Examen en Méthodes numériques
Durée (1h00)

Questions de cours [Chapitre 4 : L'intégration] (4 points)

- Représentez graphiquement l'intégration par les deux méthodes (i) du trapèze et (ii) des trapèzes composés pour l'intégral suivant : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ **(2 points)**
- Quelle est la différence entre ces deux méthodes (trapèze et trapèzes composés) ? **(2 points)**

Exercice 01 [Chapitre 1 : Méthode de newton] (5 points)

On considère l'équation suivante :

$$f(x) = 2.x.e^{x} - 1 = 0 \qquad (1)$$

- Calculez la première dérivée $f'(x)$ en détail **(1.5 point)**
- En utilisant **la méthode de Newton** calculez x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 en prenant **tous les chiffres après la virgule** on donne $f'(x) = (1+x)2e^{x}$ et $x_0 = 1$ **(2.5 points)**
- Calculez $f(x_5)$, que remarquez-vous ? **(1 point)**

Exercice 02 [Chapitre 2 : L'élimination de Gauss] (6 points)

- Résoudre le système linéaire suivant en utilisant **l'élimination de Gauss (3 points)**

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases} \qquad (2)$$

- Peut-on écrire le système linéaire représenté par l'équation (2) sous forme d'une décomposition LU ? justifiez **(1 point).**
- Ecrivez la décomposition LU du système linaire donné dans l'équation (2) en se basant sur la réponse de la première question **(2 points).**

Exercice 03 [Chapitre 3 : L'interpolation de Lagrange] (5 points)

On cherche à construire le polynôme qui passe par les deux points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ qui sont donnés comme suit : $(1,6)$ et $(3,14)$ par **la méthode de Lagrange**.

- Quel est l'ordre du polynôme rechercher, justifier ? **(1 point)**
- Construisez les deux polynômes $L_0(x)$ et $L_1(x)$. **(2 points)**
- Donnez le polynôme général $L(x)$ et vérifiez qu'il passe par les deux points donnés. **(2 points)**

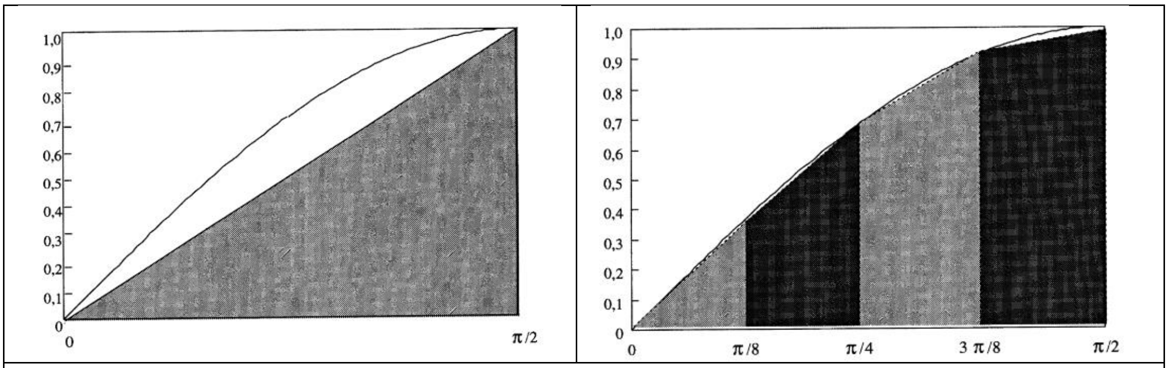
"You are so close to the victory, don't you dare give up now"

السنة الجامعية 2020-2021

Solution

Réponses aux questions de cours

- **Représentez graphiquement**



Il suffit de tracé deux ces courbes

- **La différence entre les deux méthodes, la méthode des trapèzes composés est plus exacte que la méthode du trapèze**

Exercice 1

La dérivée de $f'(x)$:

$$f'(x) = g'(x)\times h(x) + g(x)\times h'(x)$$
$$f'(x) = 2.e^x + 2.x.e^x$$
$$f'(x) = 2e^x(1+x)$$

