Cours 1 : vibrations libres non-amorties

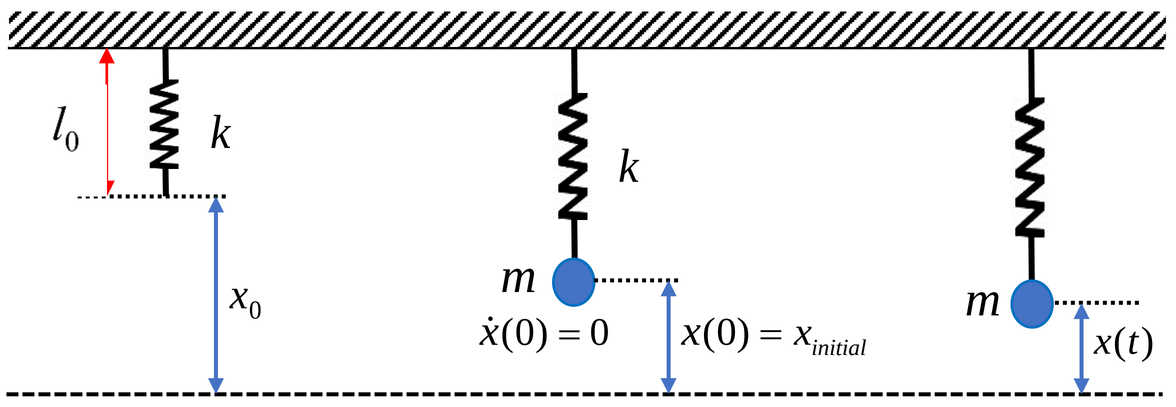
الدرس 1 : الاهتزازات الحرة الغير متخامدة

1- Un système masse ressort conventionnel

Soit le système représenté dans la figure (1-a), on prend un ressort avec une longueur au repos (l_0) fixé au plafond, on suspend une masse (m) à la 2éme extrémité du ressort comme le montre la figure (1-b), pendant la suspension de la masse (m) le ressort est élongé, à l'instant $(t=0)$ la masse est relâchée sans vitesse initiale $\dot{x}(0)=0$ et commence a oscillé verticalement comme le montre la figure (1-c).

نأخذ نابض في وضع الراحة استطالته (l_0) كما هو مبين في الشكل (1-أ) حيث النابض معلق في السقف، نعلق كتلة (m) في الطرف الثاني للنابض كما هو مبين في الشكل (1-ب)، خلال تعليق الكتلة يسحب النابض بمقادير معين، في اللحظة $(t=0)$ تترك الكتلة حرة بدون سرعة $\dot{x}(0)=0$ ابتدائية وتبدأ في الاهتزاز افقيا كما هو مبين في الشكل (1-ج).

Ressort au repos	$t=0$ (avant de relacher la masse)	Temp variable



Repère du mouvement $(x(t)=0)$ ou les forces du ressort et de la gravité sont égales en quantité et opposées en directions.

Figure -1-	الشكل -1-

- La question qui se pose, peut ont prédire le mouvement de la masse ?

Pour répondre à cette question il faut comprendre et décrire le mouvement de la masse pour pouvoir le prédire.

Pour décrire le mouvement de la masse on doit définir un repère de coordonnées, ce mouvement est unidirectionnel, ainsi la position d'équilibre est la position ou la force du rappel du ressort et la force de gravité sont égales et opposées. Donc les deux forces s'annulent mutuellement au niveau de la position d'équilibre. Le sens positif du mouvement est vers le haut.

- السؤال المطروح هل يمكننا التنبؤ بطبيعة الحركة واحداثياتها؟

من اجل الإجابة على هذا السؤال يجب فهم طبيعة الحركة ووصفها من اجل توقع ما الذي سيجري.

إذا من اجل وصف الحركة وجب علينا أولا تعريف معلم احداثيات، هذه الحركة أحادية البعد. إذا وضع التوازن هو الوضع الذي تستوي فيه قوة النابض وقوة الجاذبية في الشدة ويتعاكسان في الاتجاه و بالتالي يلغيان بعضهما. الاتجاه الموجب للحركة هو نحو الأعلى.

2- Description mathématique d'un système masse-ressort

a) Représentation des forces

On a une masse (m) et des forces, la masse peut être représentée par un point matériel (m) soumis à deux forces : la force du ressort et la force de la gravité.

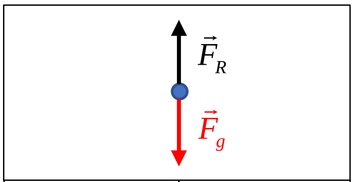


Figure -2- | -2- الشكل

Due à l'action des deux forces sur la masse cette dernière va bouger et aura donc une accélération décrite par l'équation (1.1).

$$\vec{a}(t) \Leftrightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2}.\hat{x} \Leftrightarrow \ddot{x}(t).\hat{x} \qquad (1.1)$$

b) Application de la seconde loi de Newton

$$\vec{F} = m.\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (2.1)$$

Où : $\vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F}_g$ (3.1)

c) Application des lois de Hook et de la gravité

La loi de Hook : $\vec{F}_R = k[x_0 - x(t)].\hat{x}$ (4.1)

La loi de la gravité : $\vec{F}_g = -m.g.\hat{x}$ (5.1)

En utilisant les conditions initiales on a :

$\dot{x}(0) = 0$	$x(0) = x_{initial}$	$\ddot{x} = 0$ à $x = 0$
La vitesse à l'instant $t = 0$ est nulle	Le déplacement à l'instant $t = 0$ est nommé déplacement initial	A la position d'équilibre le déplacement est nul et l'accélération est nulle*

*L'accélération étant la dérivé seconde du déplacement.

3- L'équation du mouvement

On remplace les équations (4.1) et (5.1) dans l'équation (2.1) on obtient l'équation vectorielle suivante :

$$\ddot{x}(t).\hat{x} = \frac{\vec{F}_R + \vec{F}_g}{m} = \frac{1}{m}[k(x_0 - x(t)).\hat{x} - m.g.\hat{x}] \qquad (6.1)$$

Toutes les forces sont dans la même direction on peut donc éliminer le facteur de direction $\hat{x}$

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}[k.x_0 - k.x(t) - m.g] \qquad (7.1)$$

L'équation (7.1) comporte plusieurs inconnus $(x_0, x(t))$ et ne peut être résolue dans sa forme actuelle.

En revenant à la position d'équilibre quand $(\vec{F}_R = \vec{F}_g$ et $\vec{F}_R + \vec{F}_g = 0)$ et où $(x = 0$ et $\ddot{x} = 0)$ on obtient :

$$0 = \frac{1}{m}[k.x_0 - m.g] \ , \ m \neq 0 \qquad (8.1)$$

Ainsi :

$$k.x_0 - m.g = 0 \ \Leftrightarrow \ k.x_0 = m.g \qquad (9.1)$$

Remarque : On peut déduire que l'élongation initiale du ressort due à la suspension de la masse (m) ***sur ce dernier s'annule mutuellement avec la force de gravité agissant sur la masse*** (m)

On remplace l'équation (9.1) dans l'équation (7.1) et on trouve :

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}.x(t) \ \Leftrightarrow \ \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}.x(t) = 0 \qquad (10.1)$$

L'équation (10.1) est l'équation qui décrit le mouvement d'un système masse ressort en vibration libre non-amortie. Cette équation décrit à la fois le déplacement et l'accélération de la masse (m).