ملخص محاضرات اختبار الفروض

1- اختبار الفروض حول وسط المجتمع μ:

1-1. اختبار الفروض حول وسط المجتمع μ حالة المجتمع طبيعي تباينه معلوم:

إذا كانت $(x_1,x_2......,x_n)$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 معلوم، فان إحصاء الاختبار المناسبة هي: $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ، أما القيمة المجدولة فتحدد قيمتها وفق الحالات التالية:

H_0	H_1	نقبل H_0 إذا كان
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_c \rvert < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu < \mu_0$	$Z_c > -z_{1-\alpha}$
	$\mu > \mu_0$	$Z_c < z_{1-\alpha}$

مثال (01): تخضع أوزان عبوات أحد مساحيق الغسيل لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 7 غ ومعدله μ عند مستوى الدلالة 0.05 اختبر الفرضية الصفرية: $H_0: \mu=200$ مقابل الفرضية البديلة $H_1: \mu\neq 200$ ، إذا كان الوسط الحسابي لعينة حجمها 25 هو 208 .

الحل:

$$H_0: \mu = 200$$
$$H_1: \mu \neq 200$$
$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين، والقيم الحرجة تكون:

$$-z_{1-\alpha/2} = -z_{0.975} = -1.96 \quad ، \quad z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان: $\lvert Z_c \rvert > 1.96$

والآن نقوم بحساب Z_c من خلال المعادلة التالية : $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

أي : $Z_c = = \frac{208-200}{7/\sqrt{25}} = 5.5$

نلاحظ أن $1.965.5 >$ أي أن قيمة Z_c تقع في منطقة الرفض (المنطقة الحرجة) ، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية 0.05، أي $\mu>200$ ، لأن Z_c وقعت في منطقة رفض H_0.

2-1.اختبار الفروض حول وسط المجتمع ، عندما يكون تباين المجتمع مجهول.

هنا تصادفنا حالتين، حالة حجم العينة كبير وحالة حجم العينة صغير.

1) حالة التباين مجهول وحجم العينة كبير.

إذا تم أخذ عينة عشوائية كبيرة الحجم من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 **مجهول** ، فان إحصاء الاختبار المناسب هو: $Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s'}{\sqrt{n}}}$

اما القيمة المحسوبة فتحدد وفق الحالات التالية:

H_0	H_1	نقبل H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_c \rvert < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu < \mu_0$	$Z_c > -z_{1-\alpha}$
	$\mu > \mu_0$	$Z_c < z_{1-\alpha}$

مثال (02): تخضع أعداد حبات التفاح على شجرة التفاح في بستان كبير لتوزيع طبيعي وسطه 150 حبة ، بدأ مالك البستان استعمال نوع جديد من السماد ، وأراد أن يختبر ما إذا زاد الإنتاج، تبعا لذلك أخذ عينة مكونة من 64 شجرة، فوجد أن الوسط الحسابي لأعداد الحبات في العينة 156 بانحراف معياري 12 حبة .

المطلوب: هل تشير هذه البيانات إلى زيادة في الإنتاج عند مستوى الدلالة 0.05 .

الحل:

إذا لم يكن هناك زيادة في إنتاج الأشجار التي تم تسميدها فهذا يعني أن معدل عدد الحبات يكون $\mu = 150$ ، أما إذا كان هناك زيادة في الإنتاج فهذا يعني أن المعدل سيكون أكثر من 150 .

وبالتالي المطلوب اختبار ما يلي: $H_0: \mu=150$

$H_1: \mu>150$

$\alpha = 0.05$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد، إذن القيمة الحرجة هي : $z_{0.95} = 1.645$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان: $Z_C > 1.645$

والآن نقوم بحساب Z_C من خلال المعادلة التالية : $Z_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s'}{\sqrt{n}}}$

فنجد: $Z_C = \frac{156-150}{12/\sqrt{64}} = 4$

نلاحظ أن $4>1.645$ أي أن قيمة Z_C تقع في منطقة الرفض (المنطقة الحرجة) ، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية 0.05 ؛ أي أن هناك زيادة في الإنتاج ، ومن ثم فان المعدل سيكون أكثر من 150 .

2) اختبار الفروض حول وسط المجتمع عندما يكون هذا المجتمع طبيعي ذو تباين مجهول وحجم العينة صغير:

إذا تم أخذ عينة عشوائية صغيرة الحجم من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 **مجهول**، فان إحصاء الاختبار المناسب

هو: $T_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s'}{\sqrt{n}}}$.

أما القيمة المجدولة فتحدد وفق الحالات التالية:

H_0	H_1	نقبل H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert T_c \rvert < t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$
	$\mu < \mu_0$	$T_c > -t_{1-\alpha, n-1}$
	$\mu > \mu_0$	$T_c < t_{1-\alpha, n-1}$

مثال (03): استنتج أحد الباحثين أن معدل عدد الساعات التي يقضيها طلبة إحدى الجامعات في الدراسة أثناء أسبوع الامتحانات هو 50 ساعة ، والمطلوب هو اختبار هذه الفرضية مقابل فرضية أن معدل عدد الساعات يختلف عن 50 ساعة ، إذا كان الوسط الحسابي لعدد الساعات التي قضاها 10 طلاب أثناء ذلك الأسبوع هو 7.51 ساعة بانحراف معياري 6.3 ساعة .مع العلم أن مستوى الدلالة هو 0.05 ، وتوزيع عدد الساعات الدراسية يقترب من التوزيع الطبيعي .

الحل:

$$H_0: \ \mu = 50$$
$$H_1: \ \mu \neq 50$$
$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين، وبما أن توزيع المجتمع طبيعي، وتباينه غر معلوم، وحجم العينة صغير، نستعمل توزيع t بدرجات حرية $(n-1)$ ، ولذلك فالقيم الحرجة هي:

$$-t_{(0.975,9)} = -2.262 \quad ، \quad t_{(0.975,9)} = 2.262$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان : $\lvert T_C \rvert < 2.262$

والآن نقوم بحساب T_C من خلال المعادلة التالية : $T_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

أي : $T_C = \frac{51.7-50}{6.3/\sqrt{10}} = 0.85$

نلاحظ أن $0.85 < 2.262$ ؛ أي أن قيمة T_C تقع في منطقة القبول ، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 عند مستوى المعنوية 0.05، أي أن استنتاج الباحث صحيح ($\mu=50$).