Chapitre I :

Optimisation linéaire

I-1 Introduction

L'optimisation (programmation) linéaire est une technique mathématique permettant de déterminer la meilleure solution d'un problème dont les données et les inconnues satisfont à une série d'équations et d'inéquations linéaires. La programmation linéaire a été formulée par George Bernard Dantzig en 1947 et connaît un développement rapide par suite de son application directe à la gestion scientifique des entreprises. Le facteur expliquant l'essor de la programmation linéaire est la construction d'ordinateurs puissants qui ont permis de traiter les problèmes concrets de taille très grande. On l'applique surtout en gestion et en économie appliquée. On peut citer les domaines d'application de la programmation linéaire qui sont : les transports, les banques, les industries lourdes et légères, l'agriculture, les chaînes commerciales, la sidérurgie, et même le domaine des applications militaires.

Les méthodes de résolution sont la méthode du simplexe, méthode duale du simplexe, méthodes des potentiels, méthode lexicographique et des méthodes récentes appelées méthodes des points intérieurs.

I.2 Définition

Un programme linéaire (PL) est un modèle mathématique qu'on peut écrire sous la forme :
Maximiser ou minimiser la fonction objectif :

$$\min\ max \quad z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad (I.1)$$

Sous les contraintes

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \ b_i \quad i = 1, \dots, m \qquad (I.2)$$

Et

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \qquad (I.3)$$

Où a_{ij} , b_i *et* c_i sont des constantes connues.

Les contraintes $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots n$, sont appelées contraintes de non-négativité.

Définition 1. On appelle *solution* d'un problème de programmation linéaire tout vecteur x qui satisfait les contraintes (I.2).
Une solution est appelée *solution réalisable* si elle vérifie les contraintes de non-négativité (I.3). Dans le cas contraire, on dit que la solution n'est *pas réalisable*.

Définition2. Une solution réalisable est une *solution optimale* s'il n'existe pas d'autres solutions réalisables qui fournissent une plus grande valeur de la fonction objectif. A noter que dans un problème possédant des solutions réalisables, il se peut que la valeur optimale de la fonction objectif soit infinie. Dans ce cas, on parle de solution *optimale infinie*.

I-3 Exemple de problème de programmation linéaire

I-3-1 Problème de production

Une entreprise fabrique des chaises et des tables à l'aide de deux machines A et B. Chaque produit passe obligatoirement par les deux machines. Pour produire une chaise, il faut 2 heures de machine A et 1 heure de machine B. Pour produire une table, il faut 1 heure de machine A et 2 heures de machine B.
L'entreprise réalise un bénéfice de 3 DZD. sur chaque chaise et de 4 DZD. sur chaque table. Les deux machines A et B sont disponibles 12 heures par jour au maximum.

Le problème consiste à savoir combien de chaises et de tables il faut fabriquer pour maximiser le bénéfice. Le tableau suivant montre :

1. le nombre d'heures nécessaires pour produire chaque table et chaque chaise par machine ;
2. le nombre total des heures disponibles ;
3. le profit pour chaque unité de chaise et de table produite.

Machine	Produit		Disponibilité
	Chaise	Table	
A	2	1	12
B	1	2	12
Bénéfice par unité	3	4	

Il s'agit à présent de formuler mathématiquement le problème.

Notons respectivement par x_1 et x_2 le nombre de chaises et de tables qui doit être produit par jour. Le bénéfice pour une chaise étant de 3 DZD.- et celui pour une table de 4 DZD, le bénéfice journalier est donc donné par la fonction objectif :

$$z= 3x_1 + 4x_2$$

Il faut formuler maintenant les contraintes. Puisque le temps où les machines peuvent fonctionner est limité, on ne peut pas accroître la production indéfiniment. Les machines A et B ne peuvent pas fonctionner plus de 12 heures par jour. On sait que pour produire une chaise, il faut 2 heures de machine A alors que pour une table il n'en faut qu'une.
La contrainte concernant la machine A est donc :

$$2x_1+ x_2 \leq 12$$

De même, une chaise requiert 1 heure de machine B, tandis qu'une table en demande 2. La contrainte concernant la machine B, avec la même durée maximale de 12 heures par jour, est donnée par :

$$x_1+ 2x_2 \leq 12$$

De plus, comme on ne peut pas produire de quantités négatives, il faut ajouter encore deux contraintes de non-négativité :

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Le problème consiste donc à trouver les valeurs des variables x_1 et x_2 qui maximisent le bénéfice journalier (fonction objectif) tout en satisfaisant les contraintes.

