السلسلة الرابعة

الاهتزازات القسرية ذات درجة حرية واحدة

Forced vibration of a single degree of freedom system

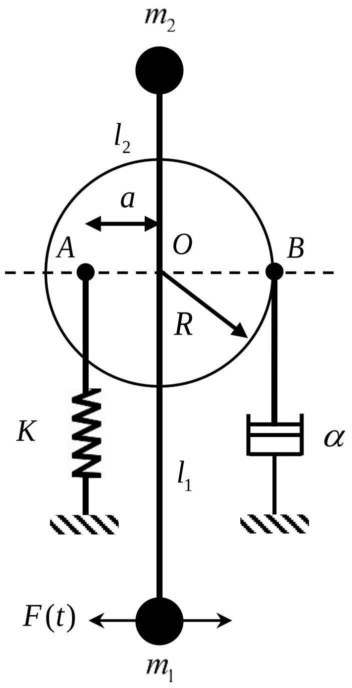
التمرين الأول:

يمكن لقرص دائري متجانس كتلته (M) أن يهتز حول محوره الافقي (O) كما في الشكل 1 – ثبتت الكتلتين (m_1 , m_2) على طرفي الساق المهملة الكتلة، هذه الأخيرة مثبتة على الأسطوانة (تدور الساق والأسطوانة معا)، عند التوازن تكون الساق شاقوليه.

عبارة القوة الخارجية $(F(t))$ تعطى كما يلي:

$$F(t) = F_0.\cos(\omega_f.t)$$

1- اكتب المعادلة التفاضلية للحركة
2- اكتب معادلة الحركة في النظام الدائم
3- اكتب عبارة الممانعة للجملة
4- اكتب عبارة معامل الجودة

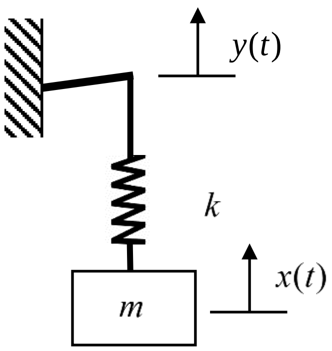


الشكل 1

التمرين الثاني:

علقت كتلة (m) بواسطة نابض (K) حيث الطرف الثاني للنابض مرتبط بشفرة مرنة $(Lame)$ مرنة تهتز وفق المعادلة التالية: $(y) = A\sin(\omega_f.t)$

1- أكتب المعادلة التفاضلية للحركة، ثم معادلة الحركة، حيث:
$x(0) = 0 \ , \ \dot{x}(0) = 0$
2- أكتب معادلة الحركة في حالة الرنين $(\omega_f = \omega_0)$



الشكل 2

"Successful and unsuccessful people do not vary greatly in their abilities. They vary in their desires to reach their potential." – John Maxwell

حل الجزء الثاني من التمرين 2 – السلسلة 3

II- 1. حساب معامل اللزوجة α_c

نعلم انه في التخامد الحرج يتساوى النبض الذاتي ومعامل التخامد $(\omega_0 = \lambda)$

$$\alpha_c = 2.\lambda_c.m$$
$$\alpha_c = 2.\omega_0.m = 2.\sqrt{\frac{k}{m}}.m$$
$$\alpha_c = 2.\sqrt{\frac{200}{1,2}}.1,2$$
$$\alpha_c = 30.98\left[kg/s\right]$$

2. إيجاد موضع الكتلة (m)

في النظام الحرج: $(\Delta = 0)$

ومنه شكل الحل $x(t) = (A.t + B).e^{-\lambda.t}$

إيجاد للثوابت (A, B) من الشروط الابتدائية

$$x(0) = x_{ini} \;,\; \dot{x}(0) = 0$$
$$\dot{x}(t) = -\lambda.e^{-\lambda.t}.(A.t + B) + A.e^{-\lambda.t}$$
$$x(0) = B = 5$$
$$\dot{x}(0) = -\lambda.B + A = 0 \Rightarrow A = \lambda.B = 5\lambda$$
$$x(t) = e^{-\lambda.t}(5\lambda.t + 5)$$

النظام الحرج $(\omega_0 = \lambda)$

$$x(t) = e^{-\omega_0.t}(5\omega_0.t + 5) = 5.e^{-\omega_0.t}(\omega_0.t + 1)$$

عند $(t = T_0)$ لاحظ $(\omega_0 = 2\pi/T_0)$

$$x(T_0) = 5.e^{-\frac{2\pi}{T_0}.T_0}.(\frac{2\pi}{T_0}.T_0 + 1)$$
$$x(T_0) = 5.e^{-10.\pi}.(2\pi + 1) = 0,068 \text{ [cm]}$$

عند $(t = 5T_0)$

$$x(5T_0) = 5.e^{-\frac{2\pi}{T_0}.5T_0}.(\frac{2\pi}{T_0}.5T_0 + 1)$$
$$x(5T_0) = 5.e^{-10\pi}(10\pi + 1) = 3,68 \times 10^{-12}[cm] \approx 0[cm]$$

3. حساب الطاقة الضائعة:

عند الزمن $(t = 0)$

$$E_1 = E_{c1} + E_{p1}$$
$$E_1 = \frac{1}{2}.m.\cancel{\dot{x}_{ini}^2} + \frac{1}{2}.K.x_{ini}^2$$
$$E_1 = \frac{1}{2}.K.x_{ini}^2$$

عند الزمن $(t = T_0)$

$$E_2 = \frac{1}{2}.m.\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}.K.x_2^2$$
$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}.K.(x_2^2 - x_{ini}^2) + \frac{1}{2}.m.\dot{x}_2^2}{\frac{1}{2}.K.x_{ini}^2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_{ini} = 5 \\ x_2 = x(T_0) \approx 0 \\ \dot{x}_2 = \dot{x}(T_0) = ? \end{cases}$$

حساب السرعة عند $(t = T_0)$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0.5.e^{-\omega_0.t}(\omega_0.t + 1) + \omega_0.5.e^{-\omega_0.t}$$
$$\dot{x}(T_0) = -\omega_0.5.e^{-\frac{2\pi}{T_0}.T_0}.(\frac{2\pi}{T_0}.T_0 + 1) + \omega_0.5.e^{-\frac{2\pi}{T_0}.T_0}$$
$$\dot{x}(T_0) = -5.\omega_0.e^{-2\pi}.((2\pi + 1) - 1) = -10\pi\sqrt{\frac{200}{1,2}}.e^{2\pi}$$
$$\dot{x}(T_0) = 0,757 \text{ [cm/s]}$$

بالتعويض في علاقة الضياع النسبي في الطاقة

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2} \times 200 \times (0^2 - 5^2) + \frac{1}{2} \times 1,2 \times 0,757^2}{\frac{1}{2} \times 200 \times 5^2}$$
$$\frac{\Delta E}{E} = -0,999$$
$$\frac{\Delta E}{E} \approx 100\%$$

الاستنتاج: كلما زاد معامل اللزوجة كلما زاد الضياع في الطاقة ، من ما يزيد في سرعة تخامد الحركة.