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(n-1)}{n-k}(1-R^2) = 1 - \frac{9}{7}(\,1-0.9916)$$

$$\bar{R}^2 = 0.9892 = 98.92\%$$

وهذه النتيجة تعني أن المتغيرين المستقلين و الممثلين في الدخل الشهري و الأسعار يفسران حوالي98.92 % من التغير الحاصل في المتغير التابع أي الكمية المطلوبة ، وأن النسبة المتبقية و البالغة 1.08% تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة.

**حل التمرين الخامس:**

✓ تقدير معلمات النموذج:

$$\hat{B}_1 = \frac{(\sum X_1y)(\Sigma X_2^2) - (\sum X_2y)(\sum X_1X_2)}{(\Sigma X_1^2)(\Sigma X_2^2) - (\Sigma X_1X_2)^2} = \frac{(184)(202) - (158)(144)}{(228)(202) - (144)^2}$$

$$\hat{B}_1 = 0.569$$

$$\hat{B}_2 = \frac{(\sum X_2y)(\Sigma X_1^2) - (\sum X_1y)(\sum X_1X_2)}{(\Sigma X_1^2)(\Sigma X_2^2) - (\Sigma X_1X_2)^2} = \frac{(158)(228) - (184)(144)}{(228)(202) - (144)^2}$$

$$\hat{B}_2 = 0.376$$

$$\hat{B}_0 = \bar{y} - \hat{B}_1 \bar{X_1} - \hat{B}_2 \bar{X_2} = 2.55-(0.569)(2.7)-(0.376)(2.7)$$

$$\hat{B}_0 = 0.0015$$

$$\hat{Y} = 0;0015 + 0.569X1 + 0.376X2$$

✓ تفسير اثر المتغيرين المستقلين على المتغير التابع:

نحسب معامل التحديد المعدل كما يلي:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(n-1)}{n-k}(1-R^2) = 1 - \frac{19}{17}(1-0.95)$$

$$\bar{R}^2 = 0.9441 = 94.41\%$$

وهذه النتيجة تعني أن المتغيرين المستقلين و الممثلين في عدد سنوات الدراسة للأم و الأب يفسران حوالي 94.41% من التغير الحاصل في المتغير التابع أي عدد سنوات دراسة الولد، وأن النسبة المتبقية و البالغة 5.59% تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة.

## 2. تمارين مقترحة

**التمرين الأول:** لدراسة الدالة التالية $y$ والعوامل المؤثرة $X_1$ و $X_2$ تحصلنا على النتائج التالية:

| الدولة | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 6 | 8 | 8 | 7 | 7 | 12 | 9 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 9 | 10 | 11 |
| $x_i$ | 9 | 10 | 8 | 7 | 10 | 4 | 5 | 5 | 6 | 8 | 7 | 4 | 9 | 5 | 8 |

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u_t$$

$$Y = 5.47 + 0.086 X_1 + 0.414 X_2 + u_t$$

$R^2 = 0.90 \qquad n = 20 \backslash$

$RSS = 129.025 \qquad \sum y^2 = 1292.5 \quad \sum x_1^2 = 5362 \quad \sum x_2^2 = 4482 \quad \sum x_1 x_2 = 482$

$\sigma_{xy} = 2.754$

**المطلوب:**

. اختبر معنوية العلاقة بين المتغيرات y والعوامل المؤثرة $X_1$ و $X_2$، عند مستوى 5%.

. حدد معامل التحديد المصحح $R^2$.

**التمرين الثاني:** يرغب مدير مؤسسة في مضاعفة انتاجه ولاتخاذ القرار لجأ الى جمع بيانات تتعلق بعدد ساعات العمل والكمية المنتجة، كما هو مبين في الجدول التالي:

| عدد ساعات العمل | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| الكمية المنتجة | 3 | 4 | 2 | 6 | 8 |

**المطلوب:**

. مثل بيانيا شكل لوحة الانتشار وعلق عليه.

. قدر معالم النموذج بطريقة المربعات الصغرى، وفسر تلك النتائج.

. اختبر فرضية العلاقة بين الكمية المطلوبة و السعر و الدخل عند مستوى 5% . .

. أوجد معامل التحديد وعلق على النتيجة.

**التمرين الثالث:** الجدول الموالي يمثل الدخل الحقيقي للفرد $y_i$ ( ألاف الدولارات) وقوة العمل في الزراعة $x_i$ في 15 دولة:

**المطلوب:**

. تقدير معادلة انحدار $Y_i$ على $X_i$. وفسر معالمها.

. اختبار المعنوية الاحصائية للمعالم عند مستوى 5% .

. ايجاد معامل التحديد.

**التمرين الرابع:** يوضح الجدل التالي المشاهدات لنموذج يحتوي على متغيرين مستقلين و متغير تابع:

| $y$ | $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 2 | 45 |
| 14 | 1 | 43 |
| 10 | 3 | 43 |
| 16 | 6 | 47 |
| 14 | 7 | 42 |
| 19 | 8 | 41 |
| 21 | 8 | 32 |
| 19 | 5 | 33 |
| 21 | 5 | 41 |
| 16 | 8 | 38 |
| 19 | 4 | 32 |
| 21 | 9 | 31 |
| 25 | 12 | 35 |
| 21 | 7 | 29 |

**المطلوب:**

. حدد نموذج الانحدار حسب شكله المصفوفي.

. قدر معلمات النموذج.

ما مقدار ما يفسره المتغيرين المستقلين من التغير الحاصل في المتغير التابع.

# الفصل الخامس :الطرق اللامعلمية

## أهداف الفصل:

ينتظر من الطالب بعد قراءة هذا الفصل أن يصبح قادرا على:

- استخدام اختبار كاي مربع في حالة العينة الواحدة.
- تطبيق اختبار مان-ويتني في حالة العينتين المستقلتين.
- استخدام اختبار ولكوكسون في حالة العينتين المترابطتين.

## محتوى الفصل:

I. الاختبار اللامعلمي في حالة العينة الواحدة.

II. الاختبارات اللامعلمية في حالة عينتين.

1. في حالة العينتين المستقلتين
2. في حالة العينتين المترابطتين.

III. تمارين تطبيقية.

1. تمارين محلولة.
2. تمارين مقترحة.

**تمهيد:**

ان الطرق اللامعلمية هي نوع من الأساليب الاحصائية الاستدلالية التي يمكن باستخدامها التوصل الى نتائج بخصوص المجتمع، بغض النظر عن نوع التوزيع الاحتمالي لمجتمع العينة أو الطريقة التي سحبت بها العينة أو نوع البيانات التي يمكن الحصول عليها. فهي تتطلب عدد أقل من الفروض ، كما أنها أسهل في التطبيق اذ تستخدم خصوصا اذا كانت البيانات في صورة رتب و ليست في صورة مقاييس كمية .

ولقد تم التوصل في الحقبة الاخيرة الى طرق لامعلمية عديدة و مطورة ولها أغراض متعددة ، بحيث يستخدم أكثر من اسلوب منها في نفس المجال و لنفس الحالة و ضمن نفس الشروط .لذا ، يفضل علماء التحليل الاحصائي استخدام أكثر من اسلوب واحد في التحليل اذا أمكن ذلك ، للاستفادة مما يقدمه كل تحليل و الابتعاد قدر الامكان عن نواحي الضعف في التحليلات و لتوثيق النتائج أكثر.

## I. الاختبار اللامعلمي في حالة العينة الواحدة:

في العديد من الحالات قد يضطر الباحث للتعامل مع حالة عينة منفردة واحدة ، أين يكون اختيارها بشكل قد يكون عشوائي أو غير عشوائي ، ثم يحاول اختبار تمثيلة العينة للمجتمع المسحوبة منه . ومن أشهر الاختبارات اللامعلمية في هذا النوع من العينات اختبار كاي مربع.

### ❖ اختبار كاي مربع (Chi- Square):

يعد اختبار كاي مربع أحد الاختبارات اللامعلمية للعينة الواحدة ، والذي يستخدم لمقارنة التكرارات الملاحظة مع التكرارات المتوقعة، حيث التكرارات الملاحظة هي التي نحصل عليها عن طريق الملاحظة او التجربة، اما التكرارات المتوقعة فهي تكرارات تحسب على اساس نظري لا علاقة لها بملاحظة البيانات التي نريد دراستها. و تكون صيغة الفرضية المراد اختبارها هي:

$$\begin{cases} H_0: \text{عدم وجود فروق معنوية بين التكرارات الملاحظة والتكرارات المتوقعة.} \\ H_1: \text{وجود فروق معنوية بين التكرارات الملاحظة والتكرارات المتوقعة.} \end{cases}$$

- **شكل الاختبار:**

تكون الصيغة الرياضية لهذا الاختبار كالتالي:

$$x_c^2 = \frac{\sum(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

حيث:

$x_c^2$: هي قيمة $X^2$ المحسوبة عند مستوى معنوية معين و درجة حرية تعطى بالعلاقة: $df=c-1$ ( حيث c هو عدد الاختيارات)

$f_0$ : تمثل التكرارات الملاحظة.

$f_e$ : تمثل التكرارت المتوقعة و التي تساوي عدد أفراد العينة / عدد الاختيارات

- **قرار الاختبار:**

بعد حساب قيمة ($x^2$) يتم مقارنتها مع القيمة الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند درجات حرية (c-1) و مستوى معنوية (1% أو 5%) لتحديد قبول أو رفض الفرض الصفري ، فاذا كانت:

- قيمة $x^2$ المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل، وهذا يعني وجود فروق ذات دلالة احصائية بين التكرارات الملاحظة و التكرارات المتوقعة .
- قيمة $x^2$المحسوبة أصغر من القيمة الجدولية يتم رفض الفرض البديل وقبول الفرض الصفري. وهذا يعني عدم وجود فروق ذات دلالة احصائية بين التكرارات الملاحظة و التكرارات المتوقعة .

