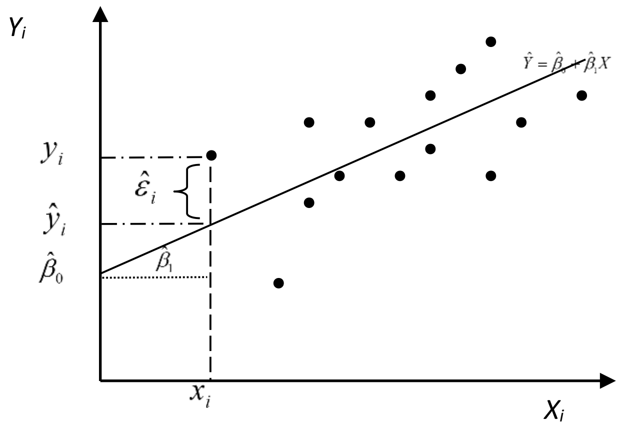
- **. تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط (طريقة المربعات الصغرى)**

لتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط (β_0,β_1) تعتبر طريقة المربعات الصغرى أفضل الطرق لحد الآن وهي تعطي قيما تقديرية للمعلمات المذكورة بنقطة ، أي طريقة المربعات الصغرى هي طريقة جبرية للتقدير بنقطة (أي بقيمة واحدة)حيث تعتمد على تعيين القيمة الحدية للدالة (نموذج خط الانحدار) المراد تقديرها بالاعتماد على المشتق الأول للدالة بالنسبة للمعالم β_0 و β_1 المراد تقديرها ثم مساواة هذه المشتقات بالصفر.وبهدف التثبت بأن القيم المتحصل عليها هي قيم دنيا (أصغر ما يمكن Min) يجب كذلك التأكد من شرط آخر وهو أن المشتقة الثانية (شرط ثاني) تكون سالبة.لاعتبارات رياضية معقدة سنتجنب إثبات الشرط الثاني ونقبله بدون برهان ونكتفي بإثبات الشرط الأول. الشكل (1)



الشكل رقم (1)

<u>**تذكير ببعض قوانين الاشتقاق**</u>

$x' = 1 \quad , \quad \lambda x' = \lambda \quad , \quad \lambda'=0$

$$(f(x)^n)' = n f(x)^{n-1} \cdot f(x)'$$

نقوم بالاشتقاق بالنسبة لـ β_0 و β_1 ونعتبرهما المتغيرات وغيرهما ثوابت

من الشكل يمكن أن نستنتج المعادلة التالية:

$$e_i^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma(y - \hat{y}_i)^2$$

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma(y_i - \beta_0 - \hat{\beta}_i x_i)^2$$

الاشتقاق بالنسبة لـ $\hat{\beta}_0$: $\dfrac{\partial \Sigma \ell_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 0$

$$\frac{\partial \Sigma e_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 2\Sigma(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^{2-1}(-1) = 0$$

ومنه ① $\Rightarrow \boxed{\Sigma(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 xi) = 0}$

الاشتقاق بالنسبة $\hat{\beta}1$

$$\frac{\partial \Sigma e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 0$$

$$= 2\Sigma(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^1(-x_i) = 0$$

$$= \Sigma(x_i y_i - \hat{\beta}_0 x_i - \hat{\beta}_1 x_i^2) = 0$$

$$\boxed{\Sigma(x_i y_i - \hat{\beta}_0 x_i - \hat{\beta}_1 x_i^2) = 0} \quad ②$$

نتحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} \Sigma y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \Sigma x_i = 0 \text{ — ③} \\ \Sigma x_i y_i - \hat{\beta}_0 \Sigma x_i - \hat{\beta}_1 \Sigma x_i^2 = 0 \text{ — ④} \end{cases}$$

من ③ نجد:

$$\Sigma y_i - \hat{\beta}_1 \Sigma x_i = n\hat{\beta}_0$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \frac{\Sigma y_i - \hat{\beta}_1 \Sigma x_i}{n}} \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \boxed{\begin{array}{c} \frac{\Sigma y_i}{n} = \bar{y} \\ \hline \frac{\Sigma x_i}{n} = \bar{x} \end{array}}$$

نعوض في ④:

$$= \Sigma x_i y_i - \underbrace{\left(\frac{\Sigma y_i - \hat{\beta}_1 \Sigma x_i}{n}\right)}_{\hat{\beta}_0} \Sigma x_i - \hat{\beta}_1 \Sigma x_i^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{④}$$

$$\frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma y_i \Sigma x_{i1} + \hat{\beta}_1 (\Sigma x_i)^2 - n\hat{\beta}_1 \Sigma x_i^2}{n} = 0$$

ومنه البسط =0 أي:

$$n\Sigma x_i y_i - \Sigma y_i \Sigma x_i + \hat{\beta}_1 (\Sigma x_i)^2 - n\hat{\beta}_1 \Sigma x_i^2 = 0$$

$$n\Sigma x_i y_i - \Sigma y_i \Sigma x_i = -\hat{\beta}_1 (\Sigma x_1)^2 + n\hat{\beta}_1 \Sigma x_i^2$$

$$= \hat{\beta}_1 (n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2)$$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma y_i \Sigma x_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}}$$

