Chapitre1 : Equations et géométrie analytique

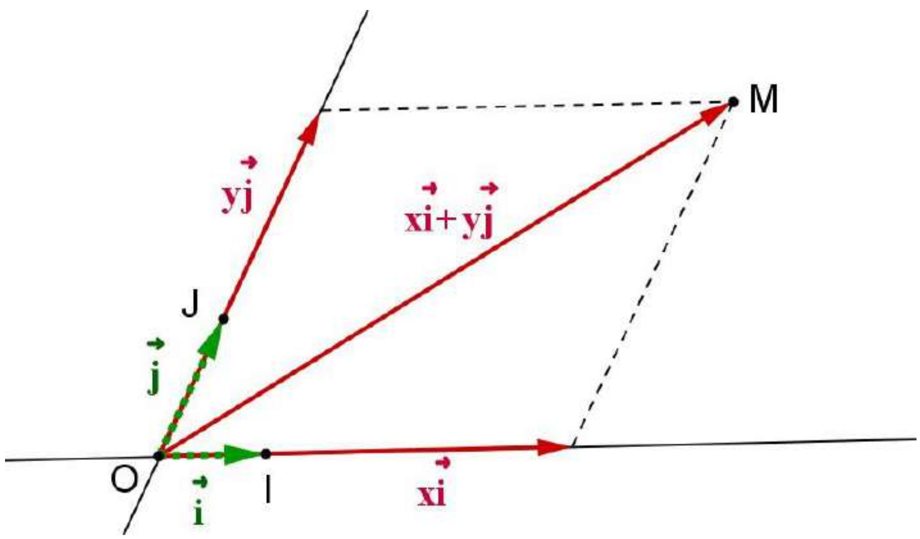
A) GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS LE PLAN

1) Repères du plan

- Soient O, I, J trois points non alignés du plan, alors les vecteurs $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ ne sont pas colinéaires et le triplet $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un **repère** du plan ce qui signifie que pour tout point M du plan il existe un couple unique $(x; y)$ de nombre réels appelés **coordonnées** de M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

On note M $(x; y)$dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, x est appelée **abscisse** de M et y **ordonnée** de M. La droite (OI) est appelée **axe des abscisses** et la droite (OI) **axe des ordonnées**



- Si $(OI) \perp (OI)$ et $OI = OJ = 1$ on dit que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un **repère orthonormé (R.O.N.)**
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un point uniqu M telque$\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

Si on connaît M, on connaît $\vec{u}$, il est donc naturel de dire que les coordonnées de M sont aussi les « coordonnées » de $\vec{u}$:si $M(x; y)$ et $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ alors $\vec{u}\ (x; y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2) Calcul vectoriel dans un repère du plan

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$; $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et

$\alpha \in \mathbb{R}$, rappelons qu'on a alors les formules suivantes :

Formules valables dans tout repère

- $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\end{pmatrix}$
- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x_u+x_v\\ y_u+y_v\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$
- on appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le déterminant :$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}$
- on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\exists k\in\mathbb{R}: \vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$ c'est- à dire si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction ou s'ils sont nuls.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires$\Leftrightarrow \det(\vec{u};\vec{v})=0$
- A; B et C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\ y_C-y_A\end{pmatrix}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$$

a) Formules valables uniquement dans un R.O.N.

- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x_u{}^2+y_u{}^2}$
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
- on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v}=x_ux_v+y_uy_v$$

- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$

3) Equations une droite

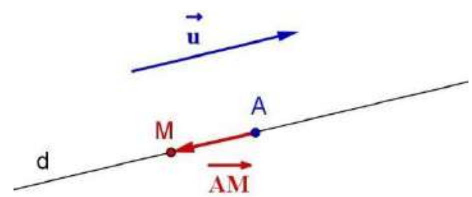
Une droite d du plan est entièrement déterminée si on connaît :

- deux points A et B de (d)

ou bien

- un point A $\in$ (d) et un **vecteur directeur** $\vec{u}$ de (d) (c'est-à-dire un vecteur non nul qui a même direction que(d))

Remarquons que dans le premier cas on connaît également un vecteur directeur : $\overrightarrow{AB}$.



