**اختبار استقلالية المتغيرات [اختبار T]**

في العنصر السابق تم تبيان كيفية اختبار الملائمة لنموذج الانحدار الخطي أما في هذا العنصر فسوف يتم اختبار فرضية وجود تأثير للمتغير المستقل على المتغير التابع أم لا؟

* يمكن التعبير على ذلك بالسؤال التالي:

هل $\beta_1$ موجود أي $\beta_1 \neq 0$ أو $\beta_1$ غير موجود أي $\beta_1 = 0$ وبالتالي يمكن التعبير عن الفرضيتين السابقتين الرياضيتين كما يلي:

**أولا**: $H_0 : \beta_1 = 0$ (ليس هناك تأثير لـ $X$ على $Y$)

$H_1 : \beta_1 \neq 0$ (وجود تأثير لـ $X$ على $Y$)

**ثانيا**: $t_C$ دالة الاختبار تعطى بالعلاقة التالية:

$$t_c = \left| \frac{\widehat{\beta_1}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon_i} / \sqrt{\sum (x - \bar{x})^2}} \right|$$

$$\sigma^2_{\varepsilon_i} = \frac{SCR}{h-2} \longrightarrow \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} = \frac{\sum e_i^2}{(n-k)}$$

$$\boxed{t_t = t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(v=n-2)}}$$

**مثال :**

بمعطيات المثال السابق اختبر استقلالية [وجود أثر من عدمه] بين الانفاق والدخل.

أو هل يوجد أثر لمتغير الدخل (x) على متغير الانفاق (y) عند مستوى معنوية 5% ($\alpha = 5\%$).

**الحـل:**

$$\begin{cases} H_0 : (\beta_1 = 0) \text{ [ليس هناك أثر]} \\ H_1 : (\beta_1 \neq 0) \text{ [هناك أثر للدخل على الاستهلاك]} \end{cases}$$

**أولا: حساب دالة الاختبار $t_c$ :**

$$t_c = \left| \frac{\widehat{\beta_1}}{\widehat{\sigma}_{\varepsilon_i} / \sqrt{\sum (x - \bar{x})^2}} \right|$$

$$\sigma^2_{\varepsilon_i} = \frac{SCR}{n-2} = \frac{8{,}0467}{9-2} = 1{,}1495$$

$$\sigma^2_{\varepsilon_i} = 1.1495$$

$$\sigma_{\varepsilon_i} = \sqrt{1{,}1495} = \boxed{1{,}0721}$$

$$\sqrt{\Sigma (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2} = \sqrt{\Sigma x_i^2 - n\left(\frac{\Sigma x}{h}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\Sigma x_i^2 - n\frac{(\Sigma x)^2}{n^2}}$$

$$= \sqrt{\Sigma x_i^2 - \frac{\Sigma x^2}{n}} = \boxed{7{,}2264}$$

$$t_c = \left| \frac{0{,}717}{1{,}072 / 7{,}2264} \right|$$

$$\boxed{t_t = 2,36}$$

نلاحظ بأن $|t_c| > t_t$ إذا نرفض $H_0$ لصالح $H_1$ أي هناك أثر لمتغير الدخل $(x_i)$ على المتغير التابع الإنفاق $(y_i)$ عند مستوى معنوية $(\alpha = 5\%)$.

## 10.2. اختبار مرورية خط الانحدار يمر من المبدأ

في هذا العنصر نقوم باختبار فيما إذا كان خط الانحدار يقطع محور العينات (y) أم لا؟ أي يمر من نقطة المبدأ $m(0,0)$ أم لا ؟ ، للقيام بهذا الاختبار نتبع نفس الخطوات التي رأيناها في الاختبارات السابقة.

**أولا**: تحديد الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : (\beta_1 = 0) & \text{[خط الانحدار يمر من المبدأ]} \\ H_1 : (\beta_1 \neq 0) & \text{[خط الانحدار لا يمر من المبدأ]} \end{cases}$$

**ثانيا: حساب قيمة دالة الاختبار $T_c$**:

$$t_c = \left| \frac{\widehat{\beta_0}}{\widehat{\sigma}_{\varepsilon_i}\sqrt{\frac{\bar{x}^2}{\sum(x-\bar{x})^2}+\frac{1}{n}}} \right|$$

**ثالثا: القيمة الجدولية $t_t$**:

$$\boxed{t_t = t_{n-2}^{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

**إذا كانت** $|T_c| > t_t$ نرفض $H_0 : (\beta_1 = 0)$ ونقبل $H_1 : (\beta_1 \neq 0)$ أي خط الانحدار لا يمر من المبدأ عند مستوى معنوية 5% وإذا حدث العكس فالعكس صحيح عند نفس مستوى المعنوية $\alpha$.

