كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

الرياضيات -2- — السلسلة رقم-03-

# المصفوفات والمحددات

## التمرين1:

الشـــكل التـــالي يمثـل مصفـــوفة:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

عمــود

ســطر

- نقــول أن المصفـــوفة $A$ ذات $m$ سطر و $n$ عمود
- درجة المصـــفوفة هي $m\times n$

إيـــجاد نـــوع المصفوفات مع تحديد العناصر $a_{22}, a_{13} b_{12}, b_{22}, b_{31}, c_{12}, c_{22}, c_{32}$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

- إذن المصـــفوفة A من الدرجة $3\times 2$. $\quad a_{22}=5,\ \ a_{13}=1$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

- إذن المصـــفوفة B من الدرجة $3\times 3$. $\quad b_{12}=4\ ,\ b_{22}=5,\ \ b_{31}=2$

$$C=\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

- إذن المصـــفوفة C من الدرجة $2\times 3$. $\quad c_{12}=4\ ,\ c_{22}=1,\ \ c_{32}=1$

## التمرين 2:

A و B مصفوفتين حيث: $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$ .

- نقول ان المصفوفتين $A$ و $B$ متساويتين إذا كان $A$ و $B$ من نفس الدرجة أي (لهما نفس عدد الأسطر و نفس عدد الأعمدة):

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}\ \Leftrightarrow\ a_{ij}=b_{ij},\ \ i=1,\dots,m; j=1,\dots,n$$

- المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يكون عدد أسطرها مساوي لعدد أعمدتها أي $m=n$
- المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي جميع عناصرها أي $\forall i,j;\ a_{ij}=0$

1- ايـــجاد $x, y, z, w$

لدينا
$$\begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

إذن
$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 2z+w=5 \ldots\ldots\ldots 2 \\ x-y=1 \ldots\ldots\ldots.. 3 \\ z-w=4 \ldots\ldots\ldots.. 4 \end{cases}$$

بجمع المعادلة 1 مع 3 نجد : $x=2$ نعوض قيمة $x$ في المعادلة 1 نجد : $y=1$

بجمع المعادلة 2 مع 4 نجد : $z=3$ نعوض قيمة $z$ في المعادلة 4 نجد : $w=-1$

و منه $(x, y, z, w) = (2, 1, 3, -1)$.

2- إيـــجاد $x, y, z, w$

$$\begin{pmatrix} x+y & z+3 \\ y-4 & z+w \end{pmatrix} = 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ z+3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \\ y-4=0 \ldots\ldots\ldots.. 3 \\ z+w=0 \ldots\ldots\ldots.. 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=4 \\ z=-3 \\ w=3 \end{cases}$$

## التمرين 3:

1. حـــساب المجامـــيع:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$C+D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ لا يمكن الجمع:

لان C و D ليس من نفس الدرجة.

2. حســـاب ما يلي:

$$3D = 3\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 1 & 3\times 7 \\ 3\times 2 & 3\times(-3) \\ 3\times 0 & 3\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 6 & -9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-5A = -5\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 \\ -20 & -25 & 30 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -21 & 3 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-9 & -4-0 & 6-6 \\ 8-(-21) & 10-3 & -12-24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix}$$

.3 أيـــجاد $x, y, z, w$

لدينا:

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{pmatrix}$$

أذن:

$$\begin{cases} 3x = x+4 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 3y = x+y+6 \ldots\ldots 2 \\ 3z = z+w-1 \ldots\ldots 3 \\ 3w = 2w+3 \ldots\ldots\ldots 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ w = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

## التمرين4:

حســـاب الجـــــــداء في كل حالة

$$1.\ A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times2} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطر المصفوفة B

$$= \begin{pmatrix} 2\times1+(-1)\times3 & 2\times(-2)+(-1)\times4 & 2\times(-5)+(-1)\times0 \\ 1\times1+0\times3 & 1\times(-2)+0\times4 & 1\times(-5)+0\times0 \\ -3\times1+4\times3 & -3\times(-2)+4\times4 & -3\times(-5)+0\times4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

***لاحظ أن:* عناصر السطر تضرب في عناصر العمود**

2. $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

***التمرين 5:***

***إيـــجاد منقول المصفـــوفات التالية:***

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

***التمرين 6:*** *لدينا*

$$f : \quad \mathbb{R}^2 \quad \to \quad \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to f(x, y) = (2x - 5y, 3x + y)$$

و $B = \{u_1 = (2,\ 1),\ u_2 = (3,\ 2)\}$ أساس في $\mathbb{R}^2$

**