تمرين 9 : لتكن E مجموعة و A و B مجموعتين جزئيتين من E.
أثبت أن $A\Delta B = B$ (الفرق التناظري) إذا وفقط إذا كانت $A = \varnothing$.

الحـــل

تذكر أولا أن الفرق التناظري يمكن كتابته ايضا على الشكل

$$\boxed{A\Delta B = (A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)}$$

حيث $\bar{A}$ تمثل متمم المجموعة A في E.
هناك إحتواء سهل:
إذا كان $A=\phi$ ، فعند تعريف الفرق التناظري، لدينا $A\cap B = B$ و لأن $A=\phi$ و $\bar{A}\cap B = B$.
بالمقابل ، إذا كان $A\cap B = B$ ، يجب أن نثبت أن $A=\phi$.
سنقسم الإثبات إلى قسمين:
أو لا: نثبت أن $A\cap B=\phi$.
ليكن $x\in B$، و على وجه الخصوص $x\in A\cap B$ ، و يعني حتما أن $x\in A\cap\bar{B}$ أو $x\in\bar{A}\cap B$.
الاحتمال الأول مستحيل (لأن $x\in B$) وبالتالي لدينا الإحتمال الثاني هو الصحيح $x\in\bar{A}\cap B$.
وبالتالي ، فإن كل عنصر من عناصر من المجموعة B موجود أيضا في $\bar{A}$ ، وبالتالي $A\cap B=\phi$.

سنثبت أيضاً أن $A\cap\bar{B}=\phi$.
في الواقع ، لنفرض أنه يمكننا إيجاد عنصر في $A\cap\bar{B}$. سيكون هذا العنصر أيضا في $A\cap B = B$ ، وهو أمر مستحيل لأنه سيكون في الوقت نفسه في B و $\bar{B}$.

في الأخير، المواجهة بين الخاصيتين السابقتين يعني أن $A=\phi$.

تمرين 10 : حدد ما إذا كانت العلاقات التالية انعكاسية ، تناظرية ، ضد تناظرية أو متعدية:

$$E=\mathbb{Z} \text{ و } x\mathscr{R}y \iff x=-y \quad (1)$$

$$E=\mathbb{R} \text{ و } x\mathscr{R}y \iff \cos^2 x+\sin^2 y=1 \quad (2)$$

$$E=\mathbb{N} \text{ و } x\mathscr{R}y \iff \exists p,q\geq 1,\ y=px^q \quad (3)$$

حيث p و q أعداد طبيعية.

الحـــل

(1) العلاقة ليست انعكاسية ، لأن 1 ليس لها علاقة بنفسها. في الواقع ، $-1 \neq 1$.
العلاقة تناظرية ، لأن $x=-y \Longleftrightarrow y=-x$.
العلاقة ليست ضد تناظرية ، لأن $1\mathscr{R}(-1)$ و $(-1)\mathscr{R}1$ ، بينما $1 \neq -1$.
العلاقة ليست متعدية ، وإلا فإنها ستكون متناظرة
ومنه هذه العلاقة ليست علاقة تكافؤ ، ولا علاقة ترتيب.

تمرين 11 : نعرف في $\mathbb{R}^2$ العلاقة $\mathscr{R}$ كما يلي:

$$(x,y)\mathscr{R}(x',y') \iff x=x'.$$

(1) أثبت أن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ.

(2) أوجد صنف تكافؤ العنصر $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

الحــل

العلاقة $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ لأنها:

(1) إنعكاسية لأن $x=x$ مهما يكن x ومنه $(x,y)\mathscr{R}(x,y)$

(2) تناظرية: إذا كان $(x,y)R(x',y')$ فإن $x=x'$ الذي يمكن كتابته أيضا $x'=x$ الذي يكافئ $(x',y')\mathscr{R}(x,y)$.

(3) متعدية: إذا كان $(x,y)R(x',y')$ و $(x',y')R(x'',y'')$ فإن $x=x'$ من جهة و $x'=x''$ من جهة أخرى، يعني $x=x''$ الذي ينتج لنا $(x,y)R(x'',y'')$.

نبحث الآن عن صنف تكافؤ العنصر (x_0,y_0) أي تحديد الثنائيات (x,y) التي تحقق $(x,y)\mathscr{R}(x_0,y_0)$.

