3. L'interpolation

3.1 Introduction

On a le problème suivant : à partir d'une fonction f(x) définie seulement en (n+1) point de la forme $(x_i, f(x_i))$ pour i variant de 0 à n. Peut on construire une approximation de $f(x)$ et ce pour tout x

L'idée de la solution est relativement simple, il suffit de construire un polynôme de degré suffisamment élevé dont la courbe passe par les points de collocation $(x_i, f(x_i))$

- Le polynôme : Un polynôme de degré « n » dont la forme générale est :

$$P_n(x) = a_0.x^0 + a_1.x^1 + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \cdots + a_n.x^n \ (a_n \neq 0)$$

Possède exactement « n » racines (réelles ou complexes), « r » est une racine si $P_n(r) = 0$

- Théorème : par (n+1) points de collocations $(x_i, f(x_i))$ pour i variant de 0 à n on ne peut faire correspondre qu'un et un seul polynôme de degré « n ».
- Démonstration :

On suppose l'existence de deux polynômes de degrés « n », notés p(x) et q(x) et qui passe tous les deux par (n+1) points de collocation. On considère la différence suivante :

P(x) = p(x) – q(x)

Ainsi, P(x) est un polynôme de degré « n ». Ce polynôme vérifie

$P(x_i)=p(x_i)- q(x_i)=f(x_i)- f(x_i)=0$

Et ce pour i allant de « 0 » à « n ». Le polynôme P(x) posséderait donc (n+1) racines ce qui est impossible.

Une fois l'unicité du polynôme d'interpolation établit. Il reste à en assurer l'existence, ce que nous feront tous simplement en le construisant au moyen de méthode numériques divers.

3.2 Matrice de Vendermonde

Pour (n+1) points de collocation $(x_i, f(x_i))$ pour i allant de 0 à n. On a :

$$a_0.x_i^0 + a_1.x_i^1 + a_2.x_i^2 + a_3.x_i^3 + \cdots + a_n.x_i^n = f(x_i)$$

Ou : $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0,1,2,3 \cdots n$

Pour toutes les valeurs (x_i) on obtient un système linéaire de (n+1) équations en (n+1) inconnus.

Ce système s’écrit sous forme matricielles comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{Bmatrix}$$

Il suffit alors de résoudre le système par l’une des méthodes numériques explorés dans le chapitre précédent.

Exemple :

On veut calculer le polynôme passant par les points de collocations suivants (0,1),(1,2),(2,9). Etant donné ces 3 points, le polynôme recherché est de tous au plus de degré 3.

Ses coefficients (a_i) sont solution de :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Le polynôme est donc : $P_2(x) = 1 - 2x + 3x^2$