En résumé, le problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{lll} & \text{Maximiser } z = 3x_1 + 4x_2 & \\ \text{Sous contraintes} & 2x_1 + x_2 \leq 12 & \\ & x_1 + 2x_2 \leq 12 & \\ \text{Et,} & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Représentation graphique du problème

L'exemple décrit ci-dessus peut être représenté graphiquement puisqu'il ne contient que deux variables. Avant de rechercher la solution du problème, représentons sur la figure I.1 la région des points (x_1 ; x_2) qui satisfont les quatre contraintes simultanément. Les deux contraintes de non-négativité $x_1, x_2 \geq 0$ indiquent que cette région se trouve dans le premier quadrant. En ce qui concerne les deux autres inégalités, on étudie les équations de droite :

$$2x_1 + x_2 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 = 12$$

La première est une droite passant par les points (6 ;0) et (0 ;12), tandis que la deuxième passe par (12 ;0) et (0 ;6). L'intersection de ces deux droites est le point (4 ;4). La région des points satisfaisant les quatre inégalités est la région hachurée sur la figure I.1. Elle a pour sommets les points (0 ;0), (0 ;6), (4 ;4) et (6 ;0).

Pour résoudre le problème de programmation linéaire, nous devons trouver le ou les points appartenant à ce polyèdre convexe et maximisant la fonction objectif : $z = 3x_1 + 4x_2$. Pour une valeur donnée de z, il s'agit d'une droite. En attribuant différentes valeurs à z on obtient autant de droites parallèles (quelle que soit la valeur de z, la pente reste inchangée et vaut -3/4).

Puisque le but est de maximiser la fonction objectif, la recherche de la solution optimale se fait en translatant la droite $z = 3x_1 + 4x_2$ de manière à ce que l'ordonnée à l'origine soit la plus grande. De plus, pour satisfaire les contraintes, l'intersection de cette droite avec la région hachurée doit être non vide.

Sur la figure I.1, la fonction objectif est tracée pour trois valeurs de z. La première valeur est $z_1 = 18$. Cette valeur n'est pas optimale puisque l'on peut encore déplacer la fonction objectif en gardant des points communs avec la région hachurée. La deuxième valeur $z_2 = 28$. Il s'agit de la valeur optimale puisque l'ordonnée à l'origine est la plus grande possible tout en gardant un point d'intersection avec la région hachurée.

La troisième valeur $z_3 = 38$ ne peut pas être optimale puisqu'il n'y a plus de point en commun entre la droite et la région hachurée.

Ainsi dans cet exemple, la solution optimale se situe à l'intersection des deux droites $2x_1 + x_2 = 12$ et $x_1 + 2x_2 = 12$. Il s'agit d'une solution unique donnée par $x_1 = 4$ et $x_2 = 4$. Cela signifie que le bénéfice est maximal lorsqu'on produit 4 chaises et 4 tables par jour. Ce bénéfice s'élève à $z = 3(4) + 4(4) = 28$ par jour.

A noter que la solution optimale est l'un des sommets du polyèdre (point extrême).

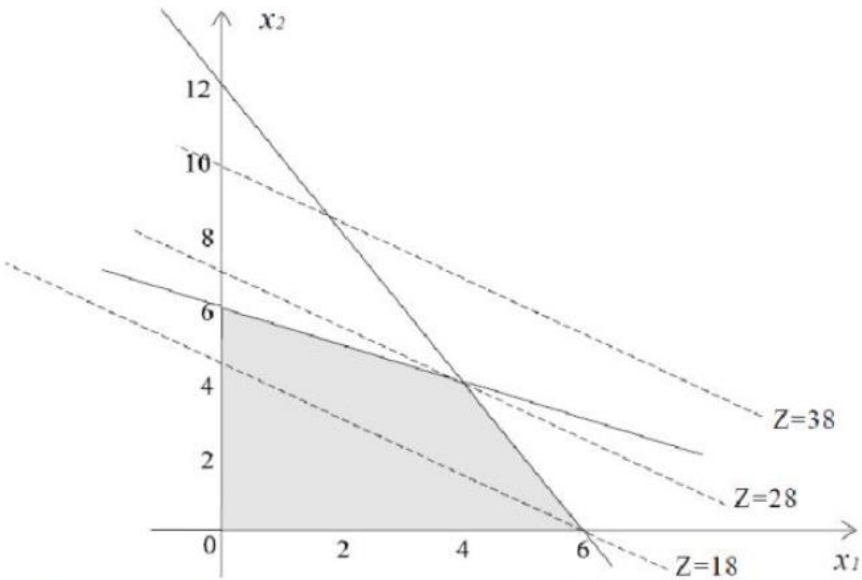

Figure I.1 : Région réalisable et fonction objectif pour $z_1 = 18, z_2 = 28$ et $z_3 = 38$

I-3-2 Problème de Mélange. Il faut mélanger trois gaz de telle manière que le gaz mixte soit le meilleur marché que possède un pouvoir calorifique entre plus de 1700 et 2000 k. cal/ m3 et un taux de sulfure au plus de 2,8 g/ m3.
Indications sur les trois gaz :

Gaz	Pouvoir calorifique k. cal/ m^3	Taux de sulfure g/ m^3	Prix en DA
1	1000	6	100
2	2000	2	250
3	1500	3	200

Ecrire le modèle mathématique de ce problème.