**مثال:** الجدول الموالي يوضح آراء 40 طالبا حول طريقة التدريس التي يتبعها الاستاذ معهم :

| الموقف | موافق | غير موافق | المجموع |
|---|---|---|---|
| التكرار | 28 | 12 | 40 |

المطلوب: حساب قيمة كاي مربع مع بيان دلالتها احصائي عند مستوى دلالة 0.05.

**الحل:**

✓ نحسب التكرار المتوقع :

$$f_e = \frac{40}{2} = 20$$

✓ بالاعتماد على الصيغة الرياضية للاختبار فإننا نحتاج الاحصاءات التالية:

| الموقف | $f_0$ | $f_e$ | $(f_0 - f_e)^2$ |
|---|---|---|---|
| موافق | 28 | 20 | 64 |
| غير موافق | 12 | 20 | 64 |
| المجموع | 40 | | 128 |

وبتطبيق القانون نجد:

$$x_c^2 = \frac{\sum(f_0 - f_e)^2}{f_e} = \frac{64}{20} + \frac{64}{20} = 6.4$$

بما أن قيمة كاي مربع المحسوبة و البالغة 6.4 أكبر من قيمة كاي مربع الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (1) و البالغة 3.84، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل، ما يعني أن كاي مربع دالة احصائيا عند مستوى دلالة 5% ، أي هناك فروق ذات دلالة احصائية بين مواقف المستجوبين نحو طريقة تدريس الأستاذ.

## II. الاختبارات اللامعلمية في حالة عينتين:

### 1. في حالة العينتين المستقلتين:

تمثل العينات المستقلة بشكل عام قياسات مجموعة وحدات احصائية معينة عن وحدات أخرى مجموعة أخرى أو عدة مجموعات ، أين تتم المقارنة بين هذين القياسين بغرض فهم تأثير المتغير الاحصائي المراد قياسه أو التدليل على امكانية وجود فروق من عدمها بين العينتين المستقلتين . من أشهر الاختبارات لهذا النوع من العينات اختبار مان –ويتني.

#### ❖ اختبار مان– ويتني( Man– Whitney) في حالة عينتين مستقلتين:

يعد اختبار مان–ويتني من أشهر الاختبارات اللامعلمية للعينات المستقلة ، والذي يسعى الى فحص الفروق بين مجموعتين ، كما أنه اختبار مناظر لاختبار (t) المعلمي للعينات المستقلة و بديل عنه في حالة عدم استيفاء البيانات لكافة افتراضاته.

ويستند اختبار مان–ويتني على أنه اذا كان ترتيب مجموعتين دمجتا معا كأنهما مجموعة واحدة ، فانه سيكون هناك تمازج بين رتب المجموعتين ، و لكن اذا تفوقت احدى المجموعتين على الأخرى فان معظم رتب المجموعة المتفوقة ستكون أعلى من المجموعة الدنيا . لذا فان قيمة (U) تحسب بعد دمج رتب المجموعتين معا ثم يحسب عدد الرتب الخاصة بالمجموعة العليا والتي تقع تحت رتب المجموعة الدنيا.

نظرا لأن الاختبار قائم على رتب البيانات ، فان الفرض الصفري ينص على عدم وجود فروقات بين متوسطي العينتين أما الفرض البديل فينص على وجود فروقات بين متوسطي العينتين ، أي أن :[1]

$$\begin{cases} H_0 : M_1 = M_2 \\ H_1 : M_1 \neq M_2 \end{cases}$$

- **شكل الاختبار:**

يعتمد هذا الاختبار على الخطوات التالية :[2]

- دمج العينتين بحيث تصبحان عينة واحدة مكونة من $(n_1+ n_2)$ مشاهدة، و ايجاد الرتب للقيم بحيث تعطى الرتبة 1 لأقل مشاهدة و الرتبة 2 لثاني أقل مشاهدة ...... و الرتبة $(n_1+ n_2)$ لأعلى مشاهدة.
- ترتيب الرتب القيم لكل العينة ترتيبا تصاعديا .
- تطبيق صيغة الاختبار التالية لكل عينة :

$$U_i = n_1 * n_2 + \frac{(n_i)(n_i+1)}{2} - R_i \qquad i = (1,2)$$

حيث:

---

[1] عدنان عوض، ***الاحصاء التطبيقي***، الشركة العربية المتحدة للتسويق و التوريدات ، القاهرة، 2009، ص 240

[2] سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة ، ***مبادئ الاحصاء الوصفي و الاستدلالي*** ، ط2، دار المسيرة ، الأردن، 2010، ص 35

$n_1, n_2$ : يمثلان أحجام العينتين

$R_i$: يمثل مجموع رتب القيم

- اختيار القيمة الأصغر بين $U_1$ و $U_2$ لإيجاد قيمة الاحصائي المحسوبة ، أي $U_c = \mathbf{Min}\,(U_1, U_2)$.
- تحديد قيمة النقطة الحرجة $U_0$ من الجداول الاحصائية لـ $U$.

- **قرار الاختبار:**

بعد حساب قيمة ($U_c$) يتم مقارنتها مع القيمة الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها ، فاذا كانت:

- قيمة U المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية يتم قبول الفرض الصفري ، وهذا يعني عدم وجود فروق ذات دلالة احصائية بين متوسطي العينتين.
- قيمة U المحسوبة أصغر من القيمة الجدولية يتم رفض الفرض الصفري ، وهذا يعني وجود فروق ذات دلالة احصائية بين متوسطي العينتين.

**ملاحظة:**

**في حالة تساوي مشاهدتين أو أكثر فإننا نعطي رتبا للمشاهدات المتساوية عل فرض أنها غير متساوية ثم نأخذ الوسط الحسابي لهذه الرتب و نعتبره رتبة لكل مشاهدة.**

**قاعدة :**

**في حالة العينات الكبيرة ( $n_1,n_2>10$ فانه يتم استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع U حيث :**

$$Z_c = \frac{(U) - E(U)}{\sigma_U} \rightarrow N(0,1) \qquad E(U) = \frac{n_1 n_2}{2} \qquad \sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

**مثال:** تمثل البيانات التالية أربعة أنواع من المنتجات الجديدة من مصنعين مختلفين:

| المنتجات | الأول | الثاني | الثالث | الرابع |
|---|---|---|---|---|
| المصنع -1- | 390 | 95 | 3 | 35 |
| المصنع -2- | 80 | 12 | 2 | 1 |

**المطلوب:** التحقق من وجود فرق ذو بين متوسطي الانتاج من المصنع -1- و المصنع -2- عند مستوى دلالة 5% باستخدام اختبار مان ويتني.

**الحل:**

نريد اختبار الفرض الصفري ($H_0$): لا يوجد فرق بين متوسطي انتاج المصنعين مقابل الفرض البديل ($H_1$) : يوجد فرق بين متوسطي انتاج المصنعين على مستوى الدلالة $\alpha$=0.05 :

✓ رتب المشاهدات العينتين:

نفترض أن المصنع -1- يمثل $n_1$ و المصنع -2- يمثل $n_2$:

| رتب المصنع -1- | 8 | 7 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| رتب المصنع-2- | 6 | 4 | 2 | 1 |

لهذا يكون مجموع رتب المشاهدات في العينة الأولى و الثانية على الترتيب كما يلي:

$R_1$= 8+7+3+5= 23

$R_2$= 6+4+2+1= 13

✓ ايجاد قيمة دالة الاختبار:

بتطبيق صيغة اختبار U لكل عينة نجد :

$$U_1 = n_1 * n_2 + \frac{(n_1)(n_1+1)}{2} - R_1 = 4*4 + \frac{4(4+1)}{2} - 23$$

**$U_1$= 3**

$$U_2 = n_1 * n_2 + \frac{(n_2)(2+1)}{2} - R_2 = 4*4 + \frac{4(4+1)}{2} - 13$$

**$U_2$= 13**

و بالتالي فان: **$U_c$ = Min ( $U_1$, $U_2$ ) = 3**

✓ تحديد قيمة النقطة الحرجة $U_0$ :

بما أن $n_1$=4 , $n_2$=4 و $\alpha/2$= 0.025 فإننا نحصل على $U_0$= 1

✓ اتخاذ القرار:

بما أن قيمة $U_c$ المحسوبة و البالغة 3 أكبر من قيمة Uالجدولية عند مستوى معنوية 5% و البالغة 1 ، فانه يتم قبول الفرض الصفري ما يعني عدم وجود فروق ذات دلالة احصائية بين متوسطي المصنعين .

## 2. في حالة عينتين مترابطتين:

تمثل العينات المترابطة بشكل عام تلك الحالة التي تكون فيها مجموعة من الوحدات الاحصائية لها نوعين أو أكثر من القيم أو الدرجات ، بمعنى أن كلا القياسين يعودان لنفس الأفراد ، وهنا يكمن معنى الترابط . من أشهر الاختبارات اللامعلمية لهذا النمط من البيانات اختبار ولكوكسون.

## ❖ اختبار ولكوكسون ( Wilcoxon):

يعد اختبار ولكوكسون من الاختبارات اللامعلمية في حالة العينات المترابطة حيث يكون شكل البيانات ترتيبيا ، وأين تكون هذه البيانات بشكل مزدوج لأفراد العينة المقصودة، ساعيا بذلك الى فحص الفروق في متغير تابع متصل و التي تعزى الى متغير مستقل يتكون من فئتين مرتبطتين . من افتراضاته أن:

- يتكون المتغير المستقل من فئتين فقط( مجموعتين مرتبطتين اختبار قبلي و اختبار بعدي، أو الازواج المتناظرة أو قياس سمتين لمجموعة واحدة) .
- ألا تكون القيم المتشابهة في القياسين كثيرة ، وجب ألا يقل عدد القيم غير المتشابهة عن العدد (16).
- يتم اختيار العينة عشوائيا، وأن تكون ممثلة لمجتمعها.

