# المصفوفات والمحددات
# Matrices and Determinants

الأستاذة: زواوي نور الهدى

المستوى : سنة أولى جامعي جذع مشترك علوم وتكنولوجيا

4 مارس 2023

# المحتويات

# تعريف

**Matrix**

المصفوفة $A$ من نمط (نوع) $m \times n$ هي مجموعة من الأعمدة ( $n$ عمود) والصفوف ( $m$ سطر ) المرتبة في جدول يحتوي على عناصر من الحقل $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ نرمز لها بالرمز:

$$A = (a_{ij}),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

# تعريف

1. $M_{m,n}(K)$ هي مجموعة المصفوفات ذو البعد $m \times n$ والمعاملات من الحقل $K$
2. قياس أي مصفوفة هو عدد الأسطر في عدد الأعمدة ونكتب: $(m \times n)$.
3. $a_{ij}$ معامل المصفوفة في السطر $i$ والعمود $j$. (matrix coefficient)
4. مصفوفة السطر $i \times n$ وتسمى أيضا الشعاع الأفقي row vector هي المصفوفة التي تحتوي على سطر واحد، بمعنى:

$$R_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

5. مصفوفة العمود $m \times j$ وتسمى أيضا الشعاع العمودي column vector هي المصفوفة التي تحتوي على عمود واحد

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

# أنواع المصفوفات

## Null matrix

نسمي $A$ المصفوفة الصفرية إذا كان جميع عناصرها مساوية للصفر

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

# أنواع المصفوفات

**Square Matrix**

نسمي $A$ المصفوفة المربعة $n \times n$ إذا كان عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة .
تسمى العناصر $a_{11},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn}$ ب القطر الرئيسي Principal Diagonal .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة $n \times n$ ذات العناصر $K$ بـ: $M_n(K)$.

# أنواع المصفوفات

## Upper Triangular matrix

نسمي $A$ مصفوفة مثلثية علوية
$n \times n$ إذا جميع العناصر التي تقع
تحت القطر الرئيسي معدومة أي:
$\forall\ i > j,\ a_{ij} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

## Lower Triangular matrix

نسمي $A$ مصفوفة مثلثية سفلية
$n \times n$ إذا جميع العناصر التي تقع
تحت القطر الرئيسي معدومة أي
$\forall i < j,\ a_{ij} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# أنواع المصفوفات

**Diagonal matrix**

نسمي $A$ مصفوفة قطرية $n \times n$
إذا كانت مصفوفة مثلثية علوية
وسفلية في نفس الوقت. بمعنى أن
جميع معاملات المصفوفةمعدومة
ماعدا معاملات القطر :
$\forall i \neq j, \; a_{ij} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# أنواع المصفوفات

## Identity (Unit) matrix

نسمي $A$ مصفوفة الوحدة $n \times n$ إذا كانت مصفوفة قطرية و جميع معاملات القطر الرئيسي تساوي 1. نرمز لها بالرمز $I_n$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

# تعريف

## مثال 1

ماهو نمط كل مصفوفة؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & 3i\\ 0 & -5i & 3 & 1\\ -4 & 0 & 1 & 9\end{pmatrix}\rightarrow\ A\in M_{3,4}(\mathbf{C})$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 10\\ -4 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\ B\in M_{3,2}(\mathbf{R})$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & 3 & 6\\ -2 & -5 & 1\\ 7 & 11 & 17\end{pmatrix}\rightarrow\ C\in M_{3}(\mathbf{R})$$

# Equality

## تساوي مصفوفتين

نقول أن المصفوفة $A = (a_{ij})$ مساوية للمصفوفة $B = (b_{ij})$ إذا كانا لهما نفس عدد الأسطرو الأعمدة وكذلك نفس المعاملات بمعنى:

$$a_{ij} = b_{ij},\ \forall 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

## مثال

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & 12 & 19 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 19 & 1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن $A \neq B$ لأن : $a_{14} \neq b_{14}$

# Addition

## Addition

لتكن $A=(a_{ij})$ ذات البعد $m\times n$ و $B=(b_{ij})$ ذو البعد $m\times n$. جمع المصفوفتين هو المصفوفة $C$ ذو المعاملات التالية $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ومن البعد $m\times n$ .