4.2. خصائص مقدرات المربعات الصغرى

خاصية عدم التحيز

التحيز هو ذلك الانحراف بين مقدرة ما ووسط توزيعها، فإذا كان هذا الفرق يختلف عن الصفر نقول عن ذلك المقدر بأنه متحيز. وإذا عدنا إلى مقدرتي المربعات الصغرى فإننا نجد الفرق معدوما ومنه نقول أنهما مقدرتين غير متحيزتين ولاعتبارت رياضية نقبل بدون برهان أنهما غير متحيزين (لمن أراد الاطلاع على البرهان يمكنالرجوع لكتاب الأستاذ شيخي محمد)

خاصية الاتساق

تنطلق هذه الفكرة من نظرية Gauss-Markov والتي تقول" من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، تكون مقدرتا المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ أفضل مقدرتين خطيتين اذا كان لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية غير المتحيزة الأخرى.

5.2.معامل التحديد $\mathbf{R}^2$ أو القوة التفسيرية للنموذج(تحليل التباين أنوفا **Anova**):

تساعد البواقي e_i على قياس قدرة تمثيل المعادلة في النموذج لمشاهدات العينة، حيث أن كلما كبرت قيمة البواقي كلما دل ذلك على ضعف التمثيل والعكس صحيح، إن المشكلة في استعمال البواقي كمقياس لجودة التوفيق هو أن قيمة البواقي تعتمد على المتغير التابع Y_i، الذي نعرفه حول وسطه انطلاقا من الشكل رقم (1) كما يلي :

$$Y_i = \hat{Y}_i + ei$$
$$Y_i - \overline{Y} = \hat{Y}_i - \overline{Y} + ei$$

وبتربيع طرفي المعادلة السابقة وإدخال المجموع عليها نتحصل على ما يلي:

$$\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_i e_i^2$$

كيفية الحصول على المعادلة الأخير مبين في البرهان الموالي

$$y_i - \overline{y} = \hat{y} - \overline{y} + e_i$$

$$\Sigma(y_i - \overline{y})^2 = \Sigma(\hat{y} - \overline{y} + e_i)^2$$

$$\Sigma(y_i - \overline{y})^2 = \Sigma\left[(\hat{y} - \overline{y})^2 + e_i^2 + 2(\hat{y} - \overline{y})(e_i)\right]$$

$$\Sigma(y_i - \overline{y})^2 = \Sigma\left[\hat{y} - \overline{y})^2 + e_i^2 + 2(\hat{y} - \overline{y})(e_i)\right]$$

$$= \Sigma(\hat{y} - \overline{y})^2 + \Sigma e_i^2 + 2\Sigma(\hat{y} - \overline{y})(e_i)$$

$$= \Sigma(\hat{y} - \overline{y})^2 + \Sigma e_i^2 + 2\Sigma e_i(\hat{y} - \overline{y})$$

$$\boxed{\underbrace{\Sigma(y_i - \overline{y})^2}_{SCT} = \underbrace{\Sigma(\hat{y} - \overline{y})^2}_{SCE} + \underbrace{\Sigma e_i^2}_{SCR}}$$

$$\boxed{SCT = SCE + SCR}$$

بقسمة طرفي المعادلة الأخيرةعلى SCT:

نجد:

$$\boxed{\begin{gathered} 1 = \frac{SCE}{SCT} + \frac{SCR}{SCT} \\ 1 = \frac{\Sigma(\hat{y} - \overline{y})^2}{\Sigma(y_i - \overline{y})^2} + \frac{\Sigma \ell i^2}{\Sigma(y_i - \overline{y})^2} \end{gathered}}$$

—(✯)

المقدار $\frac{SCE}{SCT}$ أو $\frac{\Sigma(\hat{y}-\bar{y})^2}{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}$ يعرف "بمعامل التحديد" R^2 ومنه (✯) تصبح كمايلي:

$$\boxed{1 = R^2 + \frac{\Sigma e_i^2}{SCT}} \Rightarrow \boxed{R^2 = 1 - \frac{\Sigma e_i^2}{SCT}} \quad \text{—}(✯_1)$$

ملاحظات:

من العلاقة ($✯_1$) يمكن أن نسجل جملة الملاحظات التالية:

- R^2 هو نسبة موجبة (وبالتالي هو رقم موجب) محصور بين 0 و 1 ($1 > R^2 > 0$).

كلما كان معامل التحديد (R^2) قريبا من (1) كلما كان النموذج قويا والعكس صحيح.

من العلاقة السابقة نستنتج أيضا أنه كلما كانت النسبة $\frac{SCR}{SCT}$ [تساوي $= \frac{\Sigma ei^2}{\Sigma(y_1-\bar{y})^2}$] صغيرة كلما كان R^2 قويا لأنه في هذه الحالة سيقترب من (1) الصحيح والعكس صحيح.