جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى رياضيات
مقياس جبر1
2023/2022

السلسلة رقم 01

المنطق الرياضي وأنماط البرهان

التمرين 01:

من بين العبارات التالية عين القضايا مع ذكر صحة أو خطأ كل واحدة منها:

1) $2+3=5$
2) $\forall n\in\mathbb{N},\ n+2=4$
3) $\exists n\in\mathbb{N},\ n+2=3$
4) هذا التمرين صعب
5) $x\in\mathbb{N}$

التمرين 02:

لتكن P و Q و R ثلاث قضايا منطقية

1. حدد في جدول واحد للحقيقة القضايا التالية:

$$P,\ \ Q\ ,\ \ \bar{P},\ \bar{Q},\ \ \bar{P}\wedge\bar{Q},\ \ \bar{P}\vee\bar{Q},\ \ P\wedge Q\ ,\ \ P\vee Q\ ,\ \ \overline{P\wedge Q},\ \ \overline{P\vee Q}$$

ماذا تلاحظ؟

2. في أي حالة تكون القضايا التالية صحيحة ؟

أ) $\left(P\Rightarrow Q\right)\wedge\left(\bar{P}\Rightarrow Q\right)$

ب) $\overline{P\wedge(\overline{Q\wedge R})}\Leftrightarrow Q$

ج) $(P\vee Q\Longrightarrow R)\Leftrightarrow(P\Longrightarrow R)\wedge(\mathrm{Q}\Longrightarrow\mathrm{R})$

التمرين 03:

لتكن القضايا المنطقية التالية:

أ) $\exists x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}\ \ x>y$
ب) $\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R}\ \ x+y>0$
ج) $\exists x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R}\ \ x+y=0$
د) $\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}\ \ x+y>0$
هـ) $\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}\ \ y^2>x$
و) $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}\ \ x+y>0$

هل هذه القضايا صحيحة أم خاطئة؟ أعط نفي كل قضية.

التمرين 04:

فيما يلي f وg دالتان من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$، باستعمال المكممات، اكتب العبارات التالية:

1) f محدودة من الأعلى
2) f فردية
3) f زوجية
4) f متزايدة
5) f لا تنعدم أبدا
6) f ليست الدالة المعدومة

7) من أجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد حقيقي y أكبر منه.

8) يوجد عدد حقيقي y أكبر من كل عدد حقيقي x.

9) كل عدد حقيقي x موجب هو مربع عدد حقيقي آخر y.

10) من أجل كل عدد حقيقي x، إذا كان x موجبا فهو مربع عدد حقيقي آخر y.

التمرين 05:

1. باستعمال البرهان بالخلف برهن ما يلي:

ا) $\sqrt{2}$ ليس عدد ناطق

ب) إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ إذن (n^2+1) ليس مربع عدد طبيعي

2. برهن بالتراجع على ما يلي:

ا) $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ 1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ب) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n > n$

3. باستعمال البرهان بالعكس النقيض برهن أنه إذا كان العدد الصحيح (n^2-1) غير قابل للقسمة على 8، إذن n زوجي.

4. برهن باستعمال مثال مضاد $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x<3 \Rightarrow x^2<9$

5. باستعمال البرهان المباشر برهن ما يلي

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+ \ x \le y \implies x \le \frac{x+y}{2} \le y, \ \ x \le \sqrt{xy} \le y$$

جامعة محمد خيضر بسكرة
ك.ع.د.ع.ط.ح
قسم الرياضيات

السنة الأولى رياضيات و MI
مقياس: جبر 1
2023 / 2022

السلسلة 01

المنطق الرياضي وأنماط البرهان

التمرين 01:

من بين العبارات التالية، تعيين القضايا مع ذكر صحة أو خطأ كل واحدة منها:

1) $2+3=5$

هذه العبارة قضية منطقية صحيحة.

2) $\forall n\in\mathbb{N},\ n+2=4$

هذه العبارة قضية منطقية خاطئة.

لأن: $\exists n=1\in\mathbb{N}:\ 1+2=3\neq 4$

3) $\exists n\in\mathbb{N},\ n+2=3$

هذه العبارة قضية منطقية صحيحة.

لأن: $\exists n=1\in\mathbb{N}:\ 1+2=3$

4) هذا التمرين صعب.

هذه العبارة ليست قضية منطقية.

5) $x\in\mathbb{N}$

هذه العبارة ليست قضية منطقية.