- **شكل الاختبار:**

يعتمد هذا الاختبار على الخطوات التالية:[1]

- حساب فروق المشاهدات المتناظرة في العينتين و التي يرمز لها بالرمز $d_i$ حيث :

$$d_i = x_i - y_i \qquad i=1,2 \ldots .n$$

- ترتيب القيم المطلقة للفروق $|d_i|$ ترتيبا تصاعديا .
- تثبيت اشارة الفروق $d_i$ أمام رتب القيم المطلقة للفروق $|d_i|$ .
- تجميع القيم الموجبة معا أين يرمز لها بالرمز $W^+$، والقيم السالبة معا والتي تمثل بالرمز $W^-$.
- اختيار أقل قيمة من بين القيمتين $W^+$ و $W^-$ لتمثل القيمة المحسوبة لهذا الاختبار ، أي :

$$W_c = \text{Min}\,(W^+, W^-)$$

- **قرار الاختبار:**

بعد حساب قيمة ($W_c$) يتم مقارنتها مع القيمة الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند مستوى معنوية محدد ، فاذا كانت:

- قيمة Wالمحسوبة أكبر من القيمة الجدولية يتم قبول الفرض الصفري ، وهذا يعني عدم وجود فروق ذات دلالة احصائية بين العينتين.
- قيمة Wالمحسوبة أصغر من القيمة الجدولية يتم رفض الفرض الصفري ، وهذا يعني وجود فروق ذات دلالة احصائية بين العينتين.

[1] عفاف علي حسن الدش، *الاحصاء التطبيقي*، ط3، جهاز نشر و توزيع الكتاب الجامعي ، مصر ، 2006، ص ص 284، 285

ملاحظة:

في حالة الفروق المتشابهة فانه يتم اعطاء درجات وسيطية ، والتي تحسب بقسمة عدد الرتب على عدد القيم المتشابهة .

**قاعدة :**

**اذا كان حجم العينة أكبر من 15 فانه يتم استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لاختبار ولكوكسون حيث :**

$$Z_c = \frac{(W) - u_w}{\sigma_w} \qquad u_w = \frac{n(n+1)}{4} \qquad \sigma_w = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

**مثال:** ترغب احدى المؤسسات في اختبار الفرض القائل أنه يجد تأثير للدورات التدريبية على متوسط كفاءة العاملين . فأخذت عينة مكونة من 10 عامل و قيس مستوى كفاءة كل منهم قبل وبعد تلقيهم للدورات التدريبية فكانت على النحو التالي:

| القياس القبلي | 6.3 | 6.7 | 5.5 | 6.4 | 4.6 | 4.5 | 5.6 | 7.8 | 6.5 | 5.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| القياس البعدي | 6.5 | 7 | 6 | 5.9 | 5.3 | 4.6 | 7 | 8.4 | 6.9 | 6.3 |

المطلوب: اختبار الفرض القائل بأنه لا توجد فرق ذات دلالة احصائية لأثر الدورات التدريبية على متوسط كفاءة العامل عند مستوى 5%.

**الحل:**

لاختبار الفرضية نحتاج الى الجدول التالي الذي يحسب قيمتي $W^+$ و $W^-$ :

| $x_i$ | $y_i$ | $d_i$ | $\lvert d_i\rvert$ | ترتيب $\lvert d_i\rvert$ | ترتيب $\lvert d_i\rvert$ ذوالاشارة |
|---|---|---|---|---|---|
| 6.3 | 6.5 | -0.2 | 0.2 | 2 | -2 |
| 6.7 | 7 | -0.3 | 0.3 | 3 | -3 |
| 5.5 | 6 | -0.5 | 0.5 | 5.5 | -5.5 |
| 6.4 | 5.9 | +0.5 | 0.5 | 5.5 | +5.5 |
| 4.6 | 5.3 | -0.7 | 0.7 | 8 | -8 |
| 4.5 | 4.6 | -0.1 | 0.1 | 1 | -1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -10 | 10 | 1.4 | -1.4 | 7 | 5.6 |
| -7 | 7 | 0.6 | -0.6 | 8.4 | 7.8 |
| -4 | 4 | 0.4 | -0.4 | 6.9 | 6.5 |
| -9 | 9 | 0.8 | -0.8 | 6.3 | 5.5 |

من الجدول أعلاه نجد أن :

$$W^{-}= -49.5 \text{ و } W^{+}= 5.5 \Rightarrow W = Min\ (-49.5\ ,\ +5.5)= 5.5$$

بما أن قيمة W الجدولية عند مستوى دلالة 0,05 و n=12 اكبر من القيمة المحسوبة لـ w فانه يتم رفض الفرض الصفري القائل بعدم وجود فرق ذات دلالة احصائية لأثر الدورات التدريبية على متوسط كفاءة العامل.

## III. تمارين تطبيقية:

### 1. تمارين محلولة:

**التمرين الأول:** وجد محل تجاري من خبرته الماضية أن 30 % من التلفزيونات المباعة من الحجم الصغير، 40% متوسط و 30% كبير. لتحديد حجم المخزون الواجب الاحتفاظ به، أخذ المدير عينة عشوائية من 100من المبيعات الحديثة فوجد أن منها 40صغير، 40متوسط، و20 كبير.

**المطلوب:** باستخدام مستوى معنوية 5% ، هل يمكن اعتبار نمط المبيعات في الماضي لازال سائدا أم لا.

**التمرين الثاني:** الجدول الموالي يوضح آراء 60فردا حول موضوع المشاركة السياسية:

| الموقف | موافق | غير موافق | المجموع |
|---|---|---|---|
| التكرار | 40 | 20 | 60 |

**المطلوب:** حساب قيمة كاي مربع مع بيان مدى دلالتها احصائيا عند مستوى 5% .

**التمرين الثالث:** لإجراء اختبار لمجموعة كبيرة من الطلبة ، قام الاستاذ بوضع مجموعتين من الأسئلة أعطى المجموعة الأولى للطلبة الذين يجلسون على المقاعد ذات الأرقام الفردية ، و المجموعة الثانية للطلبة الذين يجلسون على المقاعد ذات الأرقام الزوجية. والجدول التالي يعرض العلامات من كلا المجموعتين التي قام الأستاذ برصدها:

| المجموعة الأولى | المجموعة الثانية |
|---|---|
| 52 | 72 |
| 78 | 62 |
| 56 | 91 |
| 90 | 88 |
| 65 | 90 |
| 86 | 74 |

| | |
|---|---|
| 98 | 64 |
| 80 | 90 |
| 81 | 49 |
| 71 | 78 |

**المطلوب**: هل يوجد فروق ذات دلالة احصائية بين مجموعتي الأسئلة عند مستوى دلالة 5%.

**التمرين الرابع**: تم تسميد 18 شتلة من أشتال الطماطم بالسماد الكيماوي ، وتسميد 15 شتلة أخرى بالسماد الطبيعي . وحين تم وزن انتاج كل شتلة كانت البيانات ( مقدرة بالكيلوغرام ) كما يلي:

| انتاج أشتال السماد الطبيعي | انتاج أشتال السماد الكيماوي |
|---|---|
| 1.63 | 1.53 |
| 1.24 | 1.05 |
| 1.32 | 1.54 |
| 1.35 | 1.47 |
| 1.08 | 1.39 |
| 1.45 | 1.31 |
| 1.19 | 1.57 |
| 1.51 | 1.35 |
| 1.47 | 1.25 |
| 1.36 | 1.58 |
| 1.42 | 1.56 |
| 1.59 | 1.33 |
| 1.37 | 1.51 |
| 1.33 | 1.49 |
| 1.59 | 1.49 |
| | 1.08 |
| | 1.11 |
| | 1.56 |

**المطلوب**: هل تعطي هذه البيانات دليلا كافيا على أن السماد الكيماوي يعطي انتاجا أعلى من السماد الطبيعي؟.

**التمرين الخامس**: بغرض معرفة أثر المحفزات على أداء أفراد وحدة ادارية تم اعطاء درجات لكل فرد قبل و بعد منح هذه المحفزات ، حيث كانت النتائج كما يلي:

| القياس القبلي | القياس البعدي |
|---|---|
| 20.4 | 21.7 |
| .25.4 | 26.3 |
| 25.6 | 26.8 |
| 25.6 | 28.1 |
| 26.6 | 26.2 |
| 28.6 | 27.3 |
| 28.7 | 29 .5 |
| 29 | 32 |
| 29.8 | 30.9 |
| 30.5 | 32.3 |
| 30.9 | 32.3 |
| 31.1 | 31.7 |

**المطلوب**: التحقق فيما اذا كانت هناك فروق ذات دلالة احصائية لأثر المحفزات على أداء الأفراد عند مستوى %5.

**الحلول**:

**حل التمرين الأول**:

✓ تلخيص المعطيات:

| النمط/ حجم الشاشة | كبير | متوسط | صغير | الاجمالي |
|---|---|---|---|---|
| التكرارات المشاهدة | 20 | 40 | 40 | 100 |
| التكرارات المتوقعة | 30 | 40 | 30 | 100 |

نفرض أن:

$H_0$: التكرارات المشاهدة لا تختلف معنويا عن التكرارات المتوقعة.

$H_1$: التكرارات المشاهدة تختلف معنويا عن التكرارات المتوقعة.