Formulation du problème

✓ **Variables :** x_1, x_2 et x_3 sont les nombres en m^3 du 1er, 2ème et 3ème gaz à fabriquer respectivement.

✓ **Fonction objectif à maximiser :** La fonction objectif Z correspond au profit total :

$$Z= 100\, x_1 + 250\, x_2 + 200\, x_3$$

On cherche donc

$$\text{Max } Z= 100\, x_1 + 250\, x_2 + 200\, x_3$$

✓ **Contraintes :**

- Pouvoir calorifique $1700 \leq 1000\, x_1 + 2000\, x_2 + 1500\, x_3 \leq 2000$
- Taux de sulfure $6\, x_1 + 2\, x_2 + 3\, x_3 \leq 2.8$
- Positivité des variables $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

I-3-3 Problème de découpe.

Une usine a reçu des plaques de métal d'une largeur de 200 cm et d'une longueur de 500 cm. Il faut en fabriquer au moins 30 plaques de largeur de 110 cm, 40 plaques de largeur de 75 cm et 15 plaques de largeur de 60 cm. Donner le modèle mathématique pour que les déchets soient les plus petits possibles.

Formulation du problème
Une plaque de 200 cm de largeur peut être découpée de cinq façons :

1. une plaque de 75 cm et deux plaques de 60 cm. Les déchets seront de 05 cm.
2. une plaque de 110 cm et une plaque de 75 cm. Les déchets seront de 15 cm.
3. une plaque de 110 cm et une plaque de 60 cm. Les déchets seront de 30 cm.
4. trois plaques de 60 cm. Les déchets seront de 20 cm.
5. deux plaques de 75 cm. Les déchets seront de 50 cm.

✓ **Variables :** x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 sont les nombres de plaques à découper par la 1ere, 2ème,3ème,4ème et la 5ème façons respectivement.

✓ **Fonction objectif à minimiser :** La fonction objectif Z correspond déchet total :

$$Min\ Z = 5\ x_1 + 15\ x_2 + 30\ x_3 + 20\ x_4 + 50\ x_5$$

On cherche donc :

$$Min\ Z = 5\ x_1 + 15\ x_2 + 30\ x_3 + 20\ x_4 + 50\ x_5$$

✓ **Contraintes :**

- Plaques de largeur 110cm $\quad x_3 + x_2 \geq 30$
- Plaques de largeur 75cm $\quad x_1 + x_2 + 2\ x_5 \geq 40$
- Plaques de largeur 60cm $\quad 2x_1 + x_3 + 3x_4 \geq 15$
- Positivité des variables $\quad x_1 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0$

I-3-4 Problème de transport.

Il s'agit ici d'un problème que l'on peut résoudre par la programmation linéaire, c'est-à-dire un problème de transport. Ce type de problème se définit comme suit.
Connaissant les quantités disponibles de chacune des unités de production, les quantités requises aux points de distribution et le coût de transport d'un bien d'une usine vers un point de vente, il s'agit de déterminer le plan de transport optimal, c'est-à-dire de déterminer les quantités de biens que chaque usine va envoyer vers chacun des points de vente afin que le coût de transport total soit minimum. On suppose qu'il est possible d'expédier des produits de n'importe quelle origine vers n'importe quelle destination.
L'exemple ci-dessous est le cas d'une fabrique de conserves qui expédie des caisses vers ses dépôts. Nous voulons que le plan d'expédition des caisses minimise le coût total de transport des usines aux dépôts. Pour simplifier, supposons qu'il y a deux usines et trois dépôts. L'offre des usines et les demandes des dépôts sont les suivantes (en nombre de caisses) :

Usine 1 : 350 dépôt 1 : 200
Usine 2 : 450 dépôt 2 : 300
dépot 3 : 50

Les coûts de transport de chaque origine vers chaque destination sont donnés dans le tableau ci-dessous (en DA par caisse) :

