الفصل الأول : الفضــاءات الشعاعيــة

من خلال عرض حال تمارين السلسلة 1 يصبح الطالب قادر على فهم:

- **تعريف الفضاء الشعاعي**
- **التركيبات الخطية للأشعة**
- **الاستقلال والارتباط الخطي**
- **الأساس والبعد**

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

رياضيات 2 — **السلسلة رقم 01**

التمرين 01: إلى أي فضاء شعاعي $\mathbb{R}^n$ تنتمي هذه العناصر :

أ) $(3,-2,8)$ ب) $(3,6+2i)$ ج) $(-2,0)$ د) $(-1,2,5,6)$.

التمرين 02: 1) أوجد x و y إذا: $(x,3)=(2,x+y)$ ، $(x+2,y-z,x+z)=(y,-x,y+1)$.

2) أوجد x و y إذا كان $v=(x+y,x-3)$ شعاع الصفري (المعدوم).

التمرين 03: أحسب ما يلي:

أ) $\begin{pmatrix} 7\\ -4\\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3\\ -1\\ 5 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} 1\\ 3\\ 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2\\ 4 \end{pmatrix}$ أ) $5\begin{pmatrix} -2\\ 3\\ 4 \end{pmatrix}$ ، ب) $-2\begin{pmatrix} 7\\ -5 \end{pmatrix}$

أ) $(3,-5,6,8)-(4,1,-7,9)$، ب) $\begin{pmatrix} 6\\ -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2\\ -5 \end{pmatrix}$

التمرين 04: لتكن $u=(2,-7,1)$, $v=(-3,0,4)$, $w=(0,5,-8)$ أوجد :

أ) $3u-4v$ ، ب) $2u+3v-5w$.

التمرين 05: 1) أكتب $w=(1,9)$ كمزج خطي من الشعاعين $u=(1,2)$ و $v=(3,-1)$.

2) أكتب $v=(2,-3,4)$ كمزج خطي من الأشعة $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,1,0)$, $u_3=(1,0,0)$.

التمرين 06: 1) برهن أن W فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^3$ حيث $W=\{(x,y,0);\ x,y\in \mathbb{R}\}$.

2) برهن أن W فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^3$ حيث $W=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3;\ x+y+z=0\}$.

3) بين أن W ليست فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^3$ حيث $W=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3;\ x\geq 0\}$.

4) برهن أن W فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^2$ حيث $W=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2;\ 2x=y\}$.

5) برهن أن W فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^4$ حيث $W=\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4;\ x+3t=0,\ y=z\}$.

التمرين 07: 1) حدد ما إذا كان الشعاعين u, v, w مستقلين خطيا أم لا حيث:

أ) $u=(3,4)$, $v=(1,-3)$ ، ب) $u=(2,-3)$, $v=(6,-9)$ ، ج) $u=(2,-1,1)$, $v=(1,2,3)$, $w=(1,1,1)$

التمرين 08: أي من المجموعات التالية تكون أساس إلى $\mathbb{R}^3$:

1) $E=\{(-1,2,0),(0,1,0),(1,2,2)\}$.

2) $F=\{(1,2,0),(0,5,7),(-1,1,3)\}$.

3) $G=\{(-1,1,4),(0,2,0),(1,1,1),(0,2,5)\}$.

4) $H=\{(0,5,7),(-1,2,-3),(-2,9,1)\}$.

التمرين 09: بين أن الأشعة الأربعة التالية تشكل أساس ل $\mathbb{R}^4$: $(0,0,0,1)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,1,1)$, $(1,1,1,1)$.

التمرين 10: جد أساس إلى كل من الفضاءات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^3$.

1) $M=\{(x,y,z) : x+y=0\}$.

2) $N=\{(x,y,z) : 2x+y-z=0\}$.

3) $V=\{(x,y,z) : x=0,\ y-2z=0\}$.

4) $w=\{(x,y,z) : x=y-3z\}$.

التمرين 11: جد احداثيات كل من الأشعة التالية في $\mathbb{R}^2$ و ذلك بالنسبة للأساس $B=\{e_1=(2,-1),\ e_2=(3,0)\}$.

$A=(2,-1)$, $B=(0,0)$, $C=(0,1)$, $D=(a,b)$.