✓ تطبيق الاختبار:

وبتطبيق القانون نجد:

$$x_c^2 = \frac{\sum(f_0 - f_e)^2}{f_e} = \frac{(20-30)^2}{30} + \frac{(40-40)^2}{40} + \frac{(40-30)^2}{30} = 5.83$$

بما أن قيمة كاي مربع المحسوبة و البالغة 5.83 أقل من قيمة كاي مربع الجدولية عند مستوى معنوية %5 ودرجة حرية (2) و البالغة 5.94، فانه يتم قبول الفرض الصفري الخاص بعدم اختلاف التكرارات المشاهدة عن

التكرارات المتوقعة عند مستوى 5% . و بالتالي فان نمط المبيعات في الماضي لا زال سائدا يمكن لصاحب المحل أن يعتمد عليه في تحديد المخزون من هذا المنتج.

**حل التمرين الثاني:**

✓ نحسب التكرار المتوقع :

$$f_e = \frac{60}{2} = 30$$

✓ بالاعتماد على الصيغة الرياضية للاختبار فإننا نحتاج الاحصاءات التالية:

| الموقف | $f_0$ | $f_e$ | $(f_0 - f_e)^2$ |
|---|---|---|---|
| موافق | 40 | 30 | 100 |
| غير موافق | 20 | 30 | 100 |
| المجموع | 60 | | 200 |

وبتطبيق القانون نجد:

$$x_c^2 = \frac{\sum(f_0 - f_e)^2}{f_e} = \frac{100}{30} + \frac{100}{30} = 6.66$$

بما أن قيمة كاي مربع المحسوبة و البالغة 6.66أكبر من قيمة كاي مربع الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (1) و البالغة 3.84، فانه يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل، ما يعني أن كاي مربع دالة احصائيا عند مستوى دلالة 5% ، أي هناك فروق ذات دلالة احصائية بين مواقف المستجوبين نحو ألمشاركة السياسية.

**حل التمرين الثالث:**

✓ ايجاد دالة اختبار U:

الجدول التالي يبين رتب المشاهدات للمجموعتين:

| رتب المجموعة الأولى | رتب المجموعة الثانية |
|---|---|
| 2 | 8 |
| 10,5 | 4 |
| 3 | 19 |
| 17 | 15 |
| 6 | 17 |
| 14 | 9 |

| | |
|---|---|
| 20 | 5 |
| 12 | 17 |
| 13 | 1 |
| 7 | 10.5 |
| $R_2$=124 | **$R_1$=86** |

وبالتالي نجد :

$$U_1 = n_1 * n_2 + \frac{(n_1)(n_1+1)}{2} - R_1 = 10 * 10 + \frac{10(10+1)}{2} - 86$$

**$U_1$= 69**

$$U_2 = n_1 * n_2 + \frac{(n_2)(2+1)}{2} - R_2 = 10 * 10 + \frac{10(10+1)}{2} - 124$$

**$U_2$= 31**

و منه : **$U_c$ = Min ( $U_1$, $U_2$ ) = 31**

✓ تحديد قيمة النقطة الحرجة $U_0$ :

بما أن $n_1$=10, n2=10 و $\alpha/2$= 0.025 فإننا نحصل على $U_0$= 28

✓ اتخاذ القرار:

بما أن قيمة$U_c$ المحسوبة و البالغة 31 أكبر من قيمة Uالجدولية عند مستوى معنوية 5% و البالغة 28 ، فانه يتم قبول الفرض الصفري ما يعني عدم وجود فروق ذات دلالة احصائية بين مجموعتي الأسئلة.

## حل التمرين الرابع:

نفرض أن $H_0$ : لا يوجد فرق بين السماد الكيماوي و السماد الطبيعي عند مستوى دلالة 0,05.

$H_1$ : يوجد فرق بين السماد الكيماوي و السماد الطبيعي عند مستوى دلالة 0,05..

✓ ايجاد دالة اختبار U:

الجدول التالي يبين رتب المشاهدات للعينتين:

| رتب مشاهدات السماد الطبيعي | رتب مشاهدات السماد الكيماوي |
|---|---|
| 33 | 25 |
| 6 | 1 |
| 9 | 26 |
| 12.5 | 20.5 |
| 2.5 | 16 |
| 19 | 8 |
| 5 | 29 |

| | |
|---|---|
| 23.5 | 12.5 |
| 20.5 | 7 |
| 14 | 30 |
| 18 | 27.5 |
| 31.5 | 10.5 |
| 15 | 23.5 |
| 10.5 | 22 |
| 31.5 | 17 |
| | 2.5 |
| | 4 |
| | 27.5 |
| $R_2$= 251.5 | $R_1$= 309.5 |

وبالتالي نجد :

$$U_1 = n_1 * n_2 + \frac{(n_1)(n_1+1)}{2} - R_1 = 18 * 15 + \frac{18(18+1)}{2} - 309.5$$

$$\mathbf{U_1= 131.5}$$

$$U_2 = n_1 * n_2 + \frac{(n_2)(2+1)}{2} - R_2 = 18 * 15 + \frac{15(15+1)}{2} - 251.5$$

$$\mathbf{U_2= 138.5}$$

و منه :

$$\mathbf{U_c = Min\,(U_1, U_2) = 131.5}$$

✓ تحديد قيمة النقطة الحرجة $U_0$ :

بما أن $n_1, n_2 > 10$ فاننا نقرب توزيع U بالتوزيع الطبيعي . وعليه فان النقطة الحرجة $U_0$ تحسب بالعلاقة التالية:

$$U_0 \;= \frac{n_1 n_2}{2} - z_\alpha \sqrt{\frac{n_1 n_2\,(n_1+n_2+1\,)}{12}} = \frac{18*15}{2} - 1.645\sqrt{\frac{18*15*34}{12}}$$

$$\mathbf{U_0= 90}$$

✓ اتخاذ القرار:

بما أن قيمة$U_c$ المحسوبة و البالغة 131.5 أكبر من قيمة النقطة الحرجة $U_0$ عند مستوى معنوية 5% و البالغة 90، فانه يتم قبول الفرض الصفري، وهذا يعني أنه لا نستطيع القول أن السماد الكيماوي يعطي انتاجا أعلى من السماد الطبيعي على مستوى الدلالة $\alpha$=0.05

**حل التمرين الخامس:**

لاختبار الفرضية نحتاج الى الجدول التالي الذي يحسب قيمتي $W^+$ و $W^-$ :

| $x_i$ | $y_i$ | $d_i$ | $\lvert d_i \rvert$ | ترتيب $\lvert d_i \rvert$ | ترتيب $\lvert d_i \rvert$ ذوالاشارة |
|---|---|---|---|---|---|
| 20.4 | 21.7 | -1.3 | 1.3 | 7.5 | -7.5 |
| .25.4 | 26.3 | -0.9 | 0.9 | 4 | -4 |
| 25.6 | 26.8 | -1.2 | 1.2 | 6 | -6 |
| 25.6 | 28.1 | -2.5 | 2.5 | 11 | -11 |
| 26.6 | 26.2 | 0.4 | 0.4 | 1 | 1 |
| 28.6 | 27.3 | 1.3 | 1.3 | 7.5 | 7.5 |
| 28.7 | 29 .5 | -0.8 | 0.8 | 3 | -3 |
| 29 | 32 | -3 | 3 | 12 | -12 |
| 29.8 | 30.9 | -1.1 | 1.1 | 5 | -5 |
| 30.5 | 32.3 | -1.8 | 1.8 | 10 | -10 |
| 30.9 | 32.3 | -1.4 | 1.4 | 9 | -9 |
| 31.1 | 31.7 | -0.6 | 0.6 | 2 | -2 |

من الجدول أعلاه نجد أن :

$$W^- = -69 \text{ و} W^+ = 8.5 \Rightarrow W = \text{Min}\,( -49.5, +5.5) = 8.5$$

بما أن قيمة W الجدولية عند مستوى دلالة 0,05 و n=12 اكبر من القيمة المحسوبة لـ w فانه يتم رفض الفرض الصفري وبالتالي وجود أثر للمحفزات على أداء الأفراد.

## 2. تمارين مقترحة:

**التمرين الأول:** أراد أستاذ أن يعرف اليوم الذي يفضله طلابه للذهاب الى المكتبة للمطالعة ، وكانت النتائج كالتالي:

| اليوم | السبت | الأحد | الاثنين | الثلاثاء | الاربعاء | الخميس |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 6 | 7 | 5 | 7 | 15 | 20 |

**المطلوب:** هل هناك فروق دالة احصائيا بين تفضيل الطلاب للأيام ، اختبر ذلك؟

**التمرين الثاني:** أرادت ادارة الجامعة التعرف على امكانية تفضيل الطلبة الجدد للفرع المقترحة ، فاختارت عينة عشوائية مكونة من 60طالبا و اقترحت عليها فرعي العلوم الاجتماعية و العلوم الانسانية ، فكانت النتائج كالتالي:

| التكرار | الفرع |
|---|---|
| 37 | العلوم الاجتماعية |
| 23 | العلوم الانسانية |
| 60 | المجموع |

**المطلوب**: هل هناك فروق ذات دلالة احصائية في اختيارات الطلبة الجدد عند مستوى دلالة 5%.

**التمرين الثالث**: أجريت تجربة لمقارنة قوة تحمل نوعين من الخيط و كانت النتائج كما يلي:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| النوع **A** | 5.21 | 5.43 | 5.35 | 5.51 | 5 .39 | 5.17 | 5.48 | 5.29 | |
| النوع **B** | 5.49 | 5.67 | 5.50 | 5.52 | 5.53 | 5.51 | 5.39 | 5.62 | 5.66 |