$\forall M \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u}) = 0$

Nous allons maintenant exprimer cette dernière propriété en utilisant les coordonnées dans un repère (en principe quelconque, en pratique orthonormé) :

$A(x_A; y_A)$; $M(x; y)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$;

a) Système d'équations paramétriques (d)

$\mathbf{M(x;y) \in (d) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{AM} = k\vec{u}}$

$(\overrightarrow{\mathbf{AM}}\begin{pmatrix} \mathbf{x-x_A} \\ \mathbf{y-y_A} \end{pmatrix}$ **et** $\vec{\mathbf{u}}\begin{pmatrix} \mathbf{x_u} \\ \mathbf{y_u} \end{pmatrix}$ sont colinéaires)

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{k} \in \mathbb{R}\ \begin{pmatrix} \mathbf{x - x_A} \\ \mathbf{y - y_A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{kx_u} \\ \mathbf{ky_u} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{k} \in \mathbb{R}\ \begin{cases} \mathbf{x - x_A = kx_u} \\ \mathbf{y - y_A = ky_u} \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{M(x;y) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + k \cdot x_u \\ y = y_A + k \cdot y_u \end{cases}}$$

Ce système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y et de **paramètre k** est appelé **système d'équations paramétriques** de d.

Exemple

Soit d la droite passant par $A(5; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-3}{7}$

$$d \equiv \begin{cases} x = 5 - 3k \\ y = -2 + 7k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

pour $k = 1$: $x = 2$ et $y = 5$ donc $B(2;5) \in d$,

pour $k = -4$: $x = 17$ et $y = -30$ donc $C(17; -30) \in d$, etc.

Pour voir si D(8, 3) $\in$d il faut voir s'il existe un réel k tel que $8 = 5 - 3k$ et

$3 = -2 + 7k$. Or la première de ces équations donne $k = -1$ et la deuxième $k = \frac{5}{7}$,

donc D $\notin$d !

b) Equation cartésienne de d

$\mathbf{M(x;y) \in (d)} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{AM}}\begin{pmatrix} \mathbf{x-x_A} \\ \mathbf{y-y_A} \end{pmatrix}$ **et** $\vec{\mathbf{u}}\begin{pmatrix} \mathbf{x_u} \\ \mathbf{y_u} \end{pmatrix}$sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_u \\ y - y_A & y_u \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)y_u - (y - y_A)x_u = 0$$

$$\Leftrightarrow y_u x - y_u x_A - x_u y + x_u y_A = 0$$

En posant $a = y_u$, $b = -x_u$ et $c = x_u y_A - y_u x_A$, on obtient l'équation :

$M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ avec $\vec{u}\binom{-b}{a} \neq \vec{0}$ v.d de d

Cette équation linéaire à deux inconnues est appelée **équation cartésienne** de d.

Exemple

Pour $A(5; -2)$ et $\vec{u}\binom{-3}{7}$; on a

$\mathbf{M(x;y) \in (d)} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{AM}}\begin{pmatrix} \mathbf{x-5} \\ \mathbf{y+2} \end{pmatrix}$ **et**$\vec{\mathbf{u}}\binom{\mathbf{-3}}{\mathbf{7}}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 5 & -3 \\ y + 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 7(x - 5) + 3(y + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x + 3y - 29 = 0$$

donc $d \equiv 7x + 3y - 29 = 0$. Cherchons quelques points de d :

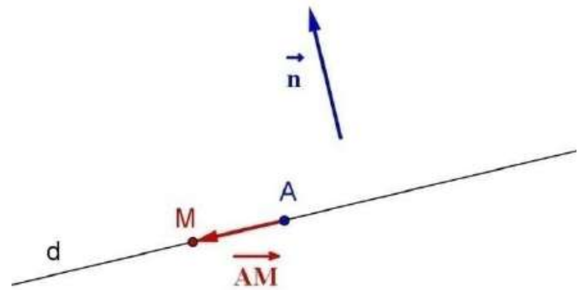
pour $x = 2$, $14 + 3y - 29 = 0 \Leftrightarrow y = 5$, donc $B(2;5) \in d$

pour $y = -30$, $7x - 90 - 29 = 0 \Leftrightarrow x = 17$, donc $C(17; -30) \in d$, etc.

