Université Mohamed Khider de Biskra
Département TCST
Module: Math II

Première Année Licence
2021/2022

Interrogation

Exercice 1 *:* Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$\begin{array}{ll}
1) & y' - y = xe^{-x},\ \textit{avec } x \in \mathbb{R} \textit{ et } y \in \mathbb{R}^+. \\
2) & y' - 2xy = (2x+1)e^{-x},\ \textit{avec } x \in \mathbb{R} \textit{ et } y \in \mathbb{R}^+. \\
3) & xy' - y = \dfrac{x}{x^2-1},\ \textit{avec } x > 1 \textit{ et } y \in \mathbb{R}^+. \\
4) & xy' - y = x^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + sin(x) + e^{-x}\right),\ \textit{avec } x \in]0,1[\textit{ et } y \in \mathbb{R}^+.
\end{array}$$

Exercice 2 *:* Calculer ce qui suit:

$$F(x) = \int cos(x)\,(tan(x))^2\,dx.$$

$$I = \int_0^1 x\left(ln(x) + e^{-x}\right)dx.$$

Exercice 3 *:* Soient les deux fonctions suivantes

$$f(x) = e^{-x^2} \quad et \quad g(x) = cos(x).$$

1. *Calculer la dérivé de* $f \times g$.
2. *Calculer la prémétive* $F(x) = \int -2xcos(x)e^{-x^2} + sin(x)e^{-x^2}dx$.
3. *Déduire la valeur de* $I = \int_0^{\pi/2} -2xcos(x)e^{-x^2} + sin(x)e^{-x^2}dx$.

Exercice 4 *:* Soient les fonctions suivantes

$$P(x) = x^3 - 6x + 11x - 6 \quad Q(x) = 3x^2 - 12x + 11 \quad et \quad f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}.$$

1. *Vérifier que* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, *et* $x_3 = 3$, *sont des racines de* $P(x)$.
2. *Calculer* $\int f(x)dx$.

Solution de l'Interrogation

Solution de l'Exercice 1

1. La première equation est donnée par:

$$y' - 2y = xe^{-x}, \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Solution homogène:

$$\begin{aligned} y' - 2y = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2dx \\ &\Rightarrow \quad \ln(y) = 2x + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad y = Ke^{2x}, \quad \text{avec } K = e^c \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

alors la solution homogène est donnée par:

$$y = Ke^{2x} \ \ avec \ \ x \in \mathbb{R} \ et \ K \in \mathbb{R}^+.$$

Solution particulière (par variation de la constante): On a d'après ce qui précède une solution particulière peut être écrite sous la forme suivante:

$$y = K(x)e^{2x}. \tag{2}$$

alors,

$$y' = K'(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x}. \tag{3}$$

on substituant (2) et (3) dans (1) on aura:

$$\begin{aligned} y' - 2y = xe^{-x} \quad &\Rightarrow \quad K'(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x} - 2K(x)e^{2x} = xe^{-x} \\ &\Rightarrow \quad K'(x)e^{2x} = xe^{-x} \Rightarrow K'(x) = xe^{-3x} \\ &\Rightarrow \quad K(x) = \int xe^{-2x}dx. \end{aligned}$$

Il est claire que cette dernière intégrale peut être calculée à l'aide de l'intégration par partie où $\int UV'dx = UV - \int U'Vdx$. A cet effet on procède comme suit:

$$\begin{cases} U = x \\ V' = e^{-3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 1 \\ V = \frac{-1}{3}e^{-2x} \end{cases}$$

ainsi on aura:

$$\begin{aligned} K(x) \quad &= \quad \int xe^{-3x}dx = -\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx. \\ &= \quad -\frac{x}{2}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + c_1, \quad \text{avec } c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Solution Générale: D'après les résultats précédents la solution générale est donnée par:

$$y = c_1e^{2x} - \frac{1}{9}e^{-x}(3x+1), \quad \text{avec } c_1 \in \mathbb{R}.$$

2. La deuxième equation est donnée par:

$$y' - 2xy = (2x+1)e^{-x}, \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^+. \tag{4}$$