لدينا

$$(x,y)\mathscr{R}(x_0,y_0) \Longrightarrow x=x_0.$$

ونستطيع أن نقول أيضا أن x يجب أن يساوي x_0 أما y يكون أي قيمة.
نستنتج أن صنف تكافؤ العنصر (x_0,y_0) هو المجموعة

$$\{(x_0,y);y\in\mathbb{R}\}.$$

تمرين 12 : نعرف على المجموعة $\mathbb{R}$ العلاقة التالية

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

(1) أثبت أن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ.

(2) أوجد صنف تكافؤ العنصر x من $\mathbb{R}$.

(3) كم يوجد من عنصر في هذه الفئة؟

الحـــل

(1) نلاحظ أن

$$x\mathscr{R}y \iff x^2 - x = y^2 - y \iff f(x) = f(y)$$

حيث $f : x \mapsto x^2 - x$ ، من السهل بعد ذلك التحقق من خلال هذا تطبيق أن $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ ، أي أنها انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

(2) ليكن $x \in \mathbb{R}$. نبحث عن العناصر y من $\mathbb{R}$ حيث $x\mathscr{R}y$.

لذلك يجب علينا حل المعادلة (في y)

$$x^2 - y^2 = x - y.$$

باستعمال

$$(x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \iff (x - y)(x + y - 1) = 0.$$

(3) حولها المعادلة هي $y = x$ و $y = 1 - x$. وبالتالي فإن صنف تكافؤ x هو المجموعة $\{x, 1 - x\}$. وهي مكونة من عنصرين.

إذا كان $x = 1 - x \Longrightarrow x = 1/2$. في هذه الحالة ، صنف تكافؤ العنصر x هو المجموعة $\{1/2\}$.

تمرين 13 : 1) لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $x \mapsto x^2$ و لتكن $A = [-1, 4]$. أوجد:

A) الصورة المباشرة للمجموعة A بواسطة التطبيق f

B) الصورة العكسية للمجموعة A بواسطة التطبيق f.

2) لتكن الدالة $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

A) ماهي الصورة المباشرة بواسطة $\sin$ للمجموعة $\mathbb{R}$؟ و المجموعة $[0,2\pi]$؟ و المجموعة $[0,\pi/2]$؟

B) ماهي الصورة العكسية بواسطة $\sin$ للمجموعة $[0,1]$؟ و المجموعة $[3,4]$؟ و المجموعة $[1,2]$؟

الحــل

1) A) **نبحث عن جميع القيم المأخوذة بواسطة x^2 عندما $x\in[-1,4]$ فبين -1 و 0 ، يتم أخذ جميع القيم من 0 إلى 1 ، وبين 0 و 4 ، جميع القيم بين 0 و 16 لذلك ، $f(A)=[0,16]$.**

B) **لدينا $x\in f^{-1}(A)$ إذا وفقط إذا كانت $x^2\in[-1,4]$ بالطبع تم استبعاد القيم السالبة ، ولكي تكون x^2 في $[0,4]$ ، فمن الضروري والكافي أن $x\in[-2,2]$ إذن لدينا $f^{-1}(A)=[-2,2]$.**

2) **الصورة المباشرة لـ $\mathbb{R}$ اعتبارا من $[0,2\pi]$ هي$[-1,1]$.**
الصورة المباشرة لـ $[0,\pi/2]$هي $[0,1]$.
لتحديد الصورة المقلوبة لـ $[0,1]$، نبحث عن الأعداد الحقيقية x مثل $\sin(x)\in[0,1]$. و منه، القيم الحقيقية التي يمكن كتابتها هي $u+k2\pi$ مع $u\in[0,\pi]$ و $k\in\mathbb{Z}$. بإمكاننا كتابة المجموعة

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi,(2k+1)\pi].$$

لا يوجد عدد حقيقي جبه في $[3,4]$ وبالتالي فإن الصورة العكسية لـ $[3,4]$ هي المجموعة الفارغة.
أخيرا، الصورة العكسية لـ $[1,2]$ مطابقة للصورة العكسية لـ $\{1\}$ ، وهي تساوي $\{\pi/2+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

تمرين 14 : هل الدوال التالية متباينة؟ غامرة؟ تقابلية؟

$$f_1:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto 2n,\ \ f_2:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto -n$$

$$f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2,\ \ f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2$$

$$f_5:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z^2.$$

الحــل

f_1 متباين:

$$\forall n,m\in\mathbb{Z}:f_1(n)=f_1(m)\Longrightarrow 2n=2m\Longrightarrow n=m$$