$D(8, 3) \in d \Leftrightarrow 7 \cdot 8 + 3 \cdot 3 - 29 = 0$ ce qui est faux donc $D \notin d$.

4) Vecteur normal d'une droite

- On appelle **vecteur normal** d'une droite d tout vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ qui est orthogonal à tout vecteur directeur de d (on peut dire aussi : qui est un vecteur directeur de toute droite perpendiculaire à d).



- Pour connaître d il suffit de connaître un point $A \in d$ et un vecteur $\vec{n}$ normal à d car :
$\forall M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} = 0$

Si $A(x_A; y_A); M(x; y)$ et $\vec{n}\binom{x_n}{y_n}$ dans un R.O.N alors :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (d) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\binom{x-x_A}{y-y_A} \perp \vec{n}\binom{x_n}{y_n} \\ &\Leftrightarrow \binom{x-x_A}{y-y_A}.\binom{x_n}{y_n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-x_A)x_n + (y-y_A)y_n = 0 \\ &\Leftrightarrow x_n x - x_A x_n + y_n y - y_A y_n = 0 \end{aligned}$$

En posant $a = x_n$, $b = y_n$ et $c = -x_n x_A - y_n y_A$, on obtient l'équation :

$M(x;y) \in (d) \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ avec $\vec{n}\binom{a}{b} \neq \vec{0}$ v.n à d

Exemple

Pour $A(-9; 5)$ et $\vec{n}\binom{2}{13}$ on a :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (d) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\binom{x+9}{y-5} \perp \vec{n}\binom{2}{13} \\ &\Leftrightarrow (x+9)2 + (y-5)(-13) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 13y + 83 = 0 \equiv d \end{aligned}$$

Remarque : Si $d \equiv ax + by + c = 0$ alors $\vec{u}\binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur de d $\vec{n}\binom{a}{b}$ est un vecteur normal à d

Exemple : Pour $d \equiv 4x - 11y + 29 = 0$; $\vec{u}\binom{11}{4}$ et $\vec{n}\binom{4}{-11}$

5) Intersection de deux droites

Soient deux droites $d \equiv ax + by + c = 0$ et $d' \equiv a'x + b'y + c' = 0$ données par leurs équations cartésiennes, alors :

$$I(x;y) \in d \cap d' \Leftrightarrow (x;y) \text{ est solution du système } \begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$$

Déterminer l'intersection de d et d' et résoudre ce système revient donc au même !

On a trois possibilités :

- si $d \cap d' = \{I\}$ (d et d' sécantes), le système a une seule solution : les coordonnées de I.
- si $d \cap d' = \varnothing$ (d et d' strictement parallèles), le système n'a pas de solution.
- si $d \cap d' = d = d'$ (d et d' confondues), le système a une infinité de solutions.

Remarque : $d \parallel d' \Leftrightarrow \Delta = 0$ et d et d' sécantes $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$ avec $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

Exemples

- $\begin{cases} 5x + 17y = 1 & (1) \\ x - 2y = 11 & (2) \end{cases}$, $S = \{(7;-2)\}$

  interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites sécantes qui se coupent en I $(7;-2)$

$$\begin{cases} 7x - 8y = 11 & (1) \\ -21x + 24y = -5 & (2) \end{cases} \qquad S = \phi$$

interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites strictement parallèles (disjointes).

$$\begin{cases} 3x - 5y = -4 & (1) \\ -6x + 10y = 8 & (2) \end{cases} \quad S = \left\{\left(\frac{5}{3}y - \frac{4}{3}; y\right) / y \in \mathbb{R}\right\}$$

interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites confondues.

Demi- droite :Une **demi-droite** est une portion de droite limitée d'un seul côté par un point

Demi-plan

Une droite partage le plan en deux demi-plans. Cette droite s'appelle alors la frontière des demi-plans.

