Rappel sur la théorie des probabilités

La théorie des probabilités

RAHMANI Naceur

Département de Mathématiques

2023

Probabilités: Vocabulaire

Ensemble fondamental

- **Expérience aléatoire**: Une expérience aléatoire (e.a) est toute expérience dont le résultat est régi par le hasard. Par exemple, lancer un dé. Le jet d'une pièce de monnaie.
- **Ensemble fondamental**: L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. est appelé ensemble fondamental ou encore univers des possibles; et on le note généralement Ω.
- **Exemples** :
- Lorsqu'on jette un dé (à six faces numérotées), si on s'intèresse au nombre obtenu sur la face supérieure, l'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  Un tirage à pile ou face: $\Omega = \{P; F\}$.
- Deux tirages à pile ou face: $\Omega = \{PP; FF; PF; FP\}$.
- Durée de vie d'une ampoule: $\Omega = \mathbb{R}^+$

Probabilités: Vocabulaire

Événements

Definition

Un événement de Ω est un sous ensemble de Ω. Un événement peut être élémentaire "Un singleton" (un seul élément) ou composé (plusieurs éléments). Un événement est une propriété dont on peut dire si elle est vérifiée ou non une fois le résultat de l'expérience connu.

- Mathématiquement, un événement est caractérisé par l'ensemble des résultats dans lesquels il est réalisé (un tel résultat est alors appelé une réalisation de l'événement).

Probabilités: Vocabulaire

Événements

Example

On lance deux fois un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- L'événement « le second lancer est un 6 »:

$A = \{(m, 6) : m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.

- L'événement « le premier lancer est supérieur au second »:

$A = \{(m, n) \in \Omega : m > n\}$.

- L'événement A: "avoir le chiffre 2", est un événement élémentaire

$A = \{2\} \subset \Omega$.

-L'événement B: "avoir un chiffre pair", est un événement composé

$B = \{2; 4; 6\} \subset \Omega$.

Probabilités: Vocabulaire

Relations et opérations entre les événements

Inclusion: Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire. On dira que A est inclu dans B (ou A implique B), si la réalisation de A entraîne nécessairement la réalisation de B. On le note $A \subset B$ (ou $A \Rightarrow B$).

Example

Dans l'exemple précédent $A = \{2\} \subset B = \{2; 4; 6\}$, si A est réalisé alors B est réalisé.

Probabilités: Vocabulaire

Relations et opérations entre les événements

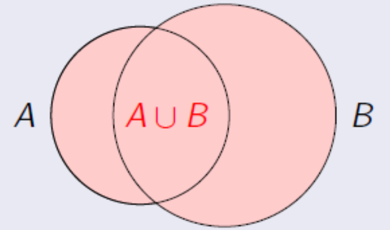
Événement contraire:

- On appelle événement contraire de l'événement A le complémentaire de A dans Ω, noté A, l'événement réalisé lorsque A n'est pas réalisé et vice versa**:**
- Si E est un événement "obtenir un résultat pair", alors $E = \{2, 4, 6\}$. , son complémentaire $\bar{E}$ est l'événement contraire. Ici $\bar{E} = \{1, 3, 5\}$ c'est-'a-dire "obtenir un résultat impair".

Probabilités: Vocabulaire

Relations et opérations entre les événements

Union (Disjonction): On dit que l'événement "A ou B", noté $(A \cup B)$, est réalisé si l'un au moins des deux
événements est réalisé (i.e. A est réalisé ou B est réalisé).