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

# Scalar multiplication

## Scalar multiplication

ضرب المصفوفة $A = (a_{ij})$ بالقيمة السلمية $\lambda$ هو

$$\lambda \mathbf{A} = \lambda(\mathbf{a_{ij}}),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

# Scalar multiplication

## خواص

لتكن $A,\ B \in M_{m,n}$ و $\lambda_1,\ \lambda_2 \in K$. لدينا مايلي:

1. $A - B = A + (-1)B$
2. $\lambda_1(A+B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$
3. $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$
4. $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2)A$

# Multiplication

## جداء المصفوفات

لتكن كل من المصفوفتين:

$$A = (a_{ij}) \in M_{m,l} \,;\ B = (b_{ij}) \in M_{l,n}$$

. جداء المصفوفتين $A$ و $B$ هو المصفوفة $C$ ذو البعد $m \times n$ بحيث:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}; \ \ 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n$$

# Multiplication

على سبيل المثال:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

# Multiplication

على سبيل المثال:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\color{red}c_{11}} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

# Multiplication

على سبيل المثال:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

# Multiplication

على سبيل المثال:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{l} a_{1k} b_{k1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \ldots + a_{1l} b_{l1}.$$

## Multiplication

على سبيل المثال:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{l} a_{1k} b_{k1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \ldots + a_{1l} b_{l1}.$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{l} a_{2k} b_{k1} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + \ldots + a_{2l} b_{l1}.$$

$$c_{mn} = \sum_{k=1}^{l} a_{mk} b_{kn} = a_{m1} b_{1n} + a_{m2} b_{2n} + \ldots + a_{ml} b_{ln}.$$

# Example

**مثال**

لتكن المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ماهو نمط كل مصفوفة، واحسب مايلي: $AB,\ BC,\ BA,\ AC,\ CA$

# خواص الجداء

لتكن المصفوفات التالية:

$$A \in M_{m,l},\ B \in M_{l,n},\ C \in M_{n,r},\ V \in M_{1,n},\ W \in M_{n,1}$$

1. $AB \neq BA$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $A(B+C) = AB + BC$
4. $A = I_m A = A I_l$
5. $VW = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n$

# Transposition

## المنقول

نقول عن منقول مصفوفة $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}$ هو المصفوفة $A^T = (b_{ij}) \in M_{n,m}$
و ذلك بتغيير أسطر المصفوفة $A$ لتصبح أعمدة في المصفوفة $A^T$

$$b_{ij} = a_{ji},\ \forall 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

## مثال

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & 12 & 19 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \\ 0 & 12 \\ 9 & 19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# خواص المنقول

لتكن المصفوفات التالية: $A,\ B \in M_{m,n},\ \lambda \in K$

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

# Trace

## أثر مصفوفة

نسمي أثر مصفوفة $A \in M_n$ هو مجموع معاملات القطر الرئيسي. و نرمز لها ب

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

لتكن المصفوفات التالية: $A,\ B \in M_n,\ \lambda \in K$

1. $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
2. $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$
3. $Tr(AB) = Tr(BA)$

# المقلوب

**Inverse of matrix**

لتكن $A \in M_n(K)$ مصفوفة مربعة، نقول أنها قابلة للقلب $inversible$ لإذا وجدنا مصفوفة مربعة $B \in M_n(K)$ بحيث:

$$AB = BA = I_n$$

ومنه نقول عن المصفوفة $B$ أنها مقلوب لـ$A$ ونرمز لها بـ: $A^{-1}$.

# المقلوب

**Example**

أحسب $A^{-1}$ حيث: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

# المحددات

**Determinants of a matrix**

المحدد هو تطبيق يرفق كل مصفوفة من مجموعة المصفوفات المربعة نحو قيمة في $\mathbb{R}$، بحيث:

$$\begin{aligned} det \quad : \quad & M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ & A \mapsto det\ A = |A| \end{aligned}$$

# المحددات

- إذا كانت المصفوفة مربعة من المقاس $n = 1$ أي $A = a_{11}$ فإن: $det(A) = a_1 1$
- إذا كانت $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ، ومنه :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

# المحددات

◄ إذا كانت $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ، ومنه :

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} + & - & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

# المحددات

- إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$، و منه:

$$\begin{array}{rcl} det(A) & = & \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \\ & = & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, det(M_{ij}) \end{array}$$

بحيث: $M_{ij}$ هي المصفوفة من المقاس : $(n-1)$ الناتجة عن حذف السطر $i$ و العمود $j$ من المصفوفة $A$.

# المحددات

## مثال

أوجد محدد المصفوفات التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-7}{4} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$$

# المحددات

## ملاحظات

لتكن $A,\ B \in M_n$، لدينا

- إذا كانت $A$ مصفوفة قطرية فإن $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}\ a_{22}...\ a_{nn}$
- إذا كانت $A = I_n$، فإن: $det(I_n) = 1$
- إذا كان في المصفوفة $A$ عمود أو سطر كله أصفار فإن: $det(A) = 0$
- $det(AB) = det(A)\ det(B)$.
- بشكل عام: $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$
- من أجل كل $\lambda \in \mathbb{R}$: $det(\lambda\ A) = \lambda^n\ det(A)$
- إذا كانت $A$ قابلة للقلب فإن: $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

# المقلوب

## ايجاد المقلوب

ليكن $A \in M_n$: و $det(A) \neq 0$، يمكننا حساب $A^{-1}$ كمايلي:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \left(Com(A)\right)^t$$

حيث:

$$Com(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ ، $M_{ij}$ هي المصفوفة من المقاس : $(n-1)$ الناتجة عن حذف السطر $i$ و العمود $j$ من المصفوفة $A$.