Solution homogène:

$$\begin{aligned} y' - 2xy = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \\ &\Rightarrow \quad \ln(y) = x^2 + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad y = Ke^{x^2}, \quad \text{avec } K = e^c \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Alors la solution homogène de l'équation en question est donnée par:

$$y = Ke^{x^2}, \quad avec x \in \mathbb{R} \ et \ K = \in \mathbb{R}^+.$$

Solution particulière (par variation de la constante): On a d'après ce qui précède une solution particulière peut être écrite sous la forme suivante:

$$y = K(x)e^{x^2}. \tag{5}$$

D'où,

$$y' = K'(x)e^{x^2} + 2xK(x)e^{x^2}. \tag{6}$$

En substituant (5) et (6) dans (4) on aura:

$$\begin{aligned} y' - 2xy = xe^{-x} \quad &\Rightarrow \quad K'(x)e^{x^2} + 2xK(x)e^{x^2} - 2xK(x)e^{x^2} = (2x+1)e^{-x} \\ &\Rightarrow \quad K'(x)e^{x^2} = (2x+1)e^{-x} \Rightarrow K'(x) = (2x+1)e^{-(x^2+x)} \\ &\Rightarrow \quad K(x) = \int (2x+1)e^{-x^2-x} = -\int (-(x^2+x))' \ e^{-(x^2+x)} \\ &\Rightarrow \quad K(x) = -e^{-(x^2+x)} + c_1, \quad \text{avec } c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Solution Générale : D'après les résultats la solution générale est:

$$y = c_1 e^{x^2} - e^{-x} \quad \text{avec } c_1 \in \mathbb{R}.$$

3. La troisième equation est donnée par:

$$xy' - y = \frac{x}{x^2 - 1}, \qquad \text{avec } x > 1 \text{ et } y \in \mathbb{R}^+. \tag{7}$$

Solution homogène:

$$\begin{aligned} xy' - y = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x} dx \\ &\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln(x) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad y = Kx, \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Alors la solution homogène a la forme suivante:

$$y = Kx.$$

Solution particulière (par variation de la constante): On a d'après ce qui précède une solution particulière peut être écrite sous la forme suivante:

$$y = K(x)x, \tag{8}$$

alors,

$$y' = K'(x)x + K(x). \tag{9}$$

Ainsi, en substituant (8) et (9) dans (7) on aura:

$$\begin{aligned} xy' - y = \frac{x}{x^2-1} \quad & \Rightarrow \quad K'(x)x^2 + xK(x) - xK(x) = \frac{x}{x^2-1} \\ & \Rightarrow \quad x^2K'(x) = \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow K'(x) = \frac{1}{x(x^2-1)} \\ & \Rightarrow \quad K(x) = \int \frac{1}{x(x^2-1)}. \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2-1)} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2 + (b-c)x - a}{x(x^2-1)} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ b - c = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

alors:

$$\begin{aligned} K(x) &= \int \frac{1}{x(x^2-1)}dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}dx \\ &= -\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + c_1. \end{aligned}$$

Solution Générale: D'après les résultats précédents on conclut que la solution générale est donnée comme suit:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x\left(2c_1 + \ln\left(x^2-1\right) - 2\ln(x)\right) \\ &= x\left(\ln\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) + c_1\right), \quad \text{avec } c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. la dernière equation est:

$$xy' - y = x^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + sin(x) + e^{-x}\right), \quad \text{avec} \quad x \in]0;1[\text{ et } y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Solution homogène:

$$\begin{aligned} xy' - y = 0 \quad & \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \\ & \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x}dx \\ & \Rightarrow \quad \ln(y) = \ln(x) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow \quad y = Kx, \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

alors la solution homogène est donnée par:

$$y = Kx.$$

Solution particulière(par variation de la constante): On a d'après ce qui précède une solution particulière peut être écrite sous la forme suivante:

$$y = K(x)x. \tag{11}$$

alors,

$$y' = K'(x)x + K(x). \tag{12}$$

En substituant (11) et (12) dans (10) on aura:

$$\begin{aligned}
& K'(x)x^2 + xK(x) - xK(x) = x^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + sin(x) + e^{-x}\right) \\
\Rightarrow\ & x^2K'(x) = x^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + sin(x) + e^{-x}\right) \\
\Rightarrow\ & K'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + sin(x) + e^{-x} \\
\Rightarrow\ & K(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + sin(x) + e^{-x}dx \\
\Rightarrow\ & K(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int sin(x)dx + \int e^{-x}dx \\
\Rightarrow\ & K(x) = arcsin(x) - cos(x) - e^{-x} + c_1.
\end{aligned}$$