Recherche du point fixe à partir du point de départ x_0

$$x_1 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 + \frac{f(1)}{f'(1)} = 0.591969860292861$$
$$x_2 = x_1 + \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.393880900161210$$
$$x_3 = x_2 + \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.353229140090994$$
$$x_4 = x_3 + \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.351735654308005$$
$$x_5 = x_4 + \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 0.351733711252480$$

Calcul de $f(x_5)$

$f(0.351733711252480) = 1.2622 \times 10^{-11} \approx 0$

- x_5 **est une approximation très proche de la racine de** $f(x)$

<u>Exercice 02</u>

- **Résolution par la méthode de Gauss**

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -5 \end{array}\right]$$

$[T_1] \Rightarrow l_2 \to l_2 + 1l_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -5 \end{array}\right]$$

$[T_2] \Rightarrow l_3 \to l_3 + \frac{1}{2} l_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right]$$

$[T_3] \Rightarrow l_3 \to l_3 - \frac{1}{5} l_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} & \frac{-18}{5} \end{array}\right]$$

On a donc une matrice triangulaire supérieure $[U]$ **on va faire une remontée triangulaire pour résoudre le système.**

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{-18}{5} \end{Bmatrix}$$

$$0 \times x_1 + 0 \times x_2 + {}^{18}\!/_{5} \times x_3 = -{}^{18}\!/_{5} \Rightarrow \boxed{x_3 = -1}$$

$$0 \times x_1 + 5 \times x_2 + (7) \times \underbrace{(-1)}_{x_3} = 3 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2}$$

$$2 \times x_1 + 4 \times \underbrace{(2)}_{x_2} + 6 \times \underbrace{(-1)}_{x_3} = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

On vérifie la solution en remplaçant dans le système donné

$$\begin{cases} 2 \times (1) + 4 \times (2) + 6 \times (-1) = 4 \\ -2 \times (1) + 1 \times (2) + 1 \times (-1) = -1 \\ -1 \times (1) + -1 \times (2) + 2 \times (-1) = -5 \end{cases}$$

La solution trouvée est exacte

- **Oui, on peut écrire le système donné sous forme d'un produit LU car on a utilisé uniquement des matrices T pour passer de A à U).**
- **Ecriture de A sous la forme d'un produit LU**

$$[U] = [T_3] \times [T_2] \times [T_1] \times [A]$$

$$[A] = [T_1]^{-1} \times [T_2]^{-1} \times [T_3]^{-1} \times [U]$$

$$[T_1]^{-1} \times [T_2]^{-1} \times [T_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

Par superposition

$$[T_1]^{-1} \times [T_2]^{-1} \times [T_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -{}^1\!/_2 & {}^1\!/_5 & 1 \end{bmatrix} = [L]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -{}^1\!/_2 & {}^1\!/_5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & {}^{18}\!/_5 \end{bmatrix}$$

Exercice 03

- ***Le Polynôme est d'ordre 1***
  Justification : le nombre de point égale $n = 2$
  L'ordre du polynôme égale $n - 1 = 2 - 1 = 1$
- **Construction de** L_0

$$L_0 = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

$$L_0 = \frac{(x - 3)}{(1 - 3)}$$

- **Construction de** L_1

$$L_1 = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$L_1 = \frac{(x - 1)}{(3 - 1)}$$

- **Construction de** $L(x)$

$$L(x) = f(x_0) \times \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1) \times L_1 = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$L(x) = 6 \times \frac{(x - 3)}{(1 - 3)} + 14 \times \frac{(x - 1)}{(3 - 1)}$$

$$L(x) = \frac{-6(x - 3) + 14(x - 1)}{2}$$

$$L(x) = \frac{-6x + 18 + 14x - 14}{2}$$

$$L(x) = \frac{8x + 4}{2} = 4x + 2$$

- **Vérification**

$L(1) = 4 \times (1) + 2 = 6$ OK

$L(3) = 4 \times (3) + 2$ =14 OK