
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider - Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologie

Tronc commun des Sciences et Technologie



L'essentiel du cours

Electrotechnique fondamentale 1

Niveau:

2^{ème} année Tronc commun ST (3^{ème} Semestre)

Tous les Filières de Génie Electrique

Préparé par:

Professeur *Megherbi Ahmed Chaouki*

Département de Génie électrique

Année Universitaire 2022/2023

CHAPITRE 1

I. Rappels Mathématiques sur les nombres complexes

I. Rappels Mathématiques sur les nombres complexes

I.1. Nombres complexes

I.1.1 Définition

On appelle nombre complexe z toute expression qui s'écrit de la forme suivante :

$$z = a + i b$$

Où a et b sont des nombres réels quelconques et i un nombre imaginaire tel que

$$i^2 = -1 \quad \text{et} \quad i = \sqrt{-1} .$$

a est appelé la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z .

Notation : $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$.

$a + i b$ est la forme algébrique de z .

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle ($a = 0$) est appelé imaginaire pur. Si $b = 0$ on retrouve un nombre réel.

Exemples :

$$z = 3 - 2i \quad z = -2i \quad z = 1.$$

I.2. Opération dans \mathbb{C}

L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} . Les règles de calcul dans \mathbb{C} sont les mêmes que dans \mathbb{R} .

I.2.1. Egalité de deux nombres complexes

Comme tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + ib$, a et $b \in \mathbb{R}$, on en déduit :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$$Z_1 = Z_2 \quad \text{si}$$

$$a_1 = a_2 \quad \text{et} \quad b_1 = b_2$$

Conséquence: un nombre complexe est égale à zéro (nulle) $z = a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.

I.2.2. Principales opérations sur les nombres complexes

- Addition :

La somme de deux nombres complexes $z_1 = a_1 + i b_1$ et $z_2 = a_2 + i b_2$ est un nombre complexe définie par :

$$Z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i (b_1 - b_2)$$

- **La soustraction :**

La différence de deux nombres complexes $z_1 = a_1 + i b_1$ et $z_2 = a_2 + i b_2$ est un nombre complexe définie par :

$$Z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i (b_1 - b_2)$$

- **Multiplication**

La produit de deux nombres complexes $z_1 = a_1 + i b_1$ et $z_2 = a_2 + i b_2$ est un nombre complexe définie par :

$$Z = z_1 * z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i (b_1 a_2 - a_1 b_2)$$

Cas particulier : $z^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2ab i$

- **Conjugué d'un nombre complexe**

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ on associer le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$ appelé conjugué de z
On peut vérifier que :

$$z + \bar{z} = 2 \Re \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = 2 \text{Im}i$$

- **Inverse d'un nombre complexe non nul**

Tout nombre complexe admet un inverse :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Cette propriété permet de mettre $\frac{1}{z}$ sous la forme $a + i b$ (a et $b \in \mathbb{R}$).

Exemple :

$$\frac{1}{3 + 4i} = \frac{3 - 4i}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{3}{25} - i \frac{4}{25}$$

Opérations sur les complexes conjugués

- Pour tout nombre complexe z : $\overline{\bar{z}} = z$ (z et \bar{z} sont conjugués l'un de l'autre)
- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.

- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.
- Si $z = a + ib$, alors $\bar{z} \cdot z = a^2 + b^2$.

On démontre que :

- Pour tous z_1 et z_2 de \mathbb{C} , $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
- Pour tout z non nul, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Conséquences: Pour tout z , z_1 et z_2

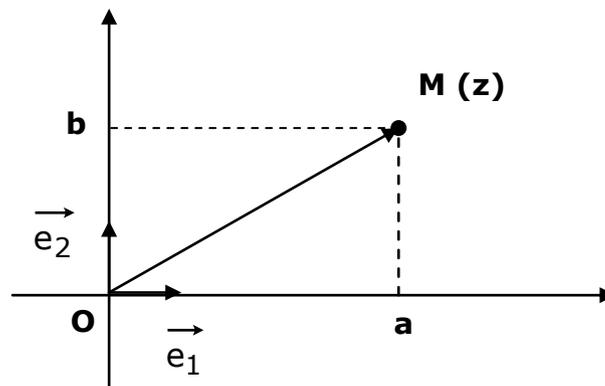
- $\overline{(-z)} = -\bar{z}$
- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- Si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

I.3 - Représentation géométrique des nombres complexes

I.3.1 – Image d'un nombre complexe

A tout nombre complexe $z = a + ib$ on peut associer le point M de coordonnées (a, b) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On dit que : M est l'**image** du nombre complexe z et z est l'**affixe** du point M . On note $M(z)$.