Solution Générale: D'après les résultats précédent alors la solution générale est donnée par:

$$y = x\left(arcsin(x) - cos(x) - e^{-x} + c_1\right), \quad \text{avec } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'Exercice 2

1. $F(x) = ?$:

$$F(x) = \int cos(x)\,(tan(x))^2\,dx = \int \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}cos(x)dx$$

on pose $t = sin(x) \Rightarrow dt = cos(x)dx$ *alors*

$$\int \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}cos(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{t^2}{1-t^2}dt.$$

on a $\frac{t^2}{1-t^2}$ *peut être décomposé comme suit:*

$$\frac{t^2}{1-t^2} = a + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t} = \frac{-at^2 + (b-c)t + (a+b+c)}{1-t^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ b - c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1/2 \\ c = 1/2 \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^2}{1-t^2}dt &= -\int 1dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt \\
&= -t - \frac{1}{2}ln(|1-t|) + \frac{1}{2}ln(|1+t|) + c
\end{aligned}$$

d'où

$$F(x)=\int cos(x)\left(tan(x)\right)^2dx=-sin(x)-\frac{1}{2}ln\left(1-sin(x)\right)+\frac{1}{2}ln\left(1+sin(x)\right)+c.$$

2. $I=?$:
On a

$$\int x\left(ln(x)+e^{-x}\right)dx=\underbrace{\int xln(x)dx}_{I_1}+\underbrace{\int xe^{-x}dx}_{I_2}$$

Pour calculer I_1 et I_2 on utilise l'integration par partie.

$I_1=?$: *Pour calculer I_1 on pose ce qui suit:*

$$\begin{cases} U=ln(x) \\ V'=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'=\frac{1}{x} \\ V=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

ainsi on aura:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int xln(x)dx=\frac{x^2}{2}ln(x)-\frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}ln(x)-\frac{1}{4}x^2+c_1 \\ &= c_1+\frac{1}{4}x^2\left(2ln(x)-1\right). \end{aligned}$$

$I_2=?$: *Pour calculer I_2 on pose ce qui suit:*

$$\begin{cases} U=x \\ V'=e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'=1 \\ V=-e^{-x} \end{cases}$$

ainsi on aura:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+c_2 \\ &= c_2-(x+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \int x\left(ln(x)+e^{-x}\right)dx &= I_1+I_2 \\ &= c_1+\frac{1}{4}x^2\left(2ln(x)-1\right)+c_2-(x+1)e^{-x} \\ &= \frac{1}{4}x^2\left(2ln(x)-1\right)-(x+1)e^{-x}+c_3. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{4}1^2\left(2ln(1)-1\right)-(1+1)e^{-1}\right]-\left[\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}x^2\left(2ln(x)-1\right)-(0+1)e^{-0}\right] \\ &= \end{aligned}$$

Solution de l'Exercice 3 1. $(f*g)'=?$
on a

$$\begin{aligned} (f*g)' &= f'*g+f*g' \\ &= \left(e^{-x^2}\right)'*cos(x)+(cos(x))'e^{-x^2} \\ &= -2xcos(x)e^{-x^2}-sin(x)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

2. $F(x) = ?$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int -2xcos(x)e^{-x^2} - sin(x)e^{-x^2}dx \\ &= \int (f(x) * g(x))'dx = f(x) * g(x) + c, \qquad avec\ c \in \mathbb{R}. \\ &= cos(x)e^{-x^2} + c, \qquad avec\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. $I = ?$

$$\begin{aligned} I &= F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \\ &= cos(\pi/2)e^{-\pi^2/4} - cos(0)exp(0) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Solution de l'Exercice 4

1. *Pour verifier que x_i est une racine de $P(x)$, il suffit de verifier si $P(x_i) = 0$:*
   - $P(x_1) = P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$
   - $P(x_2) = P(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$
   - $P(x_3) = P(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$

   On déduit que 1, 2 et 3 sont tous des racine de $P(x)$.

2. *Calcul de $\int f(x)dx$:*

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{Q(x)}{P(x)}dx = \int \frac{3x^2 - 12x + 11}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}dx \\ &= \int \frac{\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)'}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}dx \\ &= ln(|x^3 - 6x^2 + 11x - 6|) + c, \quad avec \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$