جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر1
2017/2016

الامتحان النهائي

التمرين 01: ليكن التطبيق f المعرف كما يلي:

$$f:\ \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$x \mapsto f(x) = sin(\pi x)$$

1. هل هذا التطبيق متباين؟ هل هو غامر؟ هل هو تقابلي؟
2. بين أن g الذي هو اقتصار f على $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ عبارة عن تقابل من $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ نحو $]-1,1[$.

التمرين 02: لتكن $\mathcal{R}$ العلاقة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*:\quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x.y > 0$$

1) بين أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^*$.
2) عين أصناف تكافؤ كل من $1, 2, -1, -\sqrt{2}$ ثم عين مجموعة حاصل القسمة $\mathbb{R}^*/_{\mathcal{R}}$.
3) هل $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$ ؟

التمرين 03: لتكن $(E,\star)$ و $(F,\bullet)$ زمرتان، نزود المجموعة $E \times F$ بقانون التركيب $\odot$ المعرف بـ:

$$\forall\ (x,y),(x',y') \in E \times F:\ (x,y) \odot (x',y') = (x \star x', y \bullet y')$$

1) بين أن : $(E \times F, \odot)$ عبارة عن زمرة.
2) لتكن E' زمرة جزئية من E و F' زمرة جزئية من F، بين أن $E' \times F'$ زمرة جزئية من $E \times F$ مزودة بالقانون $\odot$.

التمرين 04: لتكن $(G,\star)$ و $(G',\top)$ زمرتان و $f : G \longrightarrow G'$ تشاكل زمري، أثبت أن:

1) f متباين $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$.
2) f غامر $\Leftrightarrow$ $f(G) = G'$

بالتوفيق

1ère MI (Algèbre 1)

التصحيح النموذجي للإمتحان النهائي

التمرين 1 : (4 Pts)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$$
$$x \longmapsto f(x) = \sin(\pi x)$$

1) - أ

(1) f ليس متباين لأنه من أجل $x_1 = 1 \neq x_2 = 2$ لدينا

$$f(x_1) = \sin(\pi) = 0 = f(x_2) = \sin(2\pi)$$

ب) بما أن الدالة sin دالة غامرة تعريفاً (1)

$$\forall y \in [-1,1], \exists x \in \mathbb{R} : \sin x = y$$

$$\Longrightarrow \forall y \in [-1,1], \exists x' = \frac{x}{\pi} \in \mathbb{R} : \sin(\pi x') = y$$

ومنه f تطبيق غامر

د) بما أن التطبيق f ليس (1) متباين فهو ليس تقابلي

ج)

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \pi \cos(\pi x)$

$$\forall x \in \left]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right[: \pi x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$
$$\Rightarrow g'(x) > 0$$

إذن g دالة مستمرة ومتزايدة تماما فهي تقابل

التمرين 2 : (6 Pts)

لتكن $\mathcal{R}$ العلاقة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^* : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$$

1) إثبات أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ

أ] $\mathcal{R}$ انعكاسية : (1pt)

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : x \cdot x = x^2 > 0 \Rightarrow x\mathcal{R}x$$

ب] $\mathcal{R}$ تناظرية : (1pt)

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^* : x\mathcal{R}y \Rightarrow x \cdot y > 0$$
$$\Rightarrow y \cdot x > 0$$
$$\Rightarrow y\mathcal{R}x$$

د) متعدية : (1pt)

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^*$;

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y > 0 \\ \wedge \\ y \cdot z > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x \cdot y^2 \cdot z > 0$$
$$\Rightarrow x \cdot z > 0$$
$$\Rightarrow x\mathcal{R}z$$

(2

$\dot{x} = \{y \in \mathbb{R}^* : y \mathcal{R} x\}$

$= \{y \in \mathbb{R}^* : yx > 0\}$

$\dot{1} = \{y \in \mathbb{R}^* : y > 0\} = \mathbb{R}^*_+$ (0,5)

$\dot{2} = \{y \in \mathbb{R}^* : 2y > 0\} = \mathbb{R}^*_+$ (0,5)

$\dot{\overline{-1}} = \{y \in \mathbb{R}^* : -y > 0\} = \mathbb{R}^*_-$ (0,5)

$\dot{\overline{-\sqrt{2}}} = \{y \in \mathbb{R}^* : -\sqrt{2}\, y > 0\} = \mathbb{R}^*_-$ (0,5)

$\mathbb{R}^*/\mathcal{R} = \{\mathbb{R}^*_+, \mathbb{R}^*_-\}$ (0,5)

(3 $\mathcal{R}$ ليست علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$ لأنها ليست انعكاسية (0,5)

$0 \not\mathcal{R}\, 0 \Leftarrow 0.0 = 0$

التمرين 3 (6pts)

$(E,*)$ و $(E,\bullet)$ زمرتان، نعرف العملية $\odot$ كمايلي

$\forall (x,y),(x',y') \in E\times F$

$(x,y)\odot(x',y') = (x*x', y\bullet y')$

(1 إثبات أن $(E\times F, \odot)$ زمرة

(أ $\odot$ عملية داخلية :

$\forall (x,y),(x',y') \in E\times F :$

$(x,y)\odot(x',y') = (x*x', y\cdot y') \in E\times F$

لأنه :

(0,75)

$\forall x,x' \in E \Rightarrow x*x' \in E$

(* عملية داخلية في E)

و

$\forall y,y' \in F \Rightarrow y\bullet y' \in F$

(لأن $\bullet$ عملية داخلية في F)

(ب $\odot$ تجميعية :

$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'')$

$I = (x,y)\odot((x',y')\odot(x'',y''))$

$= (x,y)\odot(x'*x'', y'\bullet y'')$

$= (x*(x'*x''), y\bullet(y'\bullet y''))$

(1)