Deux points M et N non situés sur la droite d sont situés dans le même demi-plans de frontière d si et seulement si le segment $[MN]$ ne rencontre pas la droite d

Cercles du plan

Définition : Soit Ω un point du plan et r un nombre réel positif ; On appelle cercle de centre Ω et de rayon r l'ensemble des points M du plan dont la distance au point Ω est égale à r.

Equation cartésienne du cercle : Soit le cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon r

$$M(x; y) \in \text{cercle}(\Omega; r) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Equations paramétriques du cercle : $\Gamma: \begin{cases} x = x_0 + r\cos\alpha \\ y = y_0 + r\sin\alpha \end{cases}$

le paramètre est l'angle α qui varie entre 0et 2π

Tangente à un cercle : une droite d est dite tangente à un cercle de centre Ω et de rayon r $d(\Omega; d) = r$ (la distante entre Ω et la droite d est égale à r)

La droite tangente en un point T à un cercle $(\Omega; r)$ est la droite :

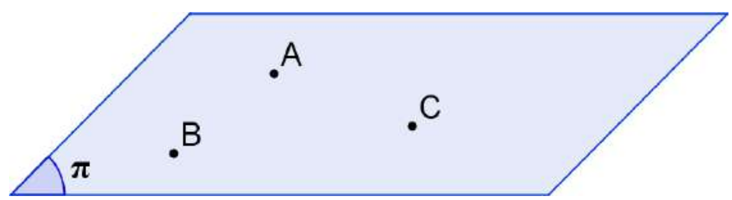
1) Passant par T

2) Perpendiculaire à ΩT

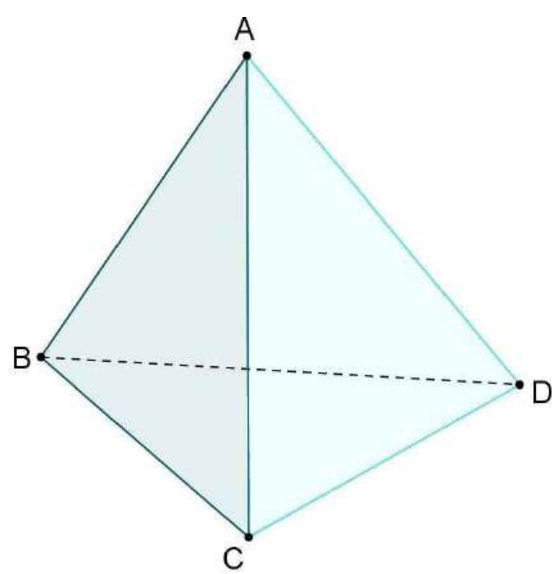
B) GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS L’ESPACE

1) Points, droites, plans et vecteurs dans l’espace

- Les notations pour les points et les droites de l’espace sont les mêmes que celles utilisées dans le plan, les plans sont souvent notés par des lettres grecques : α, β, π, …
- Par deux points A et B il passe exactement une droite notée (AB).
- Par trois points non alignés A, B, C de l’espace il passe exactement un plan noté parfois (ABC) ou simplement ABC :



- Si quatre points appartiennent à un même plan on dit qu’ils sont **coplanaires**, sinon ils forment un **tétraèdre** (c’est-à-dire une pyramide à quatre faces triangulaires):



$A \notin BCD$

$B \notin ACD$

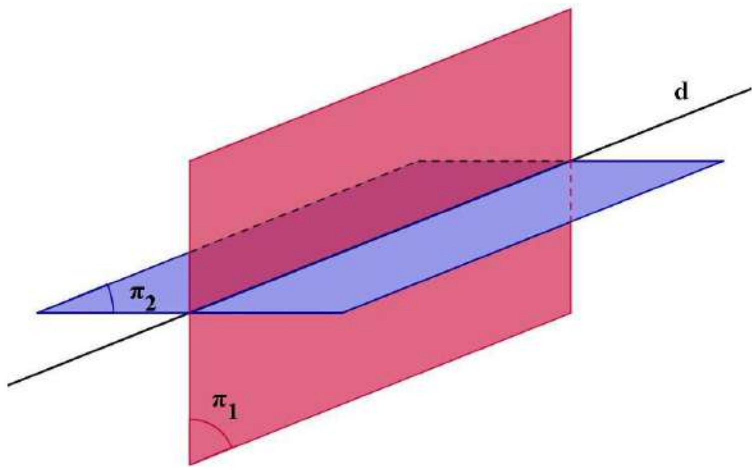
$C \notin ABD$

$D \notin ABC$

- **Deux plans** π_1 et π_2 de l’espace peuvent être :
  - ➢ **confondus** : $\pi_1 = \pi_2$

