

3-2- Passage à une solution de base adjacente

On utilise la technique des coûts duaux qui consiste à déterminer une décomposition des coefficients c_{ij} (les coûts de transport) de la forme

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

Pour les indices correspondants à ceux de la solution de base.

Il y a $m+n-1$ équations pour $m+n$ inconnues. Dans la pratique on pose $u_1 = 0$ et on résout pour les autres variables.

Reprenons notre exemple du début. Pour chaque case, on affiche le coefficient c_{ij} qui est soit encadré et la solution de base. La case est vide si la variable est hors-base. Démarrons avec la solution fournie par la méthode du coin nord-ouest.

400	1470	50	1210		3440		5520	450
	2410	400	1530	50	1020		3120	450
	4510		3640	500	5570	250	2850	750
400		450		550		250		1650

On évalue les coûts duaux $c_{ij} = u_i + v_j$ de la manière suivante

$$c_{11} = u_1 + v_1 \Leftrightarrow 1470 = 0 + v_1 \Rightarrow v_1 = 1470$$

$$c_{12} = u_1 + v_2 \Leftrightarrow 1220 = 0 + v_2 \Rightarrow v_2 = 1210$$

$$c_{22} = u_2 + v_2 \Leftrightarrow 1530 = u_2 + 1210 \Rightarrow u_2 = 320$$

$$c_{23} = u_2 + v_3 \Leftrightarrow 1020 = 320 + v_3 \Rightarrow v_3 = 700$$

$$c_{33} = u_3 + v_3 \Leftrightarrow 5570 = u_3 + 700 \Rightarrow u_3 = 4870$$

$$c_{34} = u_3 + v_4 \Leftrightarrow 2850 = 4870 + v_4 \Rightarrow v_4 = -2020$$

On ajoute ces informations dans le tableau

400	1470	50	1210		3440		5520	450	$u_1 = 0$
	2410	400	1530	50	1020		3120	450	$u_2 = 320$
	4510		3640	500	5570	250	2850	750	$u_3 = 4870$
400		450		550		250		1650	
	$v_1 = 1470$	$v_2 = 1210$		$v_3 = 700$		$v_4 = -2020$			

Pour toutes les cases hors-base, on évalue la quantité $\Delta z = c_{ij} - u_i - v_j$

400	1470	50	1210	(2740)	3440	(7540)	5520	450	$u_1 = 0$
(62)	2410	400	1530	50	1020	(4820)	3120	450	$u_2 = 320$
(-1830)	4510	(-2440)	3640	500	5570	250	2850	750	$u_3 = 4870$
400		450		550		250		1650	
	$v_1 = 1470$	$v_2 = 1210$		$v_3 = 700$		$v_4 = -2020$			

La solution de base sera optimale si tous les $\Delta z \geq 0$

Sinon, choisir la case qui minimise la valeur de $\Delta z < 0$ et recommencer le processus.

Faisons entrer la variable x_{32} dans la base. Il faudra identifier la variable qui sortira de la base et calculer la valeur de cette variable $x_{32} = \theta$

	D1	D2	D3	D4	
S1	400	50			450
S2		$400 - \theta$	$50 + \theta$		450
S3		θ	$500 - \theta$	250	750
	400	450	550	250	

Le choix de θ doit respecter la contrainte de positivité

$$400 - \theta \geq 0$$

$$50 + \theta \geq 0$$

$$500 - \theta \geq 0$$

$$\theta \geq 0$$

Alors

$$\theta \leq 400$$

Si on choisit $\theta = 400$, la case (2,2) devient nulle et donc x_{22} sort de la base. La nouvelle solution de base est

	D1	D2	D3	D4	
S1	400	50			450
S2			450		450
S3		400	100	250	750
	400	450	550	250	

Poursuivons les calculs à partir de cette étape. On doit mettre à jour les coûts duaux avec la nouvelle base. On obtient le tableau

400	1470	50	1210	(+)	3440	(+)	5520	450	$u_1 = 0$
(+)	2410	(+)	1530	450	1020	(+)	3120	450	$u_2 = -2120$
(+)	4510	400	3640	100	5570	250	2850	750	$u_3 = 2430$
400		450		550		250		1650	
$v_1 = 1470$	$v_2 = 1210$	$v_3 = 3140$	$v_4 = 420$						

Tous les $\Delta z \geq 0$ ce qui montre que la solution est optimale est optimale.

Et

$z = 3833000$ comme valeur minimale.

Exemple :

Considérons le problème de transport suivant

	D ₁	D ₂	D ₃	
S ₁	8	10	6	100
S ₂	7	4	9	80
S ₃	13	12	8	45
	90	60	75	225

a) On démarre avec la solution du coin nord-ouest et on évalue les coûts duaux.

	D_1	D_2	D_3		
S_1	90 8	10 10	(-9) 6	100	$u_1 = 0$
S_2	(5) 7	50 4	30 9	80	$u_2 = -6$
S_3	(12) 13	(9) 12	45 8	45	$u_3 = -7$
	90	60	75	225	
	$v_1 = 8$	$v_2 = 10$	$v_3 = 15$		

b) La case (1, 3) entre dans la base. On doit trouver celle qui quitte.

	D_1	D_2	D_3	
S_1	90	$10 - \theta$	θ	100
S_2		$50 + \theta$	$30 - \theta$	80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Donc $\theta = 10$ ce qui conduit à la solution de base

	D_1	D_2	D_3	
S_1	90		10	100
S_2		60	20	80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Les coûts duaux

	D_1	D_2	D_3		
S_1	90 8	(9) 10	10 6	100	$u_1 = 0$
S_2	(-4) 7	60 4	20 9	80	$u_2 = 3$
S_3	(2) 13	(8) 12	45 8	45	$u_3 = 3$
	90	60	75	225	
	$v_1 = 8$	$v_2 = 1$	$v_3 = 6$		

La case (2, 1) entre dans la base. On doit trouver celle qui quitte.

	D_1	D_2	D_3	
S_1	$90 - \theta$		$10 + \theta$	100
S_2	θ	60	$20 - \theta$	80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Donc $\theta = 20$ ce qui conduit à la solution de base

	D_1	D_2	D_3	
S_1	70		30	100
S_2	20	60		80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Les coûts duaux

	D_1	D_2	D_3		
S_1	70 8	(+) 10	30 6	100	$u_1 = 0$
S_2	20 7	60 4	(+) 9	80	$u_2 = -1$
S_3	(+) 13	(+) 12	45 8	45	$u_3 = 2$
	90	60	75	225	
	$v_1 = 8$	$v_2 = 5$	$v_3 = 6$		

Ce tableau est optimal et la valeur de $z = 1480$.