**المطلوب**: هل نستطيع أن نستنتج أن هناك فرقا ذا دلالة احصائية على مستوى دلالة 1% بين قوة تحمل النوعين؟

**التمرين الرابع**: في دراسة حول فعالية دواء لعلاج مرض باركينسون ، قام باحث بتجربته على عشرة مرضى ، اين قام بقياس الحركات لكل مريض قبل أخذ الدواء بعد تناوله بأسبوع . فكانت النتائج بالشكل التالي:

| **رقم المريض** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **قبل العلاج** | 85 | 70 | 40 | 65 | 80 | 75 | 55 | 20 | 58 | 45 |
| **بعد العلاج** | 75 | 50 | 50 | 40 | 20 | 65 | 40 | 25 | 47 | 33 |

**المطلوب**: هل هناك دلالة احصائية على فعالية الدواء عند مستوى 5%؟.

## المراجع:

### المراجع باللغة العربية:


1. حسين علي بخيت، سحر فتح الله ، ***الاقتصاد القياسي***، دار اليازوري، الأردن، 2006.
2. ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغباري، ***بحوث العمليات/ سلسلة ملخصات شوم***، ط2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر ، 2004،.
3. سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة ، ***مبادئ الاحصاء الوصفي و الاستدلالي*** ، ط2، دار المسيرة ، الأردن، 2010.
4. سهيلة عبد الله سعيد، ***الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات***، ط1 ،دار الحامد للنشر و التوزيع، عمان، 2007.
5. صبحي المحمد، ابراهيم نائب، ***بحوث العمليات*** ، منشورات جامعة حلب، سوريا، 2008.
6. عبد الستار أحمد محمد الآلوسي ، ***أساليب بحوث العمليات ، الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار***، ط1، دار القلم للنشر و التوزيع، الامارات العربية المتحدة، 2003.
7. عدنان عوض، ***الاحصاء التطبيقي***، الشركة العربية المتحدة للتسويق و التوريدات ، القاهرة، 2009.
8. عفاف علي حسن الدش، ***الاحصاء التطبيقي***، ط3، جهاز نشر و توزيع الكتاب الجامعي ، مصر ، 2006.
9. علي العلاونة ، محمد عبيدات ،عبد الكريم عواد ، ***بحوث العمليات في العلوم التجارية*** , ط1، دار المستقبل للنشر و التوزيع ، الأردن، 2000.
10. محمد دباس الحميد، ***البرمجة الرياضية***، مديرية الكتب و المطبوعات الجامعية، سوريا، 2010.
11. محمد راتول، ***بحوث العمليات***، ط2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006.
12. محمد شيخي، ***طرق الاقتصاد القياسي، محاضرات و تطبيقات***، ط1، دار حامد، الأردن، 2011
13. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، ***بحوث العمليات و تطبيقاتها في ادارة الاعمال*** ،ط1، دار الوراق، الاردن، 2004.
14. نجم عبود نجم ، ***مدخل الى ادارة المشروعات*** ، ط1، دار الوراق ، الاردن، 2013.
15. هاري كلجيان، والاس أوس، ترجمة المرسي حجازي و عبد القادر عطية، ***مقدمة في الاقتصاد القياسي المبادئ و التطبيقات***، ط1، النشر العلمي و المطابع، جامعة الملك سعود، السعودية، 2001.

16. اليمين فالته، ***بحوث العمليات***،ط1، ايتراك للنشر و التوزيع، مصر، 2006.

المراجع باللغة الأجنبية:

17. Amor Farouk Benghezal , ***programmation linéaire***, 2édition, office des publications universitaires, Alger, 2006.

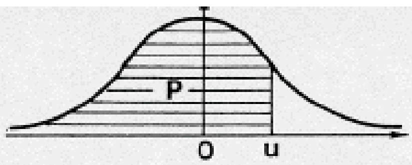
18. Gerald Baillargeon, ***programmation linéaire appliqué, outille à l'aide de décession*** , éditions SMG, Québec, 1996 .

19. Michel Nedzela, ***introduction a la science de la gestion, méthodes déterministes en recherche opérationnelle***, 2édition, presses de l'université du Québec , 1984.