**مثال**: بالرجوع إلى نفس المثال السابق هل خط الانحدار يمر من المبدأ أم لا؟ عند 5% =$\alpha$.

**الحـــل**:

1/ (خط الانحدار يمر من المبدأ) $H_0 : (\beta_0 = 0)$

(خط الانحدار لا يمر من المبدأ) $H_1 : (\beta_0 \neq 0)$

**/2**

$$t_c = \left| \frac{\widehat{\beta_0}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}\sqrt{\frac{\bar{x}^2}{\sum(x-\bar{x})^2}+\frac{1}{n}}} \right| \text{ and } t_t = t_{1-\alpha/2}^{n-2}$$

$$\sqrt{\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}+\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{(\frac{85}{9})^2}{855-9(\frac{85}{9})^2}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{89,1975}{855-802,7777}+0,1111}$$

$$= \sqrt{1,8191} = 1,3484$$

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}\sqrt{\frac{\bar{x}^2}{\sum(x-\bar{x})^2}+\frac{1}{n}} = 1.0721*1.3484$$

$$=1.4459$$

$$\boxed{|t_c| = 0,1729}$$

$$t_t = 2,36$$

نلاحظ أن $t_t < |t_c|$ ومنه نرفض $H_1$ ونقبل $H_0 : (\beta_0 = 0)$ أي خط الانحدار يمر من المبدأ عند مستوى معنوية 5% ومنه تصبح معادلة النموذج كما يلي: $\boxed{\hat{y} = 0,717 x_i}$

**مثال 2:**

إذا فرضنا أن معادلة النموذج السابق هي كما يلي: $\boxed{\hat{y} = 4,25 + 0,717x_i}$

**المطلوب:**

هل خط الانحدار يمر في هذه الحالة من المبدأ مع افتراض ثبات جميع المعطيات السابقة.

**الحــل:** $tc = 2,9393$ $\qquad t_c = \dfrac{4,25}{1,4459}$

**نلاحظ** $t_t < |t_c|$ ومنه نرفض الفرض العدمي $\mathrm{H}_0$ ونقبل الفرض البديل $\mathrm{H}_1$ أي نلاحظ خط الانحدار لا يمر من المبدأ أي يقطع محور التراتيب $(\mathrm{y})$ في النقطة $(0,425)$ عند مستوى معنوية $5\%$.

## 11.2. التقدير بفترة لمعالم خط الانحدار

### أولا: التقدير بمجال لـ $\beta_1$ :

تقدير هذه المعلمة بمجال أو بمدى أي بمجموعة من القيم على عكس التقدير بنقطة أي بقيمة واحدة يعطى بالعلاقة التالية، حيث يعتمد على مستوى المعنوية وهو يعرف أيضا بمستوى الدلالة ويقابله كقيمة مضادة مستوى الثقة وهما احتمالان متضادان حيث مستوى المعنوية يعبر على درجة الخطورة المحتملة ومستوى الثقة يعبر عن مقدار ما نحن واثقون فيه أنه سيحدث لهذا السبب فإن :

**α+β =1**

علاقة تقدير $\beta_1$ :

$$\boxed{\beta_1 \in \left\{\hat{\beta}_1 \pm \underbrace{t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-2} * \hat{\sigma}_{\varepsilon_i} / \sqrt{\sum (x-\bar{x})^2}}_{\text{خط التقدير}}\right\}}$$

حيث: $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} = \frac{\Sigma e_i^2}{(n-k)}$

**مثال**: باستخدام نفس معطيات المثال السابق حيث: $\boxed{\hat{y} = 1{,}117 + 0{,}717 x_i}$

**المطلوب**: عين فترة (مجال) الثقة 95% ل $\beta_1$ .

**الحـــل**:

$\beta_1 = 0{,}717 \pm 2{,}36(1{,}0721)/(7{,}2264)$

$\beta_1 = 0{,}717 \pm 0{,}3501$

$$\beta_1 \in [0{,}3669 \quad , \ 1{,}0671] \Leftrightarrow 0{,}3669 < \beta_1 < 1{,}0671$$

«نحن واثقون بـ 95% أن $\beta_1$ سوف ينتمي الى المجال أو المدى [1,0671 ، 0,3669]

**ثانيا: التقدير بمجال لـ $\beta_0$** : يعطي مجال ثقة لـ $\beta_0$ بالعلاقة التالية:

$$\beta_0 \in \left\{ \hat{\beta}_0 \pm t^{n-2}_{1-\frac{\alpha}{2}} * \hat{\sigma}_{\varepsilon_i} \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2} + \frac{1}{n}} \right\}$$

**مثـــال**: باعتماد نفس المثال السابق $\boxed{y = 1{,}117 + 0{,}717 x_i}$

**المطلوب**: عين فترة الثقة 95% لـ $\beta_0$

**الحــل**: $$\beta_0 \in \left\{\hat{\beta}_0 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-2} * \hat{\sigma}_{\varepsilon_i}\sqrt{\frac{\bar{x}^2}{\sum(x-\bar{x})^2}+\frac{1}{n}}\right\}$$

$$\beta_0 = 1{,}17 \pm 3{,}4123$$

$$\beta_0 \in [-2{,}2953 \quad , \quad 4{,}5293]$$

"نحن واثقون بـ 95% " أو نحتمل بـ 95% أن $\beta_0$ سوف ينتمي للمجال [-2,2953 , 4,5293]