$J = ((x,y)\odot(x',y'))\odot(x'',y'')$

$= (x*x', y*y')\odot(x'',y'')$

$= ((x*x')*x'', (y*y')*y'')$

بما أن * تجميعية في E أي

$\forall x,x',x'' \in E :$

$x*(x'*x'') = (x*x')*x''$

و $\bullet$ تجميعية في F أي

$\forall y,y',y'' \in F :$

$y\bullet(y'\bullet y'') = (y\bullet y')\bullet y''$

إذن $I = J$ ومنه $\odot$ تجميعية في $E\times F$

د) العنصر الحيادي :

ليكن e_E العنصر الحيادي في E بالنسبة لـ $*$

و e_F العنصر الحيادي في F بالنسبة لـ $\cdot$

1) نلاحظ أنه

$\forall (x,y)\in E\times F$:

$$(x,y)\odot(e_E,e_F)=(x*e_E,y\cdot e_F)=(x,y)$$

$$(e_E,e_F)\odot(x,y)=(e_E*x,e_F\cdot y)=(x,y)$$

ومنه (e_E,e_F) هو العنصر الحيادي في $E\times F$ بالنسبة للعملية $\odot$

د) العنصر النظير:

ليكن x^{-1} نظير x بالنسبة للعملية $(*)$

و y^{-1} نظير y بالنسبة للعملية $\cdot$

1) نلاحظ أن

$\forall (x,y)\in E\times F$:

$$\begin{cases}(x,y)\odot(x^{-1},y^{-1})=(x*x^{-1},y\cdot y^{-1})=(e_E,e_F)\\ \wedge\\ (x^{-1},y^{-1})\odot(x,y)=(x^{-1}*x,y^{-1}\cdot y)=(e_E,e_F)\end{cases}$$

إذن نظير (x,y) بالنسبة للعملية $\odot$ هو (x^{-1},y^{-1})

2) E' زمرة جزئية من E و F' زمرة جزئية من F

إثبات أن $E'\times F'$ زمرة جزئية من $E\times F$

لدينا

$(E'\times F')$ زمرة جزئية من $E\times F$ $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} i)\ E'\times F'\neq\emptyset\\ ii)\ \forall (x,y),(x',y')\in E'\times F' \Rightarrow (x,y)\odot(x',y')\in E'\times F'\\ iii)\ \forall (x,y)\in E'\times F' \Rightarrow (x^{-1},y^{-1})\in E'\times F'\end{cases}$$

i) لدينا

$$e_E\in E' \wedge e_F\in F' \Rightarrow (e_E,e_F)\in E'\times F'$$

ومنه $E'\times F'\neq\emptyset$ 0.75

iii)

$\forall (x,y),(x',y')\in E$;

$$\begin{cases}x,x'\in E'\\ \wedge\\ y,y'\in F'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x*x'\in E'\\ \wedge\\ y\cdot y'\in F'\end{cases}$$

0.75

$$\Rightarrow (x,y)\odot(x',y')=(x*x',y\cdot y')\in E'\times F'$$

(iii (0,75)

$$(x,y)\in E'\times F' \Rightarrow \begin{cases} x\in E' \\ \wedge \\ y\in F' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{-1}\in E' \\ \wedge \\ y^{-1}\in F' \end{cases} \Rightarrow (x^{-1},y^{-1})\in E'\times F'$$

ومنه $E'\times F'$ ز ج من $E\times F$

التمرين 4 : (4 pts)

$(G,*)$ و (G',T) زمرتان

e العنصر الحيادي في G

و e' // // في G'

$$f : G \longrightarrow G'$$

1) إثبات أن

f متباين $\Longleftrightarrow \ker f=\{e\}$

أ) "$\Leftarrow$" ؟ (1)

نفرض أن f متباين ونبين أن $\ker f=\{e\}$

لدينا

$$\ker f=\{x\in G : f(x)=e'\}$$

بما أن $f(e)=e'$

إذن $e\in \ker f$

أي $\{e\}\subset \ker f$

إثبات أن $\ker f\subset\{e\}$

$$x\in \ker f \Rightarrow f(x)=e'=f(e)$$

$$\Rightarrow x=e \quad (\text{لأن } f \text{ متباين})$$

ومنه $\ker f\subset\{e\}$

إذن $\ker f=\{e\}$

ب) "$\Rightarrow$" ؟ (1)

نفرض أن $\ker f=\{e\}$ ونبين أن f متباين

$$\forall x_1,x_2\in G : f(x_1)=f(x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1)\,T\,[f(x_2)]^{-1}=e'$$

$$\Rightarrow f(x_1)\,T\,f(x_2^{-1})=e'$$

$$\Rightarrow f(x_1 * x_2^{-1})=e'$$

$$\Rightarrow x_1 * x_2^{-1}\in \ker f=\{e\}$$

$$\Rightarrow x_1 * x_2^{-1}=e$$

$$\Rightarrow x_1=x_2$$

ومنه f متباين

2) إثبات أن

f غامر $\Longleftrightarrow f(G)=G'$

أ) "$\Leftarrow$"

نفرض أن f غامر ونبين أن $f(G)=G'$

لدينا $f(G) \subset G'$ ، بقي إثبات
أن $G' \in f(G)$

1

$y \in G' \Rightarrow \exists x \in G : f(x) = y$
$\Rightarrow y \in f(G)$
ومنه $G' \subset f(G)$
إذن $f(G) = G'$

ب) $\Rightarrow$
نفرض أن $f(G) = G'$ ونبين
أن f غامر

1

ليكن
$y \in G' = f(G) \Rightarrow$
$y \in f(G) \Rightarrow \exists x \in G : f(x) = y$
ومنه f غامر