# مفاهيم عامة

**الأساس Base**

ليكن $V$ فضاءا شعاعيا على الحقل : $K$، ولتكن $\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\}$ مجموعة أشعة من $V$ ، نقول عن هته الأشعة أنها تشكل اساسا لـ: $V$ ، إذا فقط تحقق الشرطين:

1. $\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\}$ مستقلة خطيا .
2. $\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\}$ تولد $V$.

# مفاهيم عامة

## مثال

- الأساس القانوني للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ هو:

$$\{e_1 = (1, 0, ..., 0),\ \ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0),\ \ ...,\ \ e_n = (0, ..., 0, 1)\}$$

- من أجل $n = 2$:

$$\{e_1 = (1, 0),\ \ e_2 = (0, 1)\}$$

- من أجل $n = 3$

$$\{e_1 = (1, 0, 0),\ \ e_2 = (0, 1, 0),\ \ e_3 = (0, 0, 1)\}$$

# مفاهيم عامة

### البعد Dimension

نقول عن فضاء شعاعي ذو بعد منته إذا وجد أساس في $V$ يحتوي على عدد منته $n$ من العناصر و نكتب : $dim(V) = n$.
مثال: $dim(\mathbb{R}^2) = 2, \ dim(\mathbb{R}^3) = 3.$

### ملاحظة

إذا كان $V$ فضاء شعاعي ذو بعد منته $dim(V) = n$ و $\{x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n\}$ مستقلة خطيا فإن هته الأشعة تشكل أساسا لـ $V$.

# تطبيقات خطية Linear transformation

## التطبيق الخطي

ليكن $E$ و $F$ فضائين شعاعين على نفس الحقل $K$، وليكن $f$ تطبيق بحيث:

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbf{E} \to \mathbf{F} \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

نقول عن $f$ تطبيق خطي من $E$ نحو $F$ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall \alpha \ \beta \in k, \ \ \forall \ x, \ \ y \in E : \ \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

# المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي

## Matrix associated to linear transformation

ليكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ أساس في الفضاء الشعاعي $E$ على الحقل $K$. و $\{w_1, \ldots, w_m\}$ أساس في فضاء شعاعي $F$ على الحقل $K$ و $dim(E) = n$ و $dim(F) = m$. إذا كان $f$ تطبيق خطي، بحيث:

$$f : \mathbf{E} \to \mathbf{F} \Rightarrow \begin{cases} f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\ f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \ldots + a_{mj}w_m \\ f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m \end{cases}$$

# المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي

## Matrix associated to linear transformation

يمكن تمثيل هذا التطبيق بمصفوفة من مقاس $m \times n$ كالتالي:

$$M(f) = \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \rightarrow w_1 \\ \rightarrow w_2 \\ \vdots \\ \rightarrow w_m \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ f(v_1) & f(v_2) & \cdots & f(v_n) \end{array} & \end{array}$$

$M(f)$ هي المصفوفة المشاركة للتطبيق $f$، بحيث:
$dim(M(f)) = dim(F) \times dim(E)$.

# المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي

**ملاحظات:**

- $M(f+g)=M(f)+M(g)$
- $M(\lambda f)=\lambda M(f)$
- $M(f\circ g)=M(f)M(g)$
- إذا كان $M(f)$ تقبل مقلوبا فإن: $(M(f))^{-1}=M(f^{-1})$

# التطبيق الخطي المرافق لمصفوفة

**Linear transformation associated to a matrix**

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة من مقاس $m \times n$، وليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعين، بحيث: $dim(E) = n$ و $dim(F) = m$ و ليكن: $\{v_1, \dots, v_n\}$ أساسا في $E$ و $\{w_1, \dots, w_m\}$ أساسا في $F$.

- نسمي التطبيق $f : E \to F$ تطبيقا خطيا مرافقا لـ: $A$ إذا كان:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_j; \quad 1 \leq j \leq n$$

- نرمز لهذا التطبيق بـ: $f_A$.

# مصفوفة العبور

## Transition Matrix

ليكن الأساسين : $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ و $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ في الفضاء الشعاعي $E$ بحيث: $dim(E) = n$. ونكتب تركيب أشعة الأساس $B_2$ بدلالة الأساس $B_1$ بحيث: $w_j = \sum_{i=1}^{n}(p_{ij})v_i$.

إذا مصفوفة العبور من الأساس $B_1$ نحو الأساس $B_2$ هي المصفوفة المربعة $n \times n$ والتي تكتب من الشكل :

$$P_{B_1,B_2} = (p_{ij})$$