التمرين 1:

تحديد العناصر لاي فضاء شعاعي تنتمي

- الشعاع $(3,-2,8)$ ينتمي الي الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$
- الشعاع $(3,6+2i)$ ينتمي الي الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}^2$
- الشعاع $(-2,0)$ ينتمي الي الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$
- الشعاع $(-1,2,5,6)$ ينتمي الي الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$

التمرين 2:

1- إيجاد x و y إذا كان $(x,3)=(2,\mathrm{x}+\mathrm{y})$

$$\begin{cases} x=2 \\ 3=x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

2- إيجاد x و y إذا كان $(x+2,y-z,x+z)=(\mathrm{y},-\mathrm{x},\mathrm{y}+1)$

$$\begin{cases} x+2=y \ldots\ldots..(1) \\ y-z=-x \ldots\ldots(2) \\ x+z=y+1 \ldots(3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=y-2 \\ z=2y-2 \end{cases}$$

نعوض كل من x و z في المعادلة (3) نجد: $y=5/2$ و منه تكون $x=1/2$ و $z=3$

3- إيجاد x و y إذا كان $\mathbf{v}=(\mathrm{x}+\mathrm{y},\mathrm{x}-3)$ شعاع الصفري

$$(0,0)=(\mathrm{x}+\mathrm{y},\mathrm{x}-3)$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=3 \end{cases}$$

التمرين 3:

حساب ما يلي:

-1 $$\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7+(-3) \\ -4+(-1) \\ 2+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ لا يمكن الجمع لأنهما ليس من نفس النوع.

-2 $5\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\times 5\\3\times 5\\4\times 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\15\\20\end{pmatrix}$ ، $-2\binom{7}{-5} = \binom{-2\times 7}{-2\times(-5)} = \binom{-14}{10}$

-3 $\binom{6}{-3} - \binom{2}{-5} = \binom{4}{2}$ ، $(3,-5,6,8)-(4,1,-7,9)=(-1,-6,13,-1)$

التمرين 4:

إيجاد كل من $3u-4v$ ، $2u+3v-5w$

$$\begin{aligned}3u-4v &= 3(2,-7,1)-4(-3,0,4)\\ &= (6,-21,3)-(-12,0,1)\\ &= (6+12,-21-0,3-16)\\ &= (18,-21,-13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2u+3v-5w &= 2(2,-7,1)+3(-3,0,4)-5(0,5,-8)\\ &= (4,-14,2)+(-9,0,12)-(0,25,-40)\\ &= (4-9+0,-14+0-25,2+12-40)\\ &= -5,-39,54\end{aligned}$$

التمرين 5:

1. كتابة $w=(1,9)$ كمج خطي من الشعاعين $u=(1,2)$ و $v=(3,-1)$

$$\begin{aligned}w=\alpha u+\beta v &\Longrightarrow (1,9)=\alpha(1,2)+\beta(3,-1)\\ &\Longrightarrow (1,9)=(\alpha,2\alpha)+(3\beta,-\beta)\\ &\Longrightarrow \begin{cases}\alpha+3\beta=1\\ 2\alpha-\beta=9\end{cases}\end{aligned}$$

بالجمع و التعويض نجد : $\alpha=4$ و $\beta=-1$

إذن : $w=4u-v$

2. كتابة $v=(2,-3,4)$ كمزج خطي من الأشعة $u_1=(1,1,1)$، $u_2=(1,1,0)$، $u_3=(1,0,0)$

$v=\alpha u_1+\beta u_2$

$(2,-3,4)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,10)+\gamma(1,0,0)$

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\\beta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2\ \dots(1)\\\alpha+\beta=-3\ \dots\dots(2)\\4=\alpha\ \dots\dots\dots\dots(3)\end{cases}$$

من االمعادلة رقم (3) نجد: $\alpha=4$. نعوض بقيمتها في المعادلة (2) نجد: $\beta=-7$

بتعويض قيمتي α,β في المعادلة (1) نجد: $\gamma=5$

إذن $v=4u_1-7u_.+5u_3$

التمرين 6:

تعريف: E : ف ش

نقول أن F ف ش ج من E إذا تحقق:

1. $\emptyset\neq F\subset E$ أي الشرطين $\left.\begin{matrix}F\subset E\\F\neq\emptyset\end{matrix}\right\}$
2. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall X,Y\in F:(\alpha X+\beta Y)\in F$

1. إثبات أن W فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^3$ حيث $W=\{(x,y,0);x,y\in\mathbb{R}\}$

1. من تعريف المجموعة W نلاحظ ان $W\subset\mathbb{R}^3$ و $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0),0\in\mathbb{R}$ (العنصر الحيادي لـ ف ش $\mathbb{R}^3$ يعني أن $0_{\mathbb{R}^3}\in W$ و منه $W\neq\emptyset$
2. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall X,Y\in W:(\alpha X+\beta Y)\in W\ ???$

لدينا $X\in W\Longrightarrow X=(x,y,0)\ ,x,y\in\mathbb{R}$

$Y\in W\Longrightarrow Y=(x',y',0)\ ,x',y'\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\alpha X+\beta Y)&=\alpha(x,y,0)+\beta(x',y',0)\\&=(\alpha x,\alpha y,0)+(\beta x',\beta y',0)\\&=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',0)\end{aligned}$$

إذن : $(\alpha X+\beta Y)\in W$

من 1 و 2 نستنتج أن W ف ش ج من $\mathbb{R}^3$

2. إثبات أن W ف ش ج من في $\mathbb{R}^3$ حيث $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+z=0\}$

1. من تعريف المجموعة W نلاحظ ان $W\subset\mathbb{R}^3$ و $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3;\ 0+0+0=0$ (العنصر الحيادي لـ ف ش $\mathbb{R}^3$ يعني أن $0_{\mathbb{R}^3}\in W$ و منه $W\neq\emptyset$
2. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall X,Y\in W:(\alpha X+\beta Y)\in W\ ???$

لدينا $X\in W\Longrightarrow X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x+y+z=0$

$$Y \in W \Longrightarrow Y = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 ;\; x' + y' + z' = 0$$

$$\begin{aligned}(\alpha X + \beta Y) &= \alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')\\ &= (\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (\beta x', \beta y', \beta z')\\ &= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')\end{aligned}$$

لكي يكون $(\alpha X + \beta Y) \in W$ يكفي أن يكون :

$$(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') = 0 \;\; ??$$

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') &= \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z'\\ &= \alpha x + \alpha y + \alpha z + \beta x' + + \beta y' + + \beta z'\\ &= \alpha(x + y + z) + \beta(x' + y' + z')\\ &= \alpha.0 + \beta.0\\ &= 0\end{aligned}$$

إذن : $(\alpha X + \beta Y) \in W$

من 1 و 2 نستنتج أن W ف ش ج من $\mathbb{R}^3$

التمرين 7:

تحديد إذ ما كانت الأشعة مستقلة خطيا أم لا

نقول ان شعاعان مستقلان خطيا إذاا:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha U_1 + \beta U_2 = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

.1 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, U, V \in \mathbb{R}^2: \alpha_1 U + \alpha_2 V = (0,0)$

$$\alpha_1 U + \alpha_2 V = (0,0) \Longrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}3\alpha_1\\4\alpha_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_2\\-3\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}3\alpha_1 + \alpha_2 = 0\\ 4\alpha_2 - 3\alpha_2 = 0\end{cases}$$

بحل جملة المعادلتين نجد: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ إذن الشعاعين U, V مستقلين خطيا

.2 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, U, V \in \mathbb{R}^2: \alpha_1 U + \alpha_2 V = (0,0)$

$$\alpha_1 U + \alpha_2 V = (0,0) \Longrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}2\alpha_1\\-3\alpha_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\alpha_2\\-9\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}2\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0\\ -3\alpha_2 - 9\alpha_2 = 0\end{cases}$$

بحل جملة المعادلتين نجد: $0 = 0$ إذن الشعاعين U, V مرتبطين خطيا لأحظ أن

$$\{\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\} = \{(\mathbf{2},-\mathbf{3}),(\mathbf{6},-\mathbf{9})\}$$
$$= \{(\mathbf{2},-\mathbf{3}),\mathbf{3}(\mathbf{2},-\mathbf{3})\}$$
$$= \{\boldsymbol{U},\mathbf{3}\boldsymbol{U}\}$$

