

TD N°5 : Le bruit dans les communications analogiques

Exercice N°1:

Considérons un processus aléatoire $X(t)$ défini comme suit :

$$X(t) = A \cos(\omega t + \Theta)$$

où A et ω sont des constantes et Θ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[-\pi, \pi]$.

Montrer que $X(t)$ est stationnaire au sens large.

Exercice N°2 :

Nous supposons que le message $M(t)$ est un processus aléatoire stationnaire au sens large avec la fonction d'autocorrélation :

$$R_M(\tau) = 16 \operatorname{sinc}^2(10^4 \tau)$$

On connaît aussi que toutes les réalisations du processus de message vérifient la condition : $\max |m(t)| = 6$.

Nous voulons transmettre ce message à une destination via un canal avec une atténuation de 50 dB et un bruit blanc additif de densité spectrale de puissance $S_n(f) = N_0/2 = 10^{-12}$ W/Hz. Nous souhaitons également obtenir un SNR à la sortie du modulateur d'au moins 50 dB.

Quelle est la puissance d'émission et la bande passante de canal requises si nous utilisons les modulations suivantes ?

- 1- DSB AM.
- 2- SSB AM.
- 3- AM ordinaire avec un index de modulation $\mu = 0.8$.

Exercice N°3 :

Montrer qu'en modulation d'amplitude sinusoïdale, le rapport signal sur bruit en sortie du détecteur d'enveloppe a pour expression :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2} \gamma$$

μ est l'index de modulation.

Le signal modulant a pour expression: $X(t) = \cos(\omega_m t)$.

Le coefficient γ a pour expression : $\gamma = \left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{S_e}{N_0 B}$.

S_e est la puissance du signal AM à l'entrée du détecteur d'enveloppe.

La densité spectrale de puissance du bruit est donnée par : $S_{nn}(f) = \frac{N_0}{2}$.

Rappels théorique :

1) Un processus aléatoire $X(t)$ est dit *stationnaire au sens large* (SSL) si :

- sa moyenne conserve une valeur constante : $E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x; t) dx = \mu_X$,

- son autocorrélation ne dépend que de l'écart de temps τ :

$$E[X(t)X(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t + \tau) f_X(x; t) dx = R_{XX}(\tau),$$

- sa fonction d'autocovariance ne dépende que de l'écart de temps τ : $C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2$.

2) La puissance moyenne d'un processus SSL est indépendante de t et a pour valeur:

$$E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f) df$$

$S_{XX}(f)$ est la densité spectrale de puissance.