➢ **strictement parallèles** : $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$

➢ **sécants** : $\pi_1 \cap \pi_2 = d$ (l'intersection de deux plans sécants est une droite !)

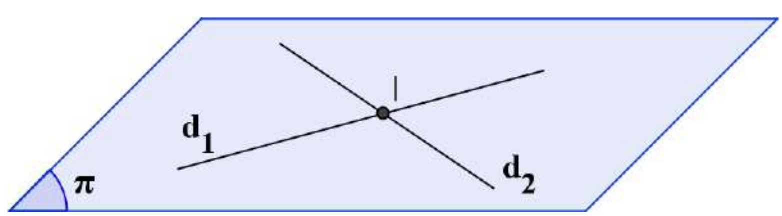


Remarques :

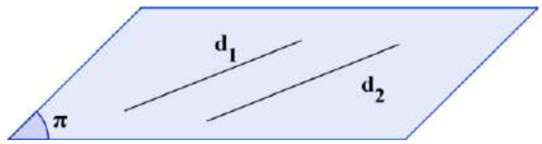
- $\pi_1 \parallel \pi_2$ (**parallèles**) signifie que $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ <u>ou</u> $\pi_1 = \pi_2$, donc deux plans sont soit parallèles, soit sécants (comme deux droites dans un plan).
- Une droite peut toujours être définie comme intersection de deux plans sécants.

- **Deux droites** d_1 et d_2 de l'espace peuvent être :

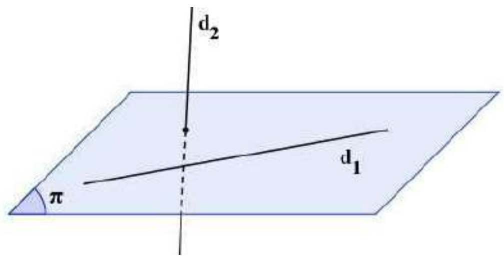
➢ **sécantes** : $d_1 \cap d_2 = \{I\}$ (deux droites sécantes sont coplanaires, c'est-à-dire quelles appartiennent à un même plan π)



- **parallèles** : $d_1 = d_2$ ou $d_1 \cap d_2 = \varnothing$ (deux droites parallèles sont également coplanaires)



- **gauches** : c'est ainsi qu'on appelle deux droites qui ne sont pas coplanaires

