دراسة معنوية صلاحية النموذج (تحليل التباين) [اختبار فيشرF] ودراسة استقلالية المتغيرات

الهدف من تحليل التباين أو ما يعرف باختبار فيشر أو اختصارا اختبار F هو اختبار صلاحية أو ملاءمة النموذج ذلكم من خلال اختبار معامل التحديد ويتم ذلك من خلال رسم جدول تحليل التباين .

يعطى جدول التحليل كما يلي:

جدول تحليل التباين (Anova)

مصدر الانحراف		درجة الحرية		
الانحدار SCEأو SSR	$=\hat{\beta}_j \acute{x}y - n\,\overline{y}^2$	k	$\left(\hat{\beta}_j \acute{x}y - n\,\overline{y}^2\right)/k$	$f_c = \dfrac{\left(\hat{\beta}_j \acute{x}y - n\,\overline{y}^2\right)/k}{\left(\sum y_i^2 - \hat{\beta}_j \acute{x}y\right)/(n-k-1)}$
البواقي SCR أوSSE	$=\sum y_i^2 - \hat{\beta}_j \acute{x}y$	n–k–1	$\left(\sum y_i^2 - \hat{\beta}_j \acute{x}y\right)/(n-k-1)$	
الانحراف الكلي SCT أو SST	$=\sum y_i^2 - n\,\overline{y}^2$	n–1		

F test (good fitness test) variance analysis(Anova)

Deviation source	*Sum squared(SS)*	*df*	*ASS*	*F Value=f_c*
Regression: SSR	$SSR = \hat{\beta}_j \acute{x}y - n\,\overline{y}^2$	k	$\left(\hat{\beta}_j \acute{x}y - n\,\overline{y}^2\right)/k$	$f_c = \dfrac{\left(\hat{\beta}_j \acute{x}y - n\,\overline{y}^2\right)/k}{\left(\sum y_i^2 - \hat{\beta}_j \acute{x}y\right)/(n-k-1)}$
Errors/residuals: SSE	$SSE = \sum y_i^2 - \hat{\beta}_j \acute{x}y$	$n-k-1$	$\left(\sum y_i^2 - \hat{\beta}_j \acute{x}y\right)/(n-k-1)$	
Total deviation: SST	$SST = \sum y_i^2 - n\,\overline{y}^2$	$n-1$		

كما رأينا سابقا في خطوات اختبار الفرضيات ، نفس الخطوات تتكرر هنا حيث نحتاج الى فرضيات الاختبار والى القيمة النظرية التي نستخرجها من جدول فيشر وقيمة دالة الاختبار أو القيمة العملية وتدعى القيمة المحسوبة أيضا كما هو مبين فيما يلي:

فرضيات الاختبار تعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{cases} H_0: \beta_j = 0 \quad \dots\dots \quad (no\ significance) \\ H_1: \beta_j \neq 0 \quad \dots\dots \quad (significante\ ) \end{cases}$$

أو باللغة العربية

$$\begin{cases} H1 : \beta j=0 \quad \text{(النموذج غير ملائم)} \\ H_0 : \beta_j \neq 0 \quad \text{(النموذج ملائم)} \end{cases}$$

دالة الاختبار تعطى بالعلاقة التالية:

دالةالاختبار F_c
$$f_c = \frac{\left(\hat{\beta}_j \acute{x} y - n\,\bar{y}^2\right)/k}{\left(\sum y_i^2 - \hat{\beta}_j \acute{x} y\right)/(n-k-1)} \quad or \quad f_c = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)}$$

أما القيمة النظرية F_t فتعطى بالمتغير العشوائي فيشرالذي يأخذ من جداول فيشر كما $f_t = f_{1-\alpha}^{(k\,;\,n-k-1)}$

إذا كانت القيمة المطلقة لقيمة دالة الاختبار أو لقيمة فيشر المحسوبة F_C أكبر من القيمة الجدولية (النظرية) F_t فنقول معامل التحديد دال أي معامل التحديد معنوي أو نقول معامل التحديد مقبول عند مستوى معنوية معطى وعليه فالنموذج المقادر صالح للتعبير عن العلاقة ، أما إذا حدث العكس فالعكس صحيح عند نفس مستوى الدلالة(أو المعنوية) المعطى.

مثال:

اختبر صلاحية النموذج في المثال السابق عند درجة معنوية 5 %

$$f_t = f_{1-\alpha}^{(k\,;\,n-k-1)}$$

$$F_t = F_{(1-0,05)}^{(3,3)} \quad = \boldsymbol{F_{(0,95)}^{(3,3)}} \quad = \boxed{\mathbf{9{,}28}}$$

$$\boldsymbol{f_c} = \frac{\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_j \acute{x}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{n}\,\overline{\boldsymbol{y}}^2\right)/\boldsymbol{k}}{\left(\sum \boldsymbol{y}_i^2 - \hat{\boldsymbol{\beta}}_j \acute{x}\boldsymbol{y}\right)/(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}$$

$$F_c = \frac{(21799{,}35 - 21175)/3}{(21875 - 21799{,}35)/(7-3-1)}$$

$$\boxed{F_c = 8{,}2531}$$

- نلاحظ $|Fc|$ أكبر من F_t إذن نقبل H_1 ونرفض H_0 عند مستوى معنوية 5% وعليه النموذج ملائم للدراسة عند مستوى معنوية 5%

5.3. استقلالية المتغيرات:

يستخدم اختبار t لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة X_1, X_2, X_3,.........X_n في المتغير التابع y_i .

