حدود الثقة لمتوسط القيمة الحقيقية عند مستوى معنوية $\alpha\%$:

– يعطى مجال الثقة لقيمة حقيقية (y_a) عند القيمة x_a عند مستوى معنوية $\alpha\%$ من العلاقة التالية:

$$E(Y_a) = \widehat{Y_a} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-k-1)} * \hat{\sigma}_{Y_a}$$

$$\hat{\sigma}_{Y_a}{}^2 = \hat{\sigma}_{\varepsilon_i}{}^2 * x_a(x'x)^{-1}x'_a \qquad \text{حيث}$$

حسب نفس معطيات التمرين السابق:

المطلوب/

تنبأ ، أوأحسب متوسط المبيعات عندما يتغير سعر السلعة حيث يصبح

سعر السلعة المباعة 10وحدة نقدية.

ويتغير الدخل ويصبح 400 وحدة نقدية.

ويتغير سعر السلعة البديلة ليصبح 13 وحدة نقدية.

عند مستوى معنوية 5%.

الحـــل:

$$E(Y_a) = \widehat{Y_a} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-k-1)} * \hat{\sigma}_{Y_a}$$

$$\hat{\sigma}_{Y_a}{}^2 = \hat{\sigma}_{\varepsilon_i}{}^2 * x_a(x'x)^{-1}x'_a$$

$$x_a\,(1{,}10{,}400{,}13)$$

$$\hat{y}_a = x_a\hat{\beta}_j = (1{,}10{,}400{,}13)\begin{vmatrix} 26{,}34 \\ -3{,}43 \\ 0{,}09 \\ 0{,}93 \end{vmatrix}$$

$$\widehat{Y_a} = 40.13$$

$$\hat{\sigma}_{Y_a}{}^2 = \hat{\sigma}_{\varepsilon_i}{}^2 * x_a(x'x)^{-1}x'_a$$

x_a $\quad$ $(x'x)^{-1}$ $\quad$ X'_a

$$=(25{,}21)\ (1{,}10{,}400{,}13)_{1x4}\begin{bmatrix} 197{,}91\ldots\ldots\ldots -3{,}08 \\ \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ -3{,}08 \quad\quad\quad\quad 0{,}09 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 400 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$=(25{,}21)\ (1{,}9) = \boxed{47{,}899}$$

$$\hat{\sigma}_{(ya)} = \sqrt{47{,}899} = 6{,}92$$

$$E(y_a) = 40{,}13 \pm 3{,}18\ (6{,}92)$$

$$= 40{,}13 \pm 22{,}0056$$

$$18{,}1244 \leq E_{(ya)} \leq 62{,}1356$$

* نحن واثقون بـ 95% أن متوسط المبيعات سوف يقع في المجال: [62,1356 ، 18,1244]

7.6. مجال الثقة لمعاملات النموذج:

يعطى مجال الثقة لأي معامل (βj) عند مستوى دلالة ما حسب العلاقة التالية:

$$\beta j \in \left[\hat{\beta} j \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-k-1}.\hat{\sigma}_{\beta j}\right]$$

مثـــال:

مجال الثقة لβ_1 "حدد أو قدر مجال الثقة" بـ95% لـ β_1

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{h-k-1}.\hat{\sigma}_{\beta 1}\right]$$

$$\beta_1 \in [-3,43 \pm 3,18(3,85)]$$

$$\beta_1 \in [-3,43 \pm 12,243]$$

$$\beta_1 \in [-15,673;\ 8,813]$$

نحن واثقون بـ95% أن معامل β_1 (معامل سعر السلعة) سوف ينتمي إلى هذا المجال.

[-15,6373 ، 8,813]

تمرين محلول :

لدينا البيانات المبينة في الجدول التالي:

جدول المعطيات الإحصائية لـ Y، X_1 و X_2

X_{i2}	X_{i1}	Y_i	i
3	2	4	1
7	4	6	2

10	5	7	3
8	7	9	4
8	9	10	5
9	10	12	6
11	12	14	7
13	14	16	8
14	15	18	9
15	17	20	10

المطلوب : المصدر: شيخي محمد

1- قدر معلمات النموذج مستخدما طريقة المربعات الصغرى

2- أحسب مصفوفة التباين المشترك

الحل

لدينا 10 مشاهدات و متغيران مستقلان، يكتب النموذج كما يلي:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

مع:

$$Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} ; \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} ; \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

حيث $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$. وعليه نحسب $X'X$ و $(X'X)^{-1}$ و $X'Y$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 4 & 5 & \cdots & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 95 & 98 \\ 95 & 1129 & 1081 \end{pmatrix}$$

اذا:

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.1725 & 0.0852 & -0.1921 \\ 0.0852 & 0.0284 & -0.0362 \end{pmatrix}$$

و أيضا:

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 4 & 5 & \cdots & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116 \\ 1342 \end{pmatrix}$$

لدينا:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{pmatrix} 1.1725 & 0.0852 & -0.1921 \\ 0.0852 & 0.0284 & -0.0362 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 \\ 1342 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0996 \\ 0.9776 \end{pmatrix}$$

لإيجاد مصفوفة التباين–التباين المشترك للمقدرات، ينبغي أولا حساب تباين البواقي حيث يتم حساب قيم $\hat{Y}_i$ انطلاقا من الانحدار الخطي $\hat{Y}_i = 1.0996 + 0.9776X_{i1} + 0.1237X_{i2}$ و بواقي التقدير $\hat{\varepsilon}_i$ من المعادلة $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

حساب البواقي

i	Y_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{\varepsilon}_i$	$\hat{\varepsilon}_i^2$
1	4	3.4261	0.5738	0.3292
2	6	5.8764	0.1235	0.0152
3	7	7.2252	-0.2252	0.0507
4	9	8.9331	0.0668	0.0044
5	10	10.8884	-0.8884	0.7893
6	12	11.9898	0.0101	0.0001
7	14	14.1926	-0.1926	0.0371
8	16	16.3954	-0.3954	0.1563
9	18	17.4968	0.5031	0.2532

10	20	19.5758	0.4241	0.1798
المجموع			0	1.8157

لدينا:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}} = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{} = \frac{\sum_{i=1}^{10}\hat{\varepsilon}_i^2}{} = \frac{1.8157}{} = 0.2593$$

نقوم بتحديد مصفوفة التباين–التباين المشترك للمقدرات $\hat{\Omega}_{\hat{\beta}}$، ليكن:

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}}(X'X)^{-1}$$

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = 0.2593 \times \begin{pmatrix} 1.1725 & 0.0852 & -0.1921 \\ 0.0852 & 0.0284 & -0.0362 \\ -0.1921 & -0.0362 & 0.0547 \end{pmatrix}$$

نجد تباين كل مقدر بضرب تباين البواقي بكل عنصر من عناصر قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0} = 0.2593 \times 1.1725 = 0.3040 \rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = 0.5513$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}} = 0.2593 \times 0.0284 = 0.0073 \rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0.0858$$