Propriétés:

- Les images du complexe z et de son opposé $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine O .
- Les images du complexe z et de son conjugué \bar{z} sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

I.3.2 - Module d'un nombre complexe

Le module d'un nombre complexe z , dont l'image est M , est la distance OM .

On note $|z| = OM$.

Posons $z = a + ib$, alors $\vec{OM} = a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2$

$$|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

En **particulier**, si z est réel ($z = a$) alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$

Inégalité triangulaire :

On démontre que pour tous z_1 et z_2 de \mathbb{C} , $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Module d'un produit :

z_1 et z_2 étant des complexes quelconques, on démontre que :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{pour } z \neq 0$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{pour } z_2 \neq 0.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, et pour $z \neq 0$, $|z^n| = |z|^n$.

I.3.2 Argument d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme : $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

En posant $|z| = \rho$, $\Rightarrow z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. ρ est le module de z et θ un argument de z .

Pour tout nombre complexe z non nul dont l'image M a pour coordonnées cartésiennes $(a ; b)$ et pour coordonnées polaires $(\rho ; \theta)$, on a :

$$\begin{cases} a = \rho \cdot \cos \theta \\ b = \rho \cdot \sin \theta \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \theta = \frac{a}{\rho} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{\rho} \end{cases}$$

Forme algébrique : $z = a + ib$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$

I.4.- Propriétés

Soit z et z' deux complexes non nuls : $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$, $z' = |z'| (\cos \theta' + i \sin \theta')$.

- **Egalité de deux nombres complexes**

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument.

$$z = z' \text{ équivaut à } (|z| = |z'| \text{ et } \theta = \theta')$$

- **Conjugués et opposés**

Deux complexes non nuls **sont conjugués** si et seulement si ils ont le même module et des arguments opposés.

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$

Deux complexes non nuls **sont opposés** si et seulement si ils ont le même module et des arguments de différence $\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$|-z| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(-z) = \arg(z) + \pi.$$

- **Argument d'un produit**

Soit z et z' deux complexes non nuls.

- $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

I.5. Formule de Moivre

Ce dernier résultat peut aussi s'écrire sous la forme dite **formule de Moivre** :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n \theta + i \sin n \theta, \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Conseil pratique : Pour les opérations dans \mathbb{C} , on utilise

- la forme algébrique pour les additions et soustractions.
- la forme trigonométrique pour les multiplications, divisions et puissances.

I.6. Forme exponentielle des nombres complexes

Définition

Pour tout réel θ , on pose : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Propriétés

Soit z et z' deux complexes non nuls. $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$, $z' = |z'| (\cos \theta' + i \sin \theta')$.

La notation exponentielle donne : $z = |z| e^{i\theta}$ et $z' = |z'| e^{i\theta'}$.

D'où

- ✓ $z \cdot z' = |z| \cdot |z'| \cdot e^{i(\theta + \theta')}$
- ✓ $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z| e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|} e^{-i\theta}$
- ✓ $\frac{z}{z'} = \frac{|z| e^{i\theta}}{|z'| e^{i\theta'}} = \frac{|z|}{|z'|} e^{i\theta - i\theta'}$
- ✓ $z^n = (|z| \cdot e^{i\theta})^n = |z|^n \cdot e^{in\theta}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque

- Dans la notation exponentielle, la formule de Moivre s'écrit : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

I.7. Formules d'Euler

Pour tout réel θ , on a : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$.

Par addition et soustraction membre à membre, on a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$