لعمل هذا الاختبار في نموذج الانحدار الخطي المتعدد نعتمد على نوعين من الفروض.

$$\begin{cases} \mathbf{H_0} : \boldsymbol{\beta_j} = \mathbf{0} \ (\text{ليس هناك تأثير معنوي لـ } \mathbf{x_i} \text{ على } \mathbf{y_i}) \\ \mathbf{H_1} : \boldsymbol{\beta_j} \neq \mathbf{0} \ (\text{هناك تأثير معنوي لـ } \mathbf{x_i} \text{ على } \mathbf{y_i}) \end{cases}$$

- دالة الاختبار T_c

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\beta_j}}\right|$$

$$\hat{\sigma}^2_{\beta_j} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} * (x'x)^{-1}$$ **حيث**

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} = \frac{\sum e_i^2}{(n-k-1)}$$

– دالة القيمة الجدولية T_t

$$\mathbf{t_t} = \quad t^{(n-k-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

إذا كانت $|t_c|$ أكبر من t_t نرفض H_0 لصالح H_1 أي هناك تأثير معنوي x_i على y والعكس صحيح عند مستوى معنوية α.

مثــال

باستخدام المثال السابق أدرس معنوية معاملات النموذج "استقلالية المتغيرات" عند مستوى معنوية 5%.

الحــل: (ليس هناك تأثير لـ x على y) $\mathbf{H_0 : \beta_j = 0}$

(هنـاك تـأثير لـ x على y) $\mathbf{H_1 : \beta_j \neq 0}$

$$\mathbf{t_t} = \quad t^{(n-k-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$= t^3_{0,975}$$

$$= \boxed{3,18}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\beta_j} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} * (x'x)^{-1}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} = \frac{\sum e_i^2}{(n-k-1)}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} = \frac{\text{SSE}}{(\text{n-k-1})} \rightarrow \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} = \frac{\Sigma y_i^2 - \hat{\beta}_j \acute{x} y}{(n-k-1)}$$

$$= \frac{21875 - 21799{,}35}{3}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} \quad \boxed{= 25{,}21}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\beta_j} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} * (\acute{x}x)^{-1}$$

$$= 25{,}21 \text{ x} \begin{bmatrix} \\ (\acute{x}x)^{-1} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \hat{\sigma}^2_{\beta_j} = \begin{vmatrix} 4989{,}19 & -262{,}64 & -4{,}347 & -77{,}7 \\ 262{,}64 & 14{,}83 & 0{,}123 & 4{,}075 \\ -4{,}35 & 0{,}11 & 0{,}005 & 0{,}039 \\ -37{,}69 & 4{,}35 & 0{,}039 & 2{,}228 \end{vmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\beta_j} = 4989.19 \rightarrow \hat{\sigma}_{\beta_j} = 70.63$$

$$\hat{\sigma}^2_{\beta 1} = 14{,}83 \Rightarrow \hat{\sigma}_{\beta 1} = \sqrt{14{,}83} = 3{,}85$$

$$\hat{\sigma}^2_{\beta 2} = 0{,}005 \Rightarrow \hat{\sigma}_{\beta 2} = \sqrt{0{,}005} = 0{,}070$$

$$\hat{\sigma}^2_{\beta 3} = 2{,}228 \Rightarrow \hat{\sigma}_{\beta 3} = \sqrt{2{,}228} = 1{,}49$$

أولا: دراسة أثر سعر السلعة على المبيعات (y) $\left\{ \mathbf{H_0 : \beta_1 = 0} \right.$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

$$Tc = \frac{\hat{\beta}j}{\hat{\sigma}_{\beta j}} \Rightarrow Tc = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\beta_1}} = \frac{-3,43}{3,85} = \boxed{-0,89}$$

ولدينا: $\boxed{t_t = 3,18}$

- نلاحظ أن $|t_c|$ أقل من t_t نقبل H_0 ونرفض H_1 أي ليس هناك أثر معنوي لسعر السلعة على الكمية المباعة، عند مستوى معنوية 5%.

ثانيا: دراسة أثر الدخل على المبيعات (y) :

$$Tc = \frac{\hat{\beta}_2}{\sigma\beta_2} = \frac{0,09}{0,07} = \mathbf{1.285}$$

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 0 & \text{(ليس هناك أثر للدخل على المبيعات)} \\ H_1 : \beta_2 \neq 0 & \text{(هناك أثر للدخل على المبيعات)} \end{cases}$$

التفسير: [نفس التفسير السابق]

ثالثا: دراسة أثر سعر السلعة البديلة x_3 على y:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_3 = 0 & \text{[ليس هناك أثر لسعر السلعة البديلة على y]} \\ H_1 : \beta_3 \neq 0 & \text{[هناك أثر لسعر السلعة البديلة على y]} \end{cases}$$

$$Tc = \frac{\hat{\beta}_3}{\sigma\beta_3} = \frac{0,93}{1,49} = 0,62$$

– **نلاحظ أن** $|t_c|$ أقل من t_t وعليه نرفض الفرض البديل ونقبل العدمي أي ليس هناك أثر لسعر السلعة البديلة على المبيعات عند مستوى دلالة 5%