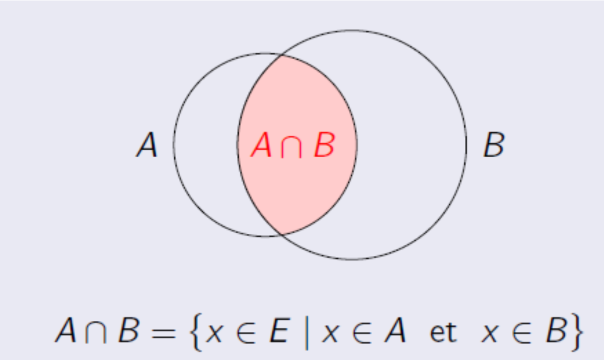


$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}$$

Probabilités: Vocabulaire

Relations et opérations entre les événements

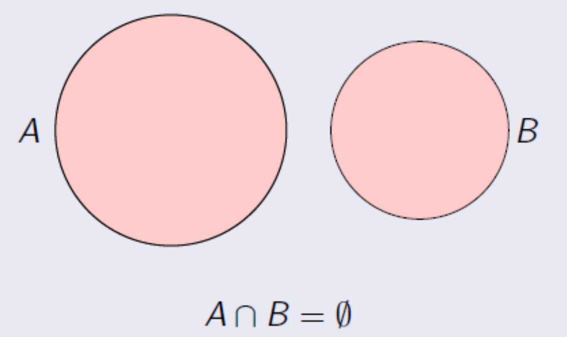
Intersection (Conjonction): L'événement "A et B", noté $(A \cap B)$, est réalis´e lorsque A est réalisé et B est réalisé



Probabilités: Vocabulaire

Relations et opérations entre les événements

Événements incompatibles (disjoints): Deux événements E_1 et E_2 sont incompatibles ou disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun; $E_1 \cap E_2 = \emptyset$;. Par exemple "obtenir un 4 ou un 6" et "obtenir un résultat impair" sont deux événements incompatibles.(E et $\bar{E}$ sont incompatibles, ou disjoints)



Probabilités: Définition axiomatique de la probabilité

Definition

Une probabilité P sur un ensemble fondamental Ω est une fonction qui à tout événement E associe ses “chances” de se réaliser $P(E)$ et qui vérifie les axiomes suivants:

- **Axiome 1**: $P(E)$ est un réel compris entre 0 et 1.
- **Axiome 2**: Pour l'événement certain, $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
- **Axiome 3:** (Axiome d'additivité): Si E_1 et E_2 sont deux événements incompatibles ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$) alors

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

si (E_i) est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors

$$\begin{aligned} P\left(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n\right) &= P\left(E_1\right) + P\left(E_2\right) + \ldots + P\left(E_n\right) \\ P\left(\bigcup_i E_i\right) &= \sum_i P\left(E_i\right) \end{aligned}$$

Probabilités: Définition axiomatique de la probabilité

Espace probabilisé

Definition

On appelle **espace probabilisé** le triplé $(\Omega; C; P)$ où Ω est l'ensemble fondamental, C est une collection de sous-ensembles de Ω (la collection des événements), qui possède la structure précédente de σ-algèbre de Boole et P: $C \longrightarrow [0, 1]$ est une mesure de probabilité sur C.

Propriétés élémentaires: de l'axiomatique de Kolmogorov, on peut déduire les propriétés suivantes:

- Si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leq P(B)$.(inégalité de Boole).
- Soit A un événement et $\bar{A}$ son contraire, alors: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Remarque:. Tout calcul conduisant à des valeurs de probabilités négatives ou supérieures à 1 est faux.

Définition classique des probabilités

- A chaque événement A d'une expérience aléatoire (e.a.) est associé un nombre que l'on note $P(A)$ compris entre 0 et 1 qui mesure la probabilité de la réalisation de A. Si une e.a. a N cas possibles et parmi ces N cas, il y a n cas favorables à la réalisation de l'événement A, on définit la probabilité de la réalisation de A par:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles} \\ &= \frac{nombre\ d'éléments\ de\ A}{nombre\ d'élémentsde\ \Omega} \\ &= \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} \end{aligned}$$

- D'une manière équivalente $P(A) = \frac{n}{N}$

Définition classique des probabilités

Example

Dans le jet d'un dé à six faces équilibrées, soit A l'événement "avoir un nombre pair".

- Nombre de cas possibles est 6 : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Nombre de cas favorables est 3 :$A = \{2; 4; 6\}$.
- $P(A) = \dfrac{3}{6}$

Définition classique des probabilités

Exemple en considérant l'ordre

Example

On lance deux fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ?

dé	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	**(5,5)**	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	**(6,6)**

$$\mathbb{P}(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Définition classique des probabilités
Exemple sans considérer l'ordre

dé	1	2	3	4	5	6
1	**{1,1}**	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}
2		**{2,2}**	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}
3			**{3,3}**	{3,4}	{3,5}	{3,6}
4				**{4,4}**	{4,5}	{4,6}
5					**{5,5}**	{5,6}
6						**{6,6}**

$$\mathbb{P}(E) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$