20. Régis Bourbonnais, ***Econométrie, cours et exercices corrigés*** , 9édition , Dunod, Paris, 2015 .

# الـمـــــلاحـق

## ملحق01: جدول التوزيع الطبيعي



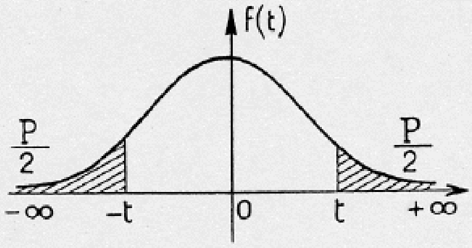

| P | 0,000 | 0,001 | 0,002 | 0,003 | 0,004 | 0,005 | 0,006 | 0,007 | 0,008 | 0,009 | 0,010 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | ∞ | 3,0902 | 2,8782 | 2,7478 | 2,6521 | 2,5758 | 2,5121 | 2,4573 | 2,4089 | 2,3656 | 2,3263 | 0,99 |
| 0,01 | 2,3263 | 2,2904 | 2,2571 | 2,2262 | 2,1973 | 2,1701 | 2,1444 | 2,1201 | 2,0969 | 2,0749 | 2,0537 | 0,98 |
| 0,02 | 2,0537 | 2,0335 | 2,0141 | 1,9954 | 1,9774 | 1,9600 | 1,9431 | 1,9268 | 1,9110 | 1,8957 | 1,8808 | 0,97 |
| 0,03 | 1,8808 | 1,8663 | 1,8522 | 1,8384 | 1,8250 | 1,8119 | 1,7991 | 1,7866 | 1,7744 | 1,7624 | 1,7507 | 0,96 |
| 0,04 | 1,7507 | 1,7392 | 1,7279 | 1,7169 | 1,7060 | 1,6954 | 1,6849 | 1,6747 | 1,6646 | 1,6546 | 1,6449 | 0,95 |
| 0,05 | 1,6449 | 1,6352 | 1,6258 | 1,6164 | 1,6072 | 1,5982 | 1,5893 | 1,5805 | 1,5718 | 1,5632 | 1,5548 | 0,94 |
| 0,06 | 1,5548 | 1,5464 | 1,5382 | 1,5301 | 1,5220 | 1,5141 | 1,5063 | 1,4985 | 1,4909 | 1,4833 | 1,4758 | 0,93 |
| 0,07 | 1,4758 | 1,4684 | 1,4611 | 1,4538 | 1,4466 | 1,4395 | 1,4325 | 1,4255 | 1,4187 | 1,4118 | 1,4051 | 0,92 |
| 0,08 | 1,4051 | 1,3984 | 1,3917 | 1,3852 | 1,3787 | 1,3722 | 1,3658 | 1,3595 | 1,3532 | 1,3469 | 1,3408 | 0,91 |
| 0,09 | 1,3408 | 1,3346 | 1,3285 | 1,3225 | 1,3165 | 1,3106 | 1,3047 | 1,2988 | 1,2930 | 1,2873 | 1,2816 | 0,90 |
| 0,10 | 1,2816 | 1,2759 | 1,2702 | 1,2646 | 1,2591 | 1,2536 | 1,2481 | 1,2426 | 1,2372 | 1,2319 | 1,2265 | 0,89 |
| 0,11 | 1,2265 | 1,2212 | 1,2160 | 1,2107 | 1,2055 | 1,2004 | 1,1952 | 1,1901 | 1,1850 | 1,1800 | 1,1750 | 0,88 |
| 0,12 | 1,1750 | 1,1700 | 1,1650 | 1,1601 | 1,1552 | 1,1503 | 1,1455 | 1,1407 | 1,1359 | 1,1311 | 1,1264 | 0,87 |
| 0,13 | 1,1264 | 1,1217 | 1,1170 | 1,1123 | 1,1077 | 1,1031 | 1,0985 | 1,0939 | 1,0893 | 1,0848 | 1,0803 | 0,86 |
| 0,14 | 1,0803 | 1,0758 | 1,0714 | 1,0669 | 1,0625 | 1,0581 | 1,0537 | 1,0494 | 1,0450 | 1,0407 | 1,0364 | 0,85 |
| 0,15 | 1,0364 | 1,0322 | 1,0279 | 1,0237 | 1,0194 | 1,0152 | 1,0110 | 1,0069 | 1,0027 | 0,9986 | 0,9945 | 0,84 |
| 0,16 | 0,9945 | 0,9904 | 0,9863 | 0,9822 | 0,9782 | 0,9741 | 0,9701 | 0,9661 | 0,9621 | 0,9581 | 0,9542 | 0,83 |
| 0,17 | 0,9542 | 0,9502 | 0,9463 | 0,9424 | 0,9385 | 0,9346 | 0,9307 | 0,9269 | 0,9230 | 0,9192 | 0,9154 | 0,82 |
| 0,18 | 0,9154 | 0,9116 | 0,9078 | 0,9040 | 0,9002 | 0,8965 | 0,8927 | 0,8890 | 0,8853 | 0,8816 | 0,8779 | 0,81 |
| 0,19 | 0,8779 | 0,8742 | 0,8705 | 0,8669 | 0,8633 | 0,8596 | 0,8560 | 0,8524 | 0,8488 | 0,8452 | 0,8416 | 0,80 |
| 0,20 | 0,8416 | 0,8381 | 0,8345 | 0,8310 | 0,8274 | 0,8239 | 0,8204 | 0,8169 | 0,8134 | 0,8099 | 0,8064 | 0,79 |
| 0,21 | 0,8064 | 0,8030 | 0,7995 | 0,7961 | 0,7926 | 0,7892 | 0,7858 | 0,7824 | 0,7790 | 0,7756 | 0,7722 | 0,78 |
| 0,22 | 0,7722 | 0,7688 | 0,7655 | 0,7621 | 0,7588 | 0,7554 | 0,7521 | 0,7488 | 0,7454 | 0,7421 | 0,7388 | 0,77 |
| 0,23 | 0,7388 | 0,7356 | 0,7323 | 0,7290 | 0,7257 | 0,7225 | 0,7192 | 0,7160 | 0,7128 | 0,7095 | 0,7063 | 0,76 |
| 0,24 | 0,7063 | 0,7031 | 0,6999 | 0,6967 | 0,6935 | 0,6903 | 0,6871 | 0,6840 | 0,6808 | 0,6776 | 0,6745 | 0,75 |
| 0,25 | 0,6745 | 0,6713 | 0,6682 | 0,6651 | 0,6620 | 0,6588 | 0,6557 | 0,6526 | 0,6495 | 0,6464 | 0,6433 | 0,74 |
| 0,26 | 0,6433 | 0,6403 | 0,6372 | 0,6341 | 0,6311 | 0,6280 | 0,6250 | 0,6219 | 0,6189 | 0,6158 | 0,6128 | 0,73 |
| 0,27 | 0,6128 | 0,6098 | 0,6068 | 0,6038 | 0,6008 | 0,5978 | 0,5948 | 0,5918 | 0,5888 | 0,5858 | 0,5828 | 0,72 |
| 0,28 | 0,5828 | 0,5799 | 0,5769 | 0,5740 | 0,5710 | 0,5681 | 0,5651 | 0,5622 | 0,5592 | 0,5563 | 0,5534 | 0,71 |
| 0,29 | 0,5534 | 0,5505 | 0,5476 | 0,5446 | 0,5417 | 0,5388 | 0,5359 | 0,5330 | 0,5302 | 0,5273 | 0,5244 | 0,70 |
| 0,30 | 0,5244 | 0,5215 | 0,5187 | 0,5158 | 0,5129 | 0,5101 | 0,5072 | 0,5044 | 0,5015 | 0,4987 | 0,4959 | 0,69 |
| 0,31 | 0,4959 | 0,4930 | 0,4902 | 0,4874 | 0,4845 | 0,4817 | 0,4789 | 0,4761 | 0,4733 | 0,4705 | 0,4677 | 0,68 |
| 0,32 | 0,4677 | 0,4649 | 0,4621 | 0,4593 | 0,4565 | 0,4538 | 0,4510 | 0,4482 | 0,4454 | 0,4427 | 0,4399 | 0,67 |
| 0,33 | 0,4399 | 0,4372 | 0,4344 | 0,4316 | 0,4289 | 0,4261 | 0,4234 | 0,4207 | 0,4179 | 0,4152 | 0,4125 | 0,66 |
| 0,34 | 0,4125 | 0,4097 | 0,4070 | 0,4043 | 0,4016 | 0,3989 | 0,3961 | 0,3934 | 0,3907 | 0,3880 | 0,3853 | 0,65 |
| 0,35 | 0,3853 | 0,3826 | 0,3799 | 0,3772 | 0,3745 | 0,3719 | 0,3692 | 0,3665 | 0,3638 | 0,3611 | 0,3585 | 0,64 |
| 0,36 | 0,3585 | 0,3558 | 0,3531 | 0,3505 | 0,3478 | 0,3451 | 0,3425 | 0,3398 | 0,3372 | 0,3345 | 0,3319 | 0,63 |
| 0,37 | 0,3319 | 0,3292 | 0,3266 | 0,3239 | 0,3213 | 0,3186 | 0,3160 | 0,3134 | 0,3107 | 0,3081 | 0,3055 | 0,62 |
| 0,38 | 0,3055 | 0,3029 | 0,3002 | 0,2976 | 0,2950 | 0,2924 | 0,2898 | 0,2871 | 0,2845 | 0,2819 | 0,2793 | 0,61 |
| 0,39 | 0,2793 | 0,2767 | 0,2741 | 0,2715 | 0,2689 | 0,2663 | 0,2637 | 0,2611 | 0,2585 | 0,2559 | 0,2533 | 0,60 |
| 0,40 | 0,2533 | 0,2508 | 0,2482 | 0,2456 | 0,2430 | 0,2404 | 0,2378 | 0,2353 | 0,2327 | 0,2301 | 0,2275 | 0,59 |
| 0,41 | 0,2275 | 0,2250 | 0,2224 | 0,2198 | 0,2173 | 0,2147 | 0,2121 | 0,2096 | 0,2070 | 0,2045 | 0,2019 | 0,58 |
| 0,42 | 0,2019 | 0,1993 | 0,1968 | 0,1942 | 0,1917 | 0,1891 | 0,1866 | 0,1840 | 0,1815 | 0,1789 | 0,1764 | 0,57 |
| 0,43 | 0,1764 | 0,1738 | 0,1713 | 0,1687 | 0,1662 | 0,1637 | 0,1611 | 0,1586 | 0,1560 | 0,1535 | 0,1510 | 0,56 |
| 0,44 | 0,1510 | 0,1484 | 0,1459 | 0,1434 | 0,1408 | 0,1383 | 0,1358 | 0,1332 | 0,1307 | 0,1282 | 0,1257 | 0,55 |
| 0,45 | 0,1257 | 0,1231 | 0,1206 | 0,1181 | 0,1156 | 0,1130 | 0,1105 | 0,1080 | 0,1055 | 0,1030 | 0,1004 | 0,54 |
| 0,46 | 0,1004 | 0,0979 | 0,0954 | 0,0929 | 0,0904 | 0,0878 | 0,0853 | 0,0828 | 0,0803 | 0,0778 | 0,0753 | 0,53 |
| 0,47 | 0,0753 | 0,0728 | 0,0702 | 0,0677 | 0,0652 | 0,0627 | 0,0602 | 0,0577 | 0,0552 | 0,0527 | 0,0502 | 0,52 |
| 0,48 | 0,0502 | 0,0476 | 0,0451 | 0,0426 | 0,0401 | 0,0376 | 0,0351 | 0,0326 | 0,0301 | 0,0276 | 0,0251 | 0,51 |
| 0,49 | 0,0251 | 0,0226 | 0,0201 | 0,0175 | 0,0150 | 0,0125 | 0,0100 | 0,0075 | 0,0050 | 0,0025 | 0,0000 | 0,50 |
| | 0,010 | 0,009 | 0,008 | 0,007 | 0,006 | 0,005 | 0,004 | 0,003 | 0,002 | 0,001 | 0,000 | P |

Grandes valeurs de u

| P | 0,9999 | 0,99999 | 0,999999 | 0,9999999 | 0,99999999 | 0,999999999 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| u | 3,7190 | 4,2649 | 4,7534 | 5,1993 | 5,6120 | 5,9978 |

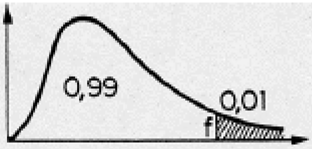
**N.B.** Si $P < 0.5$, $u$ est négatif.

## ملحق 02: توزيع ستودينت




| ν \ P | 0,90 | 0,80 | 0,70 | 0,60 | 0,50 | 0,40 | 0,30 | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,158 | 0,325 | 0,510 | 0,727 | 1,000 | 1,376 | 1,963 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 636,619 |
| 2 | 0,142 | 0,289 | 0,445 | 0,617 | 0,816 | 1,061 | 1,386 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 31,598 |
| 3 | 0,137 | 0,277 | 0,424 | 0,584 | 0,765 | 0,978 | 1,250 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 12,929 |
| 4 | 0,134 | 0,271 | 0,414 | 0,569 | 0,741 | 0,941 | 1,190 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 8,610 |
| 5 | 0,132 | 0,267 | 0,408 | 0,559 | 0,727 | 0,920 | 1,156 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 6,869 |
| 6 | 0,131 | 0,265 | 0,404 | 0,553 | 0,718 | 0,906 | 1,134 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,959 |
| 7 | 0,130 | 0,263 | 0,402 | 0,549 | 0,711 | 0,896 | 1,119 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 5,408 |
| 8 | 0,130 | 0,262 | 0,399 | 0,546 | 0,706 | 0,889 | 1,108 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 5,041 |
| 9 | 0,129 | 0,261 | 0,398 | 0,543 | 0,703 | 0,883 | 1,100 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,781 |
| 10 | 0,129 | 0,260 | 0,397 | 0,542 | 0,700 | 0,879 | 1,093 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,587 |
| 11 | 0,129 | 0,260 | 0,396 | 0,540 | 0,697 | 0,876 | 1,088 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,437 |
| 12 | 0,128 | 0,259 | 0,395 | 0,539 | 0,695 | 0,873 | 1,083 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 4,318 |
| 13 | 0,128 | 0,259 | 0,394 | 0,538 | 0,694 | 0,870 | 1,079 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 4,221 |
| 14 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,537 | 0,692 | 0,868 | 1,076 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 4,140 |
| 15 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,536 | 0,691 | 0,866 | 1,074 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 4,073 |
| 16 | 0,128 | 0,258 | 0,392 | 0,535 | 0,690 | 0,865 | 1,071 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 4,015 |
| 17 | 0,128 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,689 | 0,863 | 1,069 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,965 |
| 18 | 0,127 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,688 | 0,862 | 1,067 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,922 |
| 19 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,688 | 0,861 | 1,066 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,883 |
| 20 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,687 | 0,860 | 1,064 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,850 |
| 21 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,532 | 0,686 | 0,859 | 1,063 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,819 |
| 22 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,686 | 0,858 | 1,061 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,792 |
| 23 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,685 | 0,858 | 1,060 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,767 |
| 24 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,685 | 0,857 | 1,059 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,745 |
| 25 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,725 |
| 26 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,707 |
| 27 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,531 | 0,684 | 0,855 | 1,057 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,690 |
| 28 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,855 | 1,056 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,674 |
| 29 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,659 |
| 30 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,646 |
| 40 | 0,126 | 0,255 | 0,388 | 0,529 | 0,681 | 0,851 | 1,050 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,551 |
| 80 | 0,126 | 0,254 | 0,387 | 0,527 | 0,679 | 0,848 | 1,046 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,460 |
| 120 | 0,126 | 0,254 | 0,386 | 0,526 | 0,677 | 0,845 | 1,041 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 | 3,373 |
| ∞ | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,674 | 0,842 | 1,036 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,291 |