Usines	Dépôts		
	1	2	3
1	25	17	16
2	24	18	14

Ainsi, le coût pour transporter une caisse de l'usine 1 au dépôt 1 est de 25, le coût pour transporter une caisse de l'usine 2 vers le dépôt 1 est de 24, et ainsi de suite. Ce problème peut se formuler sous la forme d'un problème de programmation linéaire. Notons par c_{ij} le coût de transport d'une caisse de l'origine *i* vers la destination *j*. Nous avons donc, d'après le tableau précédent :

$$c_{11} = 25 \ ,c_{12} = 17 \ ,c_{13} = 16 \ ,c_{21} = 24 \ ,c_{22} = 18 \ ,c_{23} = 14$$

Soit a_i la quantité de caisses disponibles à l'origine *i* et b_j celle requise à la destination *j*.
Nous pouvons représenter le problème sous forme d'un diagramme (figure I.2). Les lignes qui relient les usines aux dépôts peuvent être considérées comme des routes. On y indique leur coût de transport unitaire respectif.
A noter que le nombre de caisses disponibles doit être supérieur ou égal au nombre de caisses requises :

$$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 + b_3$$

Dans le cas contraire, le problème n'a pas de solutions réalisables.

Si x_{ij} représente le nombre de caisses expédiées de l'origine *i* vers la destination *j*, le coût total de l'expédition se traduit alors par l'équation :

$$z = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} c_{ij}x_{ij} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$$

$$z = 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23}$$

C'est la fonction objectif à minimiser.

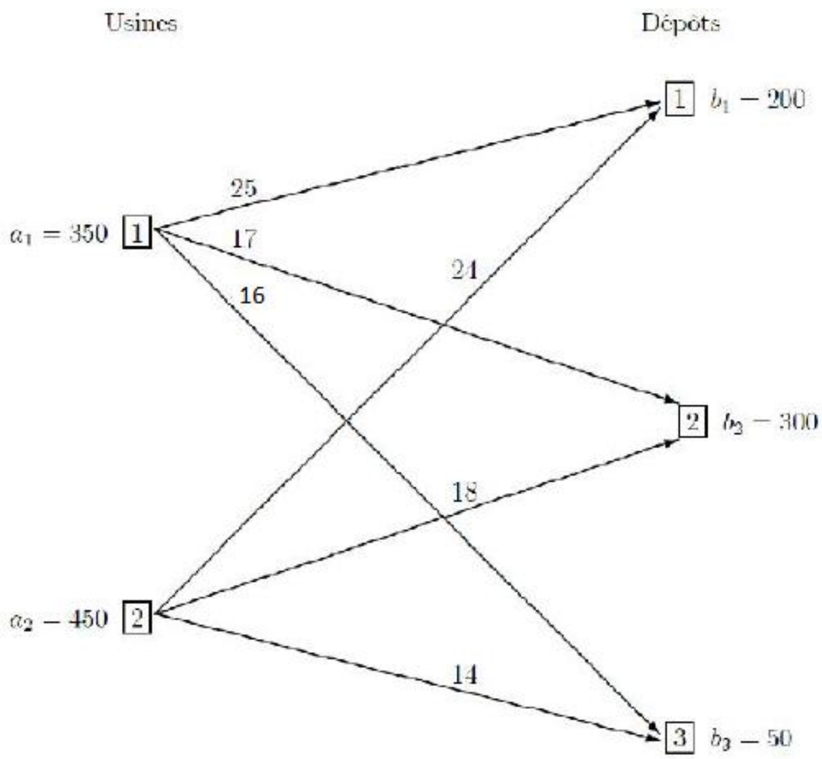

Figure I.2 : Coût de transport unitaire des usines aux dépôts

Comme il est impossible d'expédier plus de caisses d'une origine donnée qu'il n'y en a de disponibles, nous sommes confrontés aux deux contraintes :

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350 \qquad (usine\ 1)$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 450 \qquad (usine\ 2)$$

De plus, il faut approvisionner chacun des trois dépôts avec la quantité requise, ce qui nous donne trois nouvelles contraintes :

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i1} = x_{11} + x_{21} = 200 \qquad (dépot\ 1)$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i2} = x_{12} + x_{22} = 300 \qquad (dépot\ 2)$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i3} = x_{13} + x_{23} = 50 \qquad (dépot\ 3)$$

Comme il n'est pas possible d'expédier des quantités négatives, nous avons encore les six contraintes de non-négativité suivantes :

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2 \quad et \quad j = 1,2,3$$

Finalement, le programme linéaire à résoudre est :

$$\begin{array}{ll} Minimiser & Z = 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23} \\ Sous\ contraintes & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 450 \\ & x_{11} + x_{21} = 200 \\ & x_{12} + x_{22} = 300 \\ & x_{13} + x_{23} = 50 \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2 \quad et \quad j = 1,2,3 \end{array}$$

Comme ce problème présente plus de deux variables, nous ne pouvons pas le résoudre géométriquement.