وليس غامر : 1 ليس لها سابقة. (ومنه ليس تقابل)
f_2 تقابل لأن:

$$\begin{aligned}\forall m &\in \mathbb{Z},\exists! n\in\mathbb{Z},:m=f_2(n)\Longrightarrow m=-n\\ &\Longrightarrow n=-m\end{aligned}$$

f_3 ليس متباين:

$$f_3(-1)=f_3(1)=1 \quad \text{و} \quad 1\neq -1$$

وليس غامر (-1 ليس لها سابقة).
f_4 غامر

$$\begin{aligned}\forall y &\in \mathbb{R}_+,\exists x\in\mathbb{R}:y=x^2\\ &\Longleftrightarrow x=\sqrt{y}\end{aligned}$$

لكن ليس متباين:

$$f_4(1)=f_4(-1)=1 \quad \text{و} \quad 1\neq -1$$

f_5 غامر

$$\forall z\in\mathbb{C},\exists L\in\mathbb{C}:z=L^2$$

نضع:

$$z=a+ib,L=x+iy\Longrightarrow L^2=x^2-y^2+2ixy\Longrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=a\\ 2xy=b\end{cases}$$

ومنه

$$\left|L^2\right|=|z|\Longrightarrow x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$$

أي:

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\ 2xy=b\\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}\\ y=\frac{b}{2\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}.\end{cases}$$

لكن ليس متباين لأن:

$$f_5(i)=f_5(-i)=-1 \quad \text{و} \quad i\neq -i.$$

تمرين 15 : لتكن f و g الدوال المعرفة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{N}$ المعرفة كما يلي $f(x) = 2x$ و

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{إذا كان } x \text{ زوجي} \\ 0 & \text{إذا كان } x \text{ فردي} \end{cases}$$

أوجد $g \circ f$ و $f \circ g$.

هل الدوال f و g متباينة؟ غامرة؟ تقابلية؟

<u>الحـــل</u>

لدينا $g \circ f(x) = g(2x)$. لكن $2x$ زوجي، ومنه $g(2x) = (2x)/2 = x$. وبالتالي: $g \circ f(x) = x$.

من جهة أخرى:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} f(x/2) = x & \text{إذا كان } x \text{ زوجي} \\ f(0) = 0 & \text{إذا كان } x \text{ فردي} \end{cases}$$

بصفة خاصة، لدينا:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

لأن $f \circ g(1) = 0$ فإن $g \circ f(1) = 1$.

f ليس غامرا، لأن الأرقام الفردية ليست لها صورا بواسطة f. في المقابل، f متباين لأن:

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow 2x = 2y \Longrightarrow x = y.$$

g ليس متباين لأن:

$$g(1) = g(3) = 0 \quad \text{و} \quad 1 \neq 3$$

في المقابل، g غامر : لتكن $y \in \mathbb{N}$. ومنه $2y$ زوجي و $g(2y) = (2y)/2 = y$.

من خلال ما سبق كلا الدالتين f و g ليسا تقابل.

تمرين 16 : بين أن 5 يقسم $n^2 - n$.

<u>الحـــل</u>

لنبين بالتراجع أن 5 يقسم $n^2 - n$. يعني أن نبين أن:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 - n = 5k, k \in \mathbb{Z}.$$

إذا كان $n = 0$ فإنه لدينا

$$0^2 - 0 = 5 \cdot 0 = 0, 0 \in \mathbb{Z}.$$

ومنه 0 يقبل القسمة على 5.
نفترض الآن أن القضية

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 - n = 5k, k \in \mathbb{Z}.$$

صحيحة ولنبرهن صحة القضية:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)^2 - (n+1) = 5 \cdot k, k \in \mathbb{Z}.$$

حسب دستور نيوتن لدينا

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

أي:

$$(n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$$

ومنه

$$\begin{aligned}
(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n \\
&= \left(n^5 - n\right) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\
&= \left(n^5 - n\right) + 5\left(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n\right) \\
&= 5k' + 5\left(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n\right) \\
&= 5k, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

ومنه 5 يقسم العدد $(n+1)^2 - (n+1)$ وبالتالي نكون قد برهنا بالتراجع أن 5 يقسم $n^2 - n$.