4. L'intégration numérique

4.1 Introduction

L'intégration numérique est basée principalement sur la relation

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx + \int_{x_0}^{x_n} E_n(x)dx$$

- $P_n(x)$ est un polynôme d'interpolation
- $E_n(x)$ est l'erreur qui y associée
- Plus « n » est élevé et plus grande est la précision liée à la valeur de l'intégrale recherché.

4.2 Méthode des trapèzes

La méthode du trapèze est la méthode la plus simple on souhaite évaluer :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

Ou $f(x)$ est une fonction connue seulement en deux point. La solution la plus simple consiste à remplacer $f(x)$ par le polynôme de degré « 1 » passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ comme le montre la figure 4.1

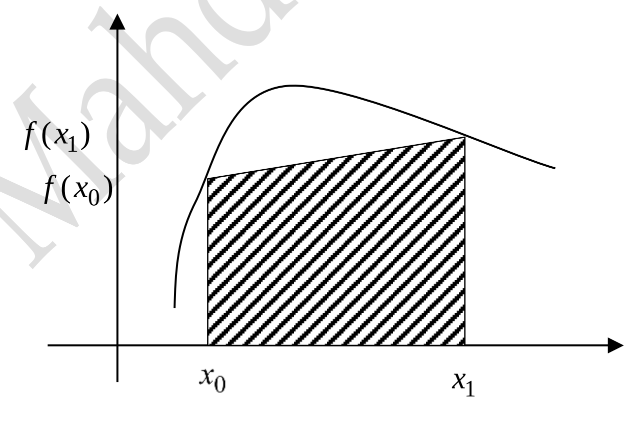

Figure 4.1

La valeur approximative de l'intégrale correspond a l'aire sous la courbe du polynôme, cette aire forme un trapèze.

Attention : l'approximation est grossière et le résultat sera peut précis.

❖ Aire du trapèze

$$Aire = \frac{(a+c)}{2}.h$$

- a est la première base
- b est la deuxième base
- h est la hauteur

Attention il est important de prendre en considération l'erreur résiduelle dans cette méthode.

Exemple :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}.(f(x_0)+f(x_1)) - \boxed{\frac{f''(\eta)}{12}h^3}$$

L'erreur est encadrée en rouge ou $\eta \in [x_0, x_1]$

Exemple :

Il s'agit d'évaluer numériquement

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$$

Dont la valeur exacte est « 1 ». La méthode du trapèze simple donne :

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx \approx \frac{\pi/2}{2}.(\sin(0)+\sin(\pi/2) = \pi/4 = 0.785398164$$

Qui est une approximation imprécise de 1.

- L'imprécision vient du fait qu'on approche $f(x) = \sin(x)$ avec un polynôme de degré « 1 ».