2/ المجموعات

1.2 عمليات على المجموعات:

1.1.2 تعاريف:

1- تسمى المجموعة كل تشكيلة من العناصر أو جملة من العناصر التي تحقق خاصية ما.

2- تسمى المجموعة التي تحوي جميع المجموعات الجزئية لE مجموعة أجزاء E ونرمز لها ب $\mathcal{P}(E)$.

لدينا $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subseteq E$

لتكن $A \in \mathcal{P}(E)$ نسمي المجموعة المتممة ل A المجموعة التي تحوي عناصر E التي لا تنتمي الى A ونرمز لها C_E^A أو A^C أي $C_E^A = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$

3- نسمي اتحاد مجموعتين A و B المجموعة المتكونة من العناصر x التي تنتمي الى A أو الى B ونرمز لها $A \cup B$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

1.1.2 فرضية: لتكن A و B و C ثلاث مجموعات من E لدينا:

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B) \cup (A\cap C)$

$A\cup (B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$

نقول أن التقاطع توزيعي على الاتحاد و العكس.

البرهان: نبين أن $A\cap(B\cup C) = (A\cap B) \cup (A\cap C)$

$x \in A\cap(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B\cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in (A\cap B) \vee x \in (A\cap C)$

$\Leftrightarrow x \in (A\cap B) \cup (A\cap C)$

3.1.2 فرضية (loi de Morgan): لتكن A وB مجموعتان جزئيتان من E لدينا إذن:

$$C_E^{(A\cap B)} = C_E^{A} \cup C_E^{B}$$

و

$$C_E^{(A\cup B)} = C_E^{A} \cap C_E^{B}$$

البرهان: إثبات أن

$$C_E^{(A\cup B)} = C_E^{A} \cap C_E^{B}$$

$x \in C_E^{(A\cup B)} \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \notin A \cup B)$

$\Leftrightarrow (x \in E) \wedge \overline{(x \in A \cup B)}$

$\Leftrightarrow (x \in E) \wedge \overline{(x \in A \vee x \in B)}$

$\Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)$

$\Leftrightarrow (x \in E \wedge x \notin A) \wedge (x \in E \wedge x \notin B)$

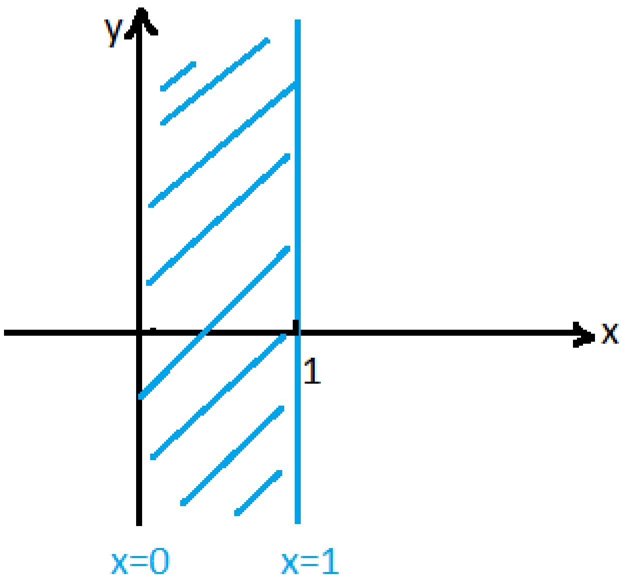
$\Leftrightarrow x \in C_E^{A} \wedge x \in C_E^{B} \Leftrightarrow x \in C_E^{A} \cap C_E^{B}$

4.1.2 الجداء الديكارتي: نسمي الجداء الديكارتي لمجموعتين E وF مجموعة الثنائيات من الشكل (x,y) حيث: $x \in E$ و $y \in F$ ونرمز له ب $E \times F$ ونكتب:

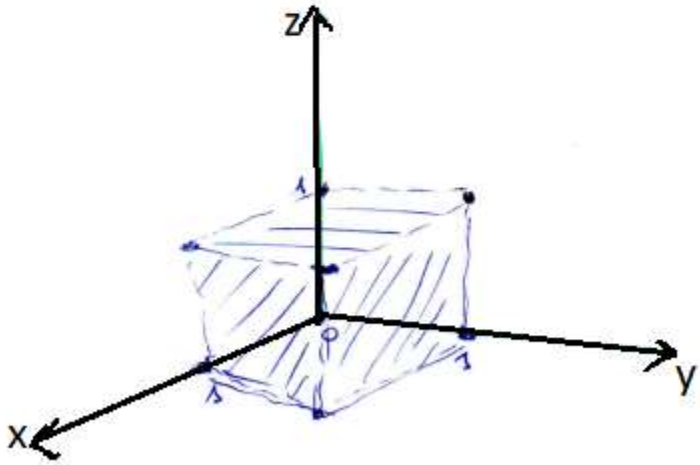
$$E \times F = \{(x, y) / x \in E \wedge y \in F\}$$

1 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

② $[0,1] \times \mathbb{R} = \{(x,y)\ /0 \leq x \leq 1 \wedge y \in \mathbb{R}\}$



③ $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] = \{(x ,y ,z)\ /0 \leq x, y, z \leq 1\}$



فرضية: لتكن D,C,B,A مجموعات جزئية من E لدينا العلاقات التالية:

$(A\times C) \cup (B\times C) = (A\cup B) \times C$

$(A\times C) \cup (A\times D) = A\times (C\cup D)$

$(A\times C) \cap (B\times D) = (A\cap B) \times (C \cap D)$

البرهان: إثبات أن

$(A\times C)\cup(B\times C)=(A\cup B)\times C$

$(x,y)\in(A\cup B)\times C \Leftrightarrow x\in A\cup B \wedge y\in C$

$\Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B)\wedge y\in C \Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times C \vee (x,y)\in B\times C \Leftrightarrow (x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$

تمرين:

1/باستعمال التعريف بين أن:

$A\neq B \Leftrightarrow \exists\, a\in A\setminus B \cup \exists\, b\in B\setminus A$

2/عين $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

3/ بين أن

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$C_E^{(A\cup B)} = C_E^A \cap C_E^B$

4/ عين

$\{1,2,3\}\times\{1,2,3,4\}$

5/ مثل بيانيا المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}^2$ التالية:

$(]0,1[\cup]2,3[)\times[1,-1]$, $(\mathbb{R}\setminus]0,1[\cup]2,3[)\times(\mathbb{R}\setminus]-1,1[\cup]0,2[)$.