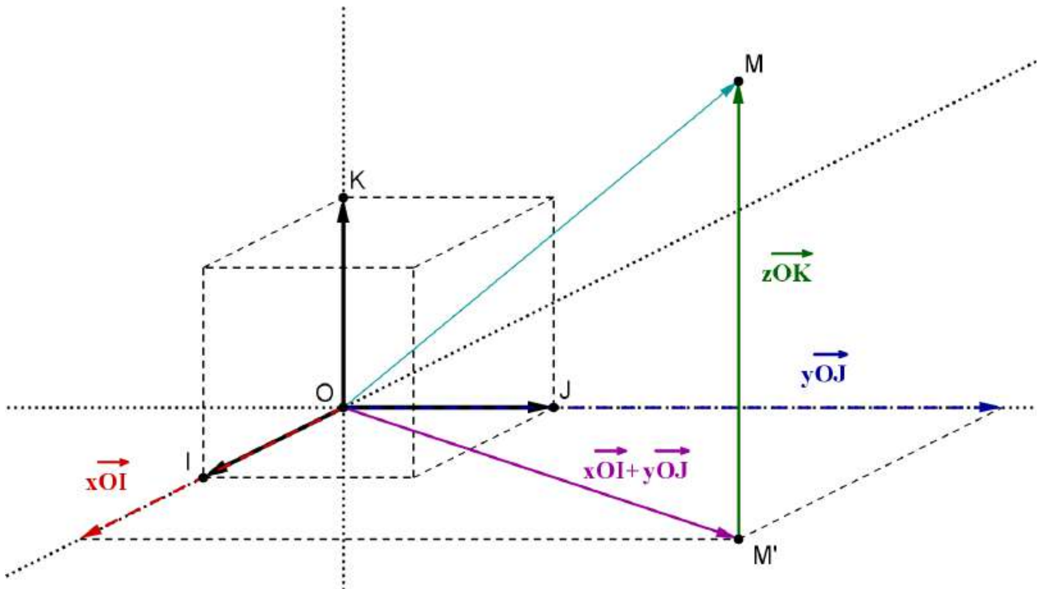


- Les vecteurs se définissent exactement de la même manière dans l'espace que dans le plan, avec les mêmes propriétés et règles de calcul : addition des vecteurs, multiplication par un réel, vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux, relation de Chasles, etc.
- Soient A, B, C trois points non alignés qui définissent un plan $\pi = (ABC)$ de l'espace. Alors $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est un repère de ce plan donc pour tout point $M \in \pi$ il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$: on exprime ceci en disant que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il est évident que si $M \notin \pi$ alors $\overrightarrow{AM}$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$! Ainsi :
$$M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$
- Deux droites sécantes dont les vecteurs directeurs sont orthogonaux sont appelées **droites perpendiculaires**, alors que deux droites gauches dont les vecteurs directeurs sont orthogonaux sont appelées **droites orthogonales**, mais dans les deux cas on note : $d_1 \perp d_2$.

2) Repères de l'espace

- **Exemple :**

  Soient O, I, J, K quatre sommets adjacents d'un cube, M un point quelconque du l'espace et M' sa projection orthogonale sur le plan (OIJ). Alors il existe deux réels x et y tel que $\overrightarrow{OM'} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OJ}$ puisque $M' \in (OIJ)$ et il existe un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z \cdot \overrightarrow{OK}$ puisque $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires :



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OJ} + z \cdot \overrightarrow{OK}$$

- Soient O, I, J, K quatre points <u>non coplanaires</u> de l'espace (OIJK est un tétraèdre) et notons $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$. Alors le quadruplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un **repère** de l'espace ce qui signifie que pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique $(x;\ y;\ z)$ de nombre réels appelés **coordonnées** de M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

  On note $M\ (x;\ y;\ z)$, x est l'**abscisse** de M, y l'**ordonnée** de M et z la **cote** de M. La droite OI est appelée **axe des abscisses**, la droite OJ **axe des ordonnées** et la droite OK **axe des cotes.** Si les trois vecteurs du repère ont pour norme 1 et sont deux à deux orthogonaux, on dit que le repère est orthonormé (R.O.N.).

  Par exemple $O(0,\ 0,\ 0)$, $I\ (1, 0, 0)$, $J\ (0,1, 0)$, $K\ (0, 0,1)$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un point unique M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Comme

Dans le plan on prend alors les coordonnées de M dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Coordonnées de $\vec{u}$

si $M(a,b,c)$ dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ Alors $\vec{u}\,(a; b; c)$

3) Calcul vectoriel dans un repère de l'espace

Soient $\vec{u}(x_u; y_u; z_u); \vec{v}(x_v; y_v; z_v); \vec{w}(x_w; y_w; z_w);$ $A(x_A; y_A; z_A)$; $B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$ dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; de même que dans le plan on a alors les formules suivantes :

a) Formules valables dans tout repère

$\alpha\vec{u}(\alpha x_u; \alpha y_u; \alpha z_u); \ \vec{u} + \vec{v}(x_u + x_v; y_u + y_v; z_u + z_v); \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

- on appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le déterminant :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

$\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ssi

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$$

A ; B ; C et D coplanaires ssi $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ don ssi $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})=0$.