## ملحق03: توزيع فيشر

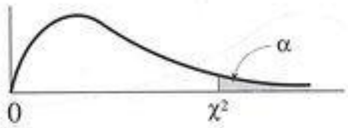



(Les valeurs de la première ligne doivent être multipliées par 10)

| $\nu_2$ \ $\nu_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 405 | 500 | 540 | 563 | 576 | 586 | 593 | 598 | 602 | 606 | 608 | 611 | 613 | 614 | 616 | 617 | 618 | 619 |
| 2 | 98·5 | 99·0 | 99·2 | 99·2 | 99·3 | 99·3 | 99·4 | 99·4 | 99·4 | 99·4 | 99·4 | 99·4 | 99·4 | 99·4 | 99·4 | 99·4 | 99·4 | 99·4 |
| 3 | 34·1 | 30·8 | 29·5 | 28·7 | 28·2 | 27·9 | 27·7 | 27·5 | 27·3 | 27·2 | 27·1 | 27·1 | 27·0 | 26·9 | 26·9 | 26·8 | 26·8 | 26·8 |
| 4 | 21·2 | 18·0 | 16·7 | 16·0 | 15·5 | 15·2 | 15·0 | 14·8 | 14·7 | 14·5 | 14·4 | 14·4 | 14·3 | 14·2 | 14·2 | 14·2 | 14·1 | 14·1 |
| 5 | 16·3 | 13·3 | 12·1 | 11·4 | 11·0 | 10·7 | 10·5 | 10·3 | 10·2 | 10·1 | 9·96 | 9·89 | 9·82 | 9·77 | 9·72 | 9·68 | 9·64 | 9·61 |
| 6 | 13·7 | 10·9 | 9·78 | 9·15 | 8·75 | 8·47 | 8·26 | 8·10 | 7·98 | 7·87 | 7·79 | 7·72 | 7·66 | 7·60 | 7·56 | 7·52 | 7·48 | 7·45 |
| 7 | 12·2 | 9·55 | 8·45 | 7·85 | 7·46 | 7·19 | 6·99 | 6·84 | 6·72 | 6·62 | 6·54 | 6·47 | 6·41 | 6·36 | 6·31 | 6·27 | 6·24 | 6·21 |
| 8 | 11·3 | 8·65 | 7·59 | 7·01 | 6·63 | 6·37 | 6·18 | 6·03 | 5·91 | 5·81 | 5·73 | 5·67 | 5·61 | 5·56 | 5·52 | 5·48 | 5·44 | 5·41 |
| 9 | 10·6 | 8·02 | 6·99 | 6·42 | 6·06 | 5·80 | 5·61 | 5·47 | 5·35 | 5·26 | 5·18 | 5·11 | 5·05 | 5·00 | 4·96 | 4·92 | 4·89 | 4·86 |
| 10 | 10·0 | 7·56 | 6·55 | 5·99 | 5·64 | 5·39 | 5·20 | 5·06 | 4·94 | 4·85 | 4·77 | 4·71 | 4·65 | 4·60 | 4·56 | 4·52 | 4·49 | 4·46 |
| 11 | 9·65 | 7·21 | 6·22 | 5·67 | 5·32 | 5·07 | 4·89 | 4·74 | 4·63 | 4·54 | 4·46 | 4·40 | 4·34 | 4·29 | 4·25 | 4·21 | 4·18 | 4·15 |
| 12 | 9·33 | 6·93 | 5·95 | 5·41 | 5·06 | 4·82 | 4·64 | 4·50 | 4·39 | 4·30 | 4·22 | 4·16 | 4·10 | 4·05 | 4·01 | 3·97 | 3·94 | 3·91 |
| 13 | 9·07 | 6·70 | 5·74 | 5·21 | 4·86 | 4·62 | 4·44 | 4·30 | 4·19 | 4·10 | 4·02 | 3·96 | 3·91 | 3·86 | 3·82 | 3·78 | 3·75 | 3·72 |
| 14 | 8·86 | 6·51 | 5·56 | 5·04 | 4·70 | 4·46 | 4·28 | 4·14 | 4·03 | 3·94 | 3·86 | 3·80 | 3·75 | 3·70 | 3·66 | 3·62 | 3·59 | 3·56 |
| 15 | 8·68 | 6·36 | 5·42 | 4·89 | 4·56 | 4·32 | 4·14 | 4·00 | 3·89 | 3·80 | 3·73 | 3·67 | 3·61 | 3·56 | 3·52 | 3·49 | 3·45 | 3·42 |
| 16 | 8·53 | 6·23 | 5·29 | 4·77 | 4·44 | 4·20 | 4·03 | 3·89 | 3·78 | 3·69 | 3·62 | 3·55 | 3·50 | 3·45 | 3·41 | 3·37 | 3·34 | 3·31 |
| 17 | 8·40 | 6·11 | 5·18 | 4·67 | 4·34 | 4·10 | 3·93 | 3·79 | 3·68 | 3·59 | 3·52 | 3·46 | 3·40 | 3·35 | 3·31 | 3·27 | 3·24 | 3·21 |
| 18 | 8·29 | 6·01 | 5·09 | 4·58 | 4·25 | 4·01 | 3·84 | 3·71 | 3·60 | 3·51 | 3·43 | 3·37 | 3·32 | 3·27 | 3·23 | 3·19 | 3·16 | 3·13 |
| 19 | 8·18 | 5·93 | 5·01 | 4·50 | 4·17 | 3·94 | 3·77 | 3·63 | 3·52 | 3·43 | 3·36 | 3·30 | 3·24 | 3·19 | 3·15 | 3·12 | 3·08 | 3·05 |
| 20 | 8·10 | 5·85 | 4·94 | 4·43 | 4·10 | 3·87 | 3·70 | 3·56 | 3·46 | 3·37 | 3·29 | 3·23 | 3·18 | 3·13 | 3·09 | 3·05 | 3·02 | 2·99 |
| 21 | 8·02 | 5·78 | 4·87 | 4·37 | 4·04 | 3·81 | 3·64 | 3·51 | 3·40 | 3·31 | 3·24 | 3·17 | 3·12 | 3·07 | 3·03 | 2·99 | 2·96 | 2·93 |
| 22 | 7·95 | 5·72 | 4·82 | 4·31 | 3·99 | 3·76 | 3·59 | 3·45 | 3·35 | 3·26 | 3·18 | 3·12 | 3·07 | 3·02 | 2·98 | 2·94 | 2·91 | 2·88 |
| 23 | 7·88 | 5·66 | 4·76 | 4·26 | 3·94 | 3·71 | 3·54 | 3·41 | 3·30 | 3·21 | 3·14 | 3·07 | 3·02 | 2·97 | 2·93 | 2·89 | 2·86 | 2·83 |
| 24 | 7·82 | 5·61 | 4·72 | 4·22 | 3·90 | 3·67 | 3·50 | 3·36 | 3·26 | 3·17 | 3·09 | 3·03 | 2·98 | 2·93 | 2·89 | 2·85 | 2·82 | 2·79 |
| 25 | 7·77 | 5·57 | 4·68 | 4·18 | 3·86 | 3·63 | 3·46 | 3·32 | 3·22 | 3·13 | 3·06 | 2·99 | 2·94 | 2·89 | 2·85 | 2·81 | 2·78 | 2·75 |
| 26 | 7·72 | 5·53 | 4·64 | 4·14 | 3·82 | 3·59 | 3·42 | 3·29 | 3·18 | 3·09 | 3·02 | 2·96 | 2·90 | 2·86 | 2·82 | 2·78 | 2·74 | 2·72 |
| 27 | 7·68 | 5·49 | 4·60 | 4·11 | 3·78 | 3·56 | 3·39 | 3·26 | 3·15 | 3·06 | 2·99 | 2·93 | 2·87 | 2·82 | 2·78 | 2·75 | 2·71 | 2·68 |
| 28 | 7·64 | 5·45 | 4·57 | 4·07 | 3·75 | 3·53 | 3·36 | 3·23 | 3·12 | 3·03 | 2·96 | 2·90 | 2·84 | 2·79 | 2·75 | 2·72 | 2·68 | 2·65 |
| 29 | 7·60 | 5·42 | 4·54 | 4·04 | 3·73 | 3·50 | 3·33 | 3·20 | 3·09 | 3·00 | 2·93 | 2·87 | 2·81 | 2·77 | 2·73 | 2·69 | 2·66 | 2·63 |
| 30 | 7·56 | 5·39 | 4·51 | 4·02 | 3·70 | 3·47 | 3·30 | 3·17 | 3·07 | 2·98 | 2·91 | 2·84 | 2·79 | 2·74 | 2·70 | 2·66 | 2·63 | 2·60 |
| 32 | 7·50 | 5·34 | 4·46 | 3·97 | 3·65 | 3·43 | 3·26 | 3·13 | 3·02 | 2·93 | 2·86 | 2·80 | 2·74 | 2·70 | 2·66 | 2·62 | 2·58 | 2·55 |
| 34 | 7·44 | 5·29 | 4·42 | 3·93 | 3·61 | 3·39 | 3·22 | 3·09 | 2·98 | 2·89 | 2·82 | 2·76 | 2·70 | 2·66 | 2·62 | 2·58 | 2·55 | 2·51 |
| 36 | 7·40 | 5·25 | 4·38 | 3·89 | 3·57 | 3·35 | 3·18 | 3·05 | 2·95 | 2·86 | 2·79 | 2·72 | 2·67 | 2·62 | 2·58 | 2·54 | 2·51 | 2·48 |
| 38 | 7·35 | 5·21 | 4·34 | 3·86 | 3·54 | 3·32 | 3·15 | 3·02 | 2·92 | 2·83 | 2·75 | 2·69 | 2·64 | 2·59 | 2·55 | 2·51 | 2·48 | 2·45 |
| 40 | 7·31 | 5·18 | 4·31 | 3·83 | 3·51 | 3·29 | 3·12 | 2·99 | 2·89 | 2·80 | 2·73 | 2·66 | 2·61 | 2·56 | 2·52 | 2·48 | 2·45 | 2·42 |
| 42 | 7·28 | 5·15 | 4·29 | 3·80 | 3·49 | 3·27 | 3·10 | 2·97 | 2·86 | 2·78 | 2·70 | 2·64 | 2·59 | 2·54 | 2·50 | 2·46 | 2·43 | 2·40 |
| 44 | 7·25 | 5·12 | 4·26 | 3·78 | 3·47 | 3·24 | 3·08 | 2·95 | 2·84 | 2·75 | 2·68 | 2·62 | 2·56 | 2·52 | 2·47 | 2·44 | 2·40 | 2·37 |
| 46 | 7·22 | 5·10 | 4·24 | 3·76 | 3·44 | 3·22 | 3·06 | 2·93 | 2·82 | 2·73 | 2·66 | 2·60 | 2·54 | 2·50 | 2·45 | 2·42 | 2·38 | 2·35 |
| 48 | 7·19 | 5·08 | 4·22 | 3·74 | 3·43 | 3·20 | 3·04 | 2·91 | 2·80 | 2·72 | 2·64 | 2·58 | 2·53 | 2·48 | 2·44 | 2·40 | 2·37 | 2·33 |
| 50 | 7·17 | 5·06 | 4·20 | 3·72 | 3·41 | 3·19 | 3·02 | 2·89 | 2·79 | 2·70 | 2·63 | 2·56 | 2·51 | 2·46 | 2·42 | 2·38 | 2·35 | 2·32 |
| 55 | 7·12 | 5·01 | 4·16 | 3·68 | 3·37 | 3·15 | 2·98 | 2·85 | 2·75 | 2·66 | 2·59 | 2·53 | 2·47 | 2·42 | 2·38 | 2·34 | 2·31 | 2·28 |
| 60 | 7·08 | 4·98 | 4·13 | 3·65 | 3·34 | 3·12 | 2·95 | 2·82 | 2·72 | 2·63 | 2·56 | 2·50 | 2·44 | 2·39 | 2·35 | 2·31 | 2·28 | 2·25 |
| 65 | 7·04 | 4·95 | 4·10 | 3·62 | 3·31 | 3·09 | 2·93 | 2·80 | 2·69 | 2·61 | 2·53 | 2·47 | 2·42 | 2·37 | 2·33 | 2·29 | 2·26 | 2·23 |
| 70 | 7·01 | 4·92 | 4·08 | 3·60 | 3·29 | 3·07 | 2·91 | 2·78 | 2·67 | 2·59 | 2·51 | 2·45 | 2·40 | 2·35 | 2·31 | 2·27 | 2·23 | 2·20 |
| 80 | 6·96 | 4·88 | 4·04 | 3·56 | 3·26 | 3·04 | 2·87 | 2·74 | 2·64 | 2·55 | 2·48 | 2·42 | 2·36 | 2·31 | 2·27 | 2·23 | 2·20 | 2·17 |
| 90 | 6·93 | 4·85 | 4·01 | 3·54 | 3·23 | 3·01 | 2·84 | 2·72 | 2·61 | 2·52 | 2·45 | 2·39 | 2·33 | 2·29 | 2·24 | 2·21 | 2·17 | 2·14 |
| 100 | 6·90 | 4·82 | 3·98 | 3·51 | 3·21 | 2·99 | 2·82 | 2·69 | 2·59 | 2·50 | 2·43 | 2·37 | 2·31 | 2·26 | 2·22 | 2·19 | 2·15 | 2·12 |
| 125 | 6·84 | 4·78 | 3·94 | 3·47 | 3·17 | 2·95 | 2·79 | 2·66 | 2·55 | 2·47 | 2·39 | 2·33 | 2·28 | 2·23 | 2·19 | 2·15 | 2·11 | 2·08 |
| 150 | 6·81 | 4·75 | 3·92 | 3·45 | 3·14 | 2·92 | 2·76 | 2·63 | 2·53 | 2·44 | 2·37 | 2·31 | 2·25 | 2·20 | 2·16 | 2·12 | 2·09 | 2·06 |
| 200 | 6·76 | 4·71 | 3·88 | 3·41 | 3·11 | 2·89 | 2·73 | 2·60 | 2·50 | 2·41 | 2·34 | 2·27 | 2·22 | 2·17 | 2·13 | 2·09 | 2·06 | 2·02 |
| 300 | 6·72 | 4·68 | 3·85 | 3·38 | 3·08 | 2·86 | 2·70 | 2·57 | 2·47 | 2·38 | 2·31 | 2·24 | 2·19 | 2·14 | 2·10 | 2·06 | 2·03 | 1·99 |
| 500 | 6·69 | 4·65 | 3·82 | 3·36 | 3·05 | 2·84 | 2·68 | 2·55 | 2·44 | 2·36 | 2·28 | 2·22 | 2·17 | 2·12 | 2·07 | 2·04 | 2·00 | 1·97 |
| 1000 | 6·66 | 4·63 | 3·80 | 3·34 | 3·04 | 2·82 | 2·66 | 2·53 | 2·43 | 2·34 | 2·27 | 2·20 | 2·15 | 2·10 | 2·06 | 2·02 | 1·98 | 1·95 |
| ∞ | 6·63 | 4·61 | 3·78 | 3·32 | 3·02 | 2·80 | 2·64 | 2·51 | 2·41 | 2·32 | 2·25 | 2·18 | 2·13 | 2·08 | 2·04 | 2·00 | 1·97 | 1·93 |