$V = 3U$ أي أن الشعاع V كتب كمزج خطي من الشعاع U

التمرين9:

أثبات أن الأشعة تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^4$

لدينا $\boldsymbol{A} = \left\{\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\right\}$

ندرس الاستقلال الخطي لأشعة الثلاثة $\boldsymbol{U_1} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U_4} = \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$,

$$\forall\alpha,\beta,\gamma,\lambda \in \mathbb{R}: \alpha\boldsymbol{U_1} + \beta U_2 + \gamma U_3 + \lambda U_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \overset{???}{\Rightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha\boldsymbol{U_1} + \beta U_2 + \gamma U_3 + \lambda U_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \Longrightarrow \alpha\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1\\ \gamma + \lambda = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2\\ \beta + \gamma + \lambda = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 3\\ \alpha + \beta + \gamma + \lambda = 0 \ldots\ldots 4\end{cases}$$

بحل الجملة نجد: $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$ إذن الأشعة مستقلة خطيا

بالتالي نستنتج أن $\boldsymbol{dim}(\mathbb{R}^4) = \mathbf{4}$

من جهة أخرى لدينا $\boldsymbol{Card}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{4}$

إذن $\boldsymbol{Card}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{dim}(\mathbb{R}^4) = \mathbf{4}$

إذن الأشعة تشكل أساس لــــ $\mathbb{R}^4$.

التمرين 10:

إيجاد أساس إلي كل من الفضائين الجزئيين $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M}$ من $\mathbb{R}^3$

$$M=\{(x,y):x+y=0\}$$

$$=\left\{(x,y):x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\langle\{\binom{1}{0},\binom{0}{1}\}\rangle$ الشعاعين يولدان M

الشعاعان $(0,1)$ و$(1,0)$ مستقلان خطيا لان:

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\alpha\boldsymbol{U_1}+\beta U_2=0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\implies\alpha=\beta=0$$

التبرير:

$$\alpha(1,0)+\beta(0,1)=(0,0)$$

$$\implies\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\end{cases}\implies\alpha=\beta=0$$

إذن الشعاعان$(1,0),(0,1)$يشكلان أساس لــ $\mathbb{R}^3$

$$N=\{(x,y,z):2x+y-z=0\}$$

$$=\left\{(x,y,z):x\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\left\langle\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ الشعاعين يولدان N

الأشعة $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ مستقلة خطيا لان :

$$\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\alpha\boldsymbol{U_1}+\beta U_2+\gamma U_3=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\implies\alpha=\gamma=\beta=0$$

التبرير:

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\implies\begin{cases}2\alpha=0\\\beta=0\\-\gamma=0\end{cases}\implies\alpha=\beta=\gamma=0$$

إذن الأشعة $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ تشكل أساس لــ $\mathbb{R}^3$

التمرين 11:

إيجاد إحداثيات الاشعة في $\mathbb{R}^2$ بالنسة للأساس الجديد $B = \{e_1 = (2,-1), e_2 = (3,0)\}$

1. لدينا الشعاع A إحداثياته في $\mathbb{R}^2$ هي $(2,-1)$، و لتكن α_1, α_2 إحداثياته في الاساس B أي :

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (0,0)$$
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 = -1 \quad \Rightarrow \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

إذن إحداثيات الشعاع A بالنسة للأساس B هي $A = (1,0)$

2. لدينا الشعاع B إحداثياته في $\mathbb{R}^2$ هي $(0,0)$، و لتكن α_1, α_2 إحداثياته في الاساس B أي :

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = B = (0,0)$$
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

إذن إحداثيات الشعاع B بالنسة للأساس B هي $B = (0,0)$

3. لدينا الشعاع C إحداثياته في $\mathbb{R}^2$ هي $(0,1)$، و لتكن α_1, α_2 إحداثياته في الاساس B أي :

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = C = (0,1)$$
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 2/3 \\ -\alpha_1 = 1 \quad \Rightarrow \alpha_1 = -1 \end{cases}$$

إذن إحداثيات الشعاع C بالنسة للأساس B هي $C = (-1, 2/3)$