$\vec{u}$et $\vec{v}$ sont colinéaires$\Leftrightarrow \exists k \quad \vec{u}=k.\vec{v} \Leftrightarrow$

$$\exists k \quad \begin{cases} x_u = k.x_v \\ y_u = k.y_v \\ z_u = k.z_v \end{cases}$$

b) Formules valables uniquement dans un R.O.N.

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$
- $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- on appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$$

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

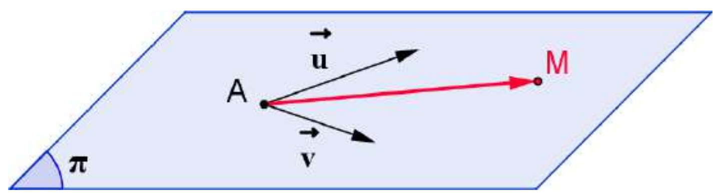
4) Equations d'un plan

a) Déterminer un plan

Il y a deux façons pour déterminer un plan π dans l'espace :

➢ **1^er cas**

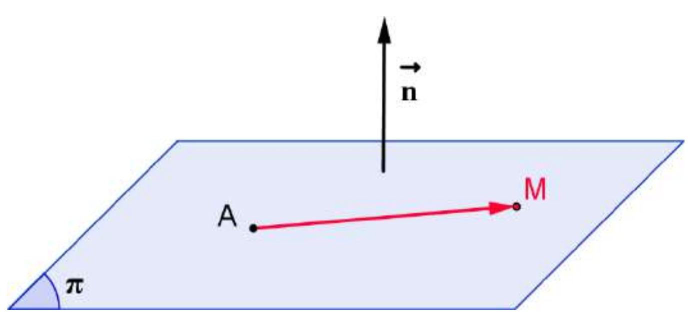
On donne un point $A \in \pi$ et **deux vecteurs directeurs non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de π (ou trois points non alignés A, B, $C \in \pi$ ce qui revient au même puisqu'alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont bien deux vecteurs directeurs non colinéaires de π).



$\forall M \quad M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$

➢ **2^e cas**

On donne un point $A \in \pi$ et **un vecteur normal** $\vec{n}$ au plan c'est-à-dire un vecteur un vecteur non nul qui est orthogonal à tout vecteur directeur de π .



$\forall M \quad M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$

b) Système d'équations paramétriques d'un plan

Soit π un plan donné par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs directeurs non Colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ et $M(x; y; z)$ un point quelconque ; alors :

$M(x; y; z) \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha;\ \beta \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

$\Leftrightarrow \exists \alpha;\ \beta \in \mathbb{R}\ \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists \alpha;\ \beta \in \mathbb{R}\ \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_u + \beta x_v \\ \alpha y_u + \beta y_v \\ \alpha z_u + \beta z_v \end{pmatrix}$

D'où :

$$\boxed{M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \begin{cases} x = x_A + \alpha \cdot x_u + \beta \cdot x_v \\ y = y_A + \alpha \cdot y_u + \beta \cdot y_v \\ z = z_A + \alpha \cdot z_u + \beta \cdot z_v \end{cases}}$$

Ce système de paramètres α et β est appelé système d'équations paramétriques de π .

Exemples

$A(7; -3; 2) \in \pi$ de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 7 + 4\alpha \\ y = -3 - 9\alpha + 5\beta \\ z = 2 + 11\alpha - \beta \end{cases} \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$$

- si $\pi \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\alpha - 6\beta \\ y = -1 + 8\alpha \\ z = -23\alpha + 7\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ alors π est le plan passant par $A(5; -1; 0)$ et

De vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -23 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Autres points de π : $\alpha = 1, \beta = 3$: $B(5 + 3 - 18; -1 + 8; -23 + 21) = B(-10; 7; -2)$,

$\alpha = -2, \beta = 0$: $C(5 - 6; -1 - 16; 46) = C(-1; -17; 46)$, etc.

c) Equation cartésienne d'un plan

1[er] cas : π est défini par un point A et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_u & x_v \\ y - y_A & y_u & y_v \\ z - z_A & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$$

En calculant ce déterminant on obtient une équation de la forme :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } (a,b,c) \neq (0,0,0)}$$

appelée **équation cartésienne** de π .