## ملحق04: توزيع كاي مربع

Table $\chi^2$ : points de pourcentage supérieurs de la distribution $\chi^2$




| dl | .995 | .990 | .975 | .950 | .900 | .750 | .500 | .250 | .100 | .050 | .025 | .010 | .005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.10 | 0.45 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 0.21 | 0.58 | 1.39 | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 |
| 3 | 0.07 | 0.11 | 0.22 | 0.35 | 0.58 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.82 | 9.35 | 11.35 | 12.84 |
| 4 | 0.21 | 0.30 | 0.48 | 0.71 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | 0.41 | 0.55 | 0.83 | 1.15 | 1.61 | 2.67 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | 0.68 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.45 | 5.35 | 7.84 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | 0.99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.22 | 13.36 | 15.51 | 17.54 | 20.09 | 21.96 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.39 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.66 | 23.59 |
| 10 | 2.15 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.55 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.58 | 10.34 | 13.70 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.75 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.34 | 14.85 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.21 | 28.30 |
| 13 | 3.56 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.34 | 15.98 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.17 | 13.34 | 17.12 | 21.06 | 23.69 | 26.12 | 29.14 | 31.31 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.04 | 14.34 | 18.25 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.91 | 15.34 | 19.37 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 12.79 | 16.34 | 20.49 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 13.68 | 17.34 | 21.60 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.15 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 14.56 | 18.34 | 22.72 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 15.45 | 19.34 | 23.83 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.56 | 40.00 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 16.34 | 20.34 | 24.93 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 17.24 | 21.34 | 26.04 | 30.81 | 33.93 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 9.26 | 10.19 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 18.14 | 22.34 | 27.14 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 9.88 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 19.04 | 23.34 | 28.24 | 33.20 | 36.42 | 39.37 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 19.94 | 24.34 | 29.34 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.32 | 46.93 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 20.84 | 25.34 | 30.43 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 |
| 27 | 11.80 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 18.11 | 21.75 | 26.34 | 31.53 | 36.74 | 40.11 | 43.20 | 46.96 | 49.64 |
| 28 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 22.66 | 27.34 | 32.62 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 19.77 | 23.57 | 28.34 | 33.71 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 |
| 30 | 13.78 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 24.48 | 29.34 | 34.80 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 40 | 20.67 | 22.14 | 24.42 | 26.51 | 29.06 | 33.67 | 39.34 | 45.61 | 51.80 | 55.75 | 59.34 | 63.71 | 66.80 |
| 50 | 27.96 | 29.68 | 32.35 | 34.76 | 37.69 | 42.95 | 49.34 | 56.33 | 63.16 | 67.50 | 71.42 | 76.17 | 79.52 |
| 60 | 35.50 | 37.46 | 40.47 | 43.19 | 46.46 | 52.30 | 59.34 | 66.98 | 74.39 | 79.08 | 83.30 | 88.40 | 91.98 |
| 70 | 43.25 | 45.42 | 48.75 | 51.74 | 55.33 | 61.70 | 69.34 | 77.57 | 85.52 | 90.53 | 95.03 | 100.44 | 104.24 |
| 80 | 51.14 | 53.52 | 57.15 | 60.39 | 64.28 | 71.15 | 79.34 | 88.13 | 96.57 | 101.88 | 106.63 | 112.34 | 116.35 |
| 90 | 59.17 | 61.74 | 65.64 | 69.13 | 73.29 | 80.63 | 89.33 | 98.65 | 107.56 | 113.14 | 118.14 | 124.13 | 128.32 |
| 100 | 67.30 | 70.05 | 74.22 | 77.93 | 82.36 | 90.14 | 99.33 | 109.14 | 118.49 | 124.34 | 129.56 | 135.82 | 140.19 |