جامعة محمد خيضر بسكرة — السنة الأولى (MI+رياضيات)

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة — مقياس جبر2

قسم الرياضيات — 2023/2022

السلسلة رقم 02 (التطبيقات الخطية و المصفوفات)

<u>التمرين 01</u>: ليكن التطبيقين:

$$f:\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

$$g:\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \mapsto g(x,y) = (2x-y, x-y)$$

1- بين أن f و g خطيين.

2- أوجد $\mathrm{Ker}f$ ،$\mathrm{Ker}g$ ،$\mathrm{Im}f$ ،$\mathrm{Im}g$ ،$\mathrm{rg}f$ ،$\mathrm{rg}g$.

3- هل f و g متباينين؟ غامرين؟

4- هل $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$ ؟

5- بين أنه: إذا كان $u \in \mathrm{Im}f$ فإن $f(u) = u$.

<u>التمرين 02</u>: لتكن المصفوفات:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1) احسب $A+C$ ، $B+D$ ، $3A$ ، $A\times B$ ، $B\times A$ ، A^3 ، C^2 ، B^t ، $A\times B^t$ متى كان ذلك ممكنا.

2) احسب $\det C$ ،$\det E$ ، احسب C^{-1} ،E^{-1}.

<u>التمرين 03</u>: ليكن $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$، و ليكن التطبيق الخطي:

$$f:\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (x-y, x+z, y+z)$$

1) أوجد مصفوفة f في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

2) ليكن $a = (1,3,-1)$ ، $b = (1,3,0)$ ، $c = (1,2,-1)$

أ- بين أن $B' = \{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

ب- أوجد مصفوفة العبور P من الأساس القانوني إلى الأساس B'. احسب P^{-1}.

ج- أوجد مصفوفة f في الأساس B' باستخدام مصفوفة العبور.

د- أوجد مصفوفة f في الأساس B' باستخدام التعريف.

التمرين 04: ليكن $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$، و ليكن التطبيق الخطي: $f: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ بحيث:

$$f(e_1)=e_3,\ f(e_2)=-e_1+e_2+e_3,\ f(e_3)=e_3$$

I)

1) بين أن: $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: f(x,y,z)=(-y,y,x+y+z)$
2) أوجد $\mathrm{Ker}f$ و $\dim\mathrm{Ker}f$، هل f متباين؟
3) ليكن F الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المعرف بـ $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x=0\}$
   اثبت أن $\mathbb{R}^3=F\oplus\mathrm{Ker}f$

II)

1) أوجد مصفوفة f في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.
2) نضع $e'_1=e_1-e_3,\ e'_2=e_1-e_2,\ e'_3=-e_1+e_2+e_3$
   أ- تحقق أن $B'=\{e'_1,e'_2,e'_3\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.
   ب- أوجد مصفوفة العبور P من الأساس القانوني إلى الأساس B'. احسب P^{-1}.
   ج- أوجد مصفوفة f في الأساس B' بطريقتين مختلفتين.