Exemple

Π défini par $A(3;-5;1)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\7\\9\end{pmatrix}$ $et\vec{v}\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix}$

$$M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -2 & 5 \\ y+5 & 7 & 1 \\ z-1 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -28(x-3) - 2(z-1) + 45(y+5) - 35(z-1) - 8(y+5) - 9(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -37x + 37y - 37z + 333 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + y - z + 9 = 0 \equiv \pi$$

2[e] cas : π est défini par un point A et un vecteur normal n **dans un R.O.N.**

$$M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\\z - z_A\end{pmatrix} . \vec{n}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_n\left(x - x_A\right) + y_n\left(y - y_A\right) + z_n\left(z - z_A\right) = 0$$

et en posant $a = x_n$, $b = y_n$, $c = z_n$ et $d = -x_A x_n - y_A y_n - z_A z_n$ on obtient encore une

équation de la forme : $ax + by + cz = 0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Exemple

$\boldsymbol{\pi}$ défini par : $A(\mathbf{-2;15;0})$ $\boldsymbol{et}$ $\vec{\boldsymbol{n}}\begin{pmatrix}\mathbf{8}\\ \mathbf{-21}\\ \mathbf{-3}\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M(x;y;z)} \in \boldsymbol{\pi} \Leftrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x+2}\\ \boldsymbol{y-15}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}.\vec{\boldsymbol{n}}\begin{pmatrix}\mathbf{8}\\ \mathbf{-21}\\ \mathbf{-3}\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow 8(x+2) - 21(y-15) - 3z = 0$$
$$\Leftrightarrow 8x - 21y - 3z + 331 = 0 \equiv \pi$$

autre méthode : $\pi \equiv 8x - 21y - 3z + d = 0$ et comme $A(-2{,}15,\ 0) \in \pi$:

$8 \cdot (-2) - 21 \cdot 15 - 3 \cdot 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 331$ d'où $\pi \equiv 8x - 21y - 3z + 331 = 0$

5) Systèmes d'équations d'une droite

Il y a deux façons de déterminer une droite d dans et un l'espace :

d est donnée par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\ y_u\\ z_u\end{pmatrix}$

$$M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\ \ \overrightarrow{AM} = k.\vec{u}$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\ \ \begin{pmatrix}x - x_A\\ y - y_A\\ z - z_A\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}x_u\\ y_u\\ z_u\end{pmatrix}$$

et on obtient un **système d'équations paramétriques** de paramètre k de d :

$$\boxed{M(x,y,z) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\quad \begin{cases} x = x_A + k \cdot x_u \\ y = y_A + k \cdot y_u \\ z = z_A + k \cdot z_u \end{cases}}$$

Exemple

$d \equiv \begin{cases} x = 17 - 6k \\ y = 37k \\ z = -5 + 19k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$ est la droite passant par $A(17,\ 0,\ -5)$

et de v.d $\vec{u}(-6; 37; 19)$

- d est donnée comme intersection de deux plans π_1 et π_2, chaque plan étant défini par une équation cartésienne.

La droite d est alors déterminée par un système linéaire de deux équations à trois inconnues appelé **système d'équations cartésiennes** :

$$d \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Exemple

$$d \equiv \begin{cases} x - y + 3z = 2 & (1) \\ 2x + 4y - z = 1 & (2) \end{cases}$$

Pour chercher des points de d il faut résoudre ce système :

$(1) \Leftrightarrow x = 2 + y - 3z$

dans (2) : $4 + 2y - 6z + 4y - z = 1 \Leftrightarrow 6y - 7z = -3 \Leftrightarrow y = \frac{7}{6}z - \frac{1}{2}$

dans (1) : $x = 2 + \frac{7}{6}z - \frac{1}{2} - 3z \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6}z + \frac{3}{2}$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{R}$ $M\left(\frac{-11}{6}z + \frac{3}{2}; \frac{7}{6}z - \frac{1}{2}; z\right) \in d$; par exemple pour $z = 0$ on obtient $A\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) \in d$; pour $z = -3$ on obtient $B(7; -4; -3) \in d$; etc