التمرين 02:

لتكن P, Q و R ثلاث قضايا منطقية

1. نحدد في جدول واحد للحقيقة القضايا:

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{P}\wedge\bar{Q}$	$\bar{P}\vee\bar{Q}$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$\overline{P\wedge Q}$	$\overline{P\vee Q}$
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1

نلاحظ أن:

$\overline{P\wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P}\vee\bar{Q}$

$\overline{P\vee Q} \Leftrightarrow \bar{P}\wedge\bar{Q}$

2. في أي حالة تكون القضايا التالية صحيحة؟

أ) $(P\Rightarrow Q)\wedge(\bar{P}\Rightarrow Q)$

P	Q	$\bar{P}$	$P\Rightarrow Q$	$\bar{P}\Rightarrow Q$	$(P\Rightarrow Q)\wedge(\bar{P}\Rightarrow Q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0

ب) $\overline{P\wedge(\overline{Q\wedge R})} \Leftrightarrow Q$

P	② Q	R	$Q\wedge R$	$\overline{Q\wedge R}$	$P\wedge(\overline{Q\wedge R})$	① $\overline{P\wedge(\overline{Q\wedge R})}$	①⇔②
1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0

ج) $((P\vee Q)\Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P\Rightarrow R)\wedge(Q\Rightarrow R))$

P	Q	R	$P\vee Q$	④ $(P\vee Q)\Rightarrow R$	① $P\Rightarrow R$	② $Q\Rightarrow R$	③ ①∧②	③⇔④
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

التمرين 03:

لتكن القضايا المنطقية التالية:

هل هذه القضايا صحيحة أم خاطئة مع إعطاء نفيها:

أ) $\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ x>y$

ط1) نفرض أنه يوجد x من $\mathbb{R}$ حيث: $x>y$

من أجل كل y من $\mathbb{R}$ إذن: $y<x, \forall y\in\mathbb{R}$

أي أن مجموعة الأعداد الحقيقية محدودة من الأعلى وهذا غير ممكن

إذن: القضية (أ) خاطئة.

ط2) القضية (أ) خاطئة لأنها غير محققة من أجل $(y=2x)$

(أو من أجل أي قيمة لـ y تحقق $y>x$) مثال مضاد

نفيها: $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\ x\leq y$

ب) $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\ x+y>0$

القضية (ب) صحيحة لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يوجد y $(y=-x+1)$ يحقق:

$x-x+1=1>0$

نفيها: $\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ x+y\leq 0$

ج) $\exists x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\ x+y=0$

القضية (ج) صحيحة لأنه:

$\exists x=3\in\mathbb{R}\ \exists y=-3\in\mathbb{R}: 3-3=0$

(أو يمكن بصفة عامة إيجاد عددين حقيقيين متعاكسين في الإشارة ومجموعهما يساوي 0)

نفيها: $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ x+y\neq 0$

د) $\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ x+y>0$

ط1) نفرض أنه يوجد x من $\mathbb{R}$ حيث: $x+y>0$

من أجل كل y من $\mathbb{R}$ إذن: $y>-x, \forall y\in\mathbb{R}$

أي: مجموعة الأعداد الحقيقية محدودة من الأدنى وهذا غير ممكن إذن: هذه القضية خاطئة.

ط2) القضية (د) خاطئة لأنها غير محققة من أجل $(y=-2x)$

(أو من أجل أي قيمة لـ y تحقق: $y<-x$) مثال مضاد

نفيها: $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\ x+y\leq 0$

هـ) $\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ y^2>x$

(هل يوجد عدد حقيقي أقل تماما من مربع أي عدد حقيقي)

القضية (د) صحيحة (لأن العدد السالب أقل تماما من مربع أي عدد حقيقي)

أي:

$\exists x=-1\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}\ y^2>-1$

نفيها: $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\ y^2\leq x$

و) $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ x+y>0$

القضية (ج) خاطئة مثال مضاد على ذلك:

$x=-1\ , y=-3$

$x+y=-1-3=-4<0$

(مجموع عددين حقيقيين سالبين هو عدد حقيقي سالب)

نفيها: $\exists x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\ x+y\leq 0$

التمرين 04:

فيما يلي f و g دالتان من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$، باستعمال المكممات، نكتب العبارات التالية:

1) f محدودة من الأعلى:

$\exists M\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq M$

2) f فردية: $\forall x\in\mathbb{R}: f(-x)=-f(x)$

3) f زوجية: $\forall x\in\mathbb{R}: f(-x)=f(x)$

4) f متزايدة: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2: x\leq y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$

5) f لا تنعدم أبدا: $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)\neq 0$

6) f ليست الدالة المعدومة:

f الدالة المعدومة: $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=0$

f ليست الدالة المعدومة: $\exists x\in\mathbb{R}: f(x)\neq 0$

7) من أجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد حقيقي y أكبر منه.

$\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\ x\leq y$

8) يوجد عدد حقيقي y أكبر من كل عدد حقيقي x.

$\exists y\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}\ y\geq x$

9) كل عدد حقيقي x موجب هو مربع عدد حقيقي آخر y.

$\forall x\in\mathbb{R}_+\ \exists y\in\mathbb{R}\ x=y^2$

10) من أجل كل عدد حقيقي x، إذا كان x موجبا فهو مربع عدد حقيقي آخر y.

$\forall x\in\mathbb{R}: x\geq 0 \Rightarrow \exists y\in\mathbb{R}: x=y^2$

التمرين 05:

1. باستعمال البرهان بالخلف نبرهن ما يلي:

> لاثبات قضية بالخلف نفرض انه هذه القضية خاطئة اذن نفيها صحيحة ونجد تناقض

أ)

نفرض أن القضية خاطئة اذن نفيها صحيحة

أي: أن $\sqrt{2}$ عدد ناطق

$\boxed{\text{تعريف: } x \text{ عدد ناطق } \Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{Z}, \exists b\in\mathbb{Z}^*: x=\frac{a}{b}}$

$\Rightarrow \exists a\in\mathbb{Z}, \exists b\in\mathbb{Z}^*: \sqrt{2}=\frac{a}{b} \quad tq: pgcd(a,b)=1$

$\sqrt{2}=\frac{a}{b} \Rightarrow 2=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2=2b^2 \quad \dots(*)$

$\Rightarrow$ a^2 عدد زوجي

$\Rightarrow$ a عدد زوجي $\dots(1)$

$\boxed{\text{قاعدة: } a^2 \text{ عدد زوجي} \Rightarrow a \text{ عدد زوجي}}$

$\Rightarrow a=2k \;,\; k\in\mathbb{Z}$

$(*) \Rightarrow 4k^2=2b^2 \Rightarrow b^2=2k^2$

$\Rightarrow$ b^2 عدد زوجي

$\Rightarrow$ b عدد زوجي $\dots(2)$

من(1) و(2) نجد أن: كل من a و b هما عددين زوجيين

تناقض لأن: $pgcd(a,b)=1$.

ومنه: $\sqrt{2}$ عدد ناطق

ب) إذا كان $n\in\mathbb{N}^*$ اذن (n^2+1) ليس مربع عدد طبيعي

$\forall n\in\mathbb{N}, \exists m\in\mathbb{N}: n\neq 0 \Rightarrow n^2+1=m^2$??

نفرض أن هذه القضية خاطئة اذن: نفيها صحيح

أي: $\exists n\in\mathbb{N}, \forall m\in\mathbb{N}: n\neq 0 \wedge n^2+1\neq m^2 \dots(*)$

ط1) لدينا: $n^2+1=m^2$

من أجل $m=1$ لدينا:

$n^2=0 \Rightarrow n=0$

وهذا تناقض مع كون $n\neq 0$

اذن: القضية ب) صحيحة

ط2) لدينا: القضية (*) خاطئة

لأنه: (مربع أي عدد طبيعي) m^2

يساوي n^2+1 (ثابت) $(\exists n\in\mathbb{N})$

وهذا غير ممكن.

اذن: القضية ب) صحيحة.

2. نبرهن بالتراجع على ما يلي:

أ) $\forall n\in\mathbb{N}^*: 1+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

• الفرضية الابتدائية: من أجل $n=1$.

الطرف الأول 1

الطرف الثاني $\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}=\frac{6}{6}=1$

الطرف الثاني $=1=$ الطرف الأول

ومنه: المساواة محققة من أجل $n=1$

• نفرض أن القضية صحيحة من أجل n أي:

$1+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ونبين صحتها من أجل $(n+1)$ أي اثبات:

$1+2^2+3^2+\dots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$??

$\underbrace{1+2^2+3^2+\dots+n^2}+(n+1)^2$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$ (من الفرض)

$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$

$=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$

$=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$

$=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

$$\begin{array}{r|l} 2n^2+7n+6 & n+2 \\ \hline -2n^2+4n & 2n+3 \\ 0 \quad 3n+6 & \\ 3n+6 & \\ 0 & \end{array}$$

$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

ومنه: القضية صحيحة من أجل $(n+1)$

وبالتالي: حسب مبدأ البرهان بالتراجع:

$\forall n\in\mathbb{N}^* \; 1+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ب) $\forall n\in\mathbb{N} \quad 2^n>n$.

① الفرضية الابتدائية: من أجل: $n=0$. $\quad 2^0=1>0$

اذن: الفرضية الابتدائية محققة.

② نفرض ان القضية صحيحة من أجل n أي: $\forall n\in\mathbb{N} \quad 2^n>n$

ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ اي اثبات: $2^{n+1}>n+1$??

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N} \quad 2^n>n \quad \dots(1)$

ولدينا: $2>1$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad 2^n>1^n=1 \quad \dots(2)$

بجمع المتراجحتين (1) و(2) طرف بطرف:

$2^n+2^n>n+1$

$\Rightarrow 2\cdot2^n>n+1$

$\Rightarrow 2^{n+1}>n+1$

ومنه: حسب مبدأ البرهان بالتراجع: $\forall n\in\mathbb{N} \quad 2^n>n$

3. باستعمال البرهان بالعكس النقيض نبرهن أن:

(العكس النقيض)
اثبات $(P \Rightarrow Q)$ بالعكس النقيض يكافئ اثبات $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.

n زوجي $\overset{??}{\Leftarrow}$ العدد الصحيح (n^2-1) غير قابل للقسمة على 8

اثبات هذا الاستلزام بالعكس النقيض يكافئ اثبات:
العدد الصحيح (n^2-1) قابل للقسمة على 8 $\overset{??}{\Leftarrow}$ n فردي.
نفرض أن: n فردي.
معناه: $\exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k+1$

$$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$$
$$\Rightarrow n^2 - 1 = 4k^2+4k.$$

لدينا حالتين:
- الحالة 1: k زوجي أي: $\exists k' \in \mathbb{Z} : k = 2k'$

يصبح بذلك:
$$n^2-1 = 4(2k')^2+4(2k') = 4\cdot 4k'^2 + 8k' = 8\underbrace{(2k'^2+k')}_{\in \mathbb{Z}}$$

اذن: في هذه الحالة (n^2-1) قابل للقسمة على 8.
- الحالة 2: k فردي أي: $\exists k' \in \mathbb{Z} : k = 2k'+1$

يصبح بذلك:
$$n^2-1 = 4(2k'+1)^2+4(2k'+1)$$
$$= 4(4k'^2+4k'+1)+8k'+4.$$
$$= 16k'^2+16k'+4+8k'+4$$
$$= 16k'^2+24k'+8$$
$$= 8\underbrace{(2k'^2+3k'+1)}_{\in \mathbb{Z}}$$

اذن: في هذه الحالة أيضا (n^2-1) قابل للقسمة على 8.
ومنه: العدد الصحيح (n^2-1) قابل للقسمة على 8 $\Leftarrow$ n فردي
وبالتالي n زوجي $\Leftarrow$ العدد الصحيح (n^2-1) غير قابل للقسمة على 8

4. نبرهن باستعمال مثال مضاد

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$$

$$\exists x = -4 \in \mathbb{R} : -4 < 3$$
لكن $(-4)^2 = 16 > 9$

5. باستعمال البرهان المباشر نبرهن أن:

ليكن $x,y \in \mathbb{R}_+$ نبين أنه
إذا كان $x \leq y$ فإن: $x \leq \frac{x+y}{2} \leq y$
و $x \leq \sqrt{xy} \leq y$

نفرض أن $x \leq y$

$$y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow xy \leq y^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{xy} \leq y \quad \ldots (*)$$
$$x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x^2 \leq xy$$
$$\Rightarrow x \leq \sqrt{xy} \quad \ldots (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أن: $x \leq \sqrt{xy} \leq y$

$$x \leq y \Rightarrow x+y \leq y+y$$
$$\Rightarrow x+y \leq 2y$$
$$\Rightarrow \frac{x+y}{2} \leq y \quad \ldots (*)$$
$$x \leq y \Rightarrow x+x \leq x+y$$
$$\Rightarrow 2x \leq x+y$$
$$\Rightarrow x \leq \frac{x+y}{2} \quad \ldots (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أن: $x \leq \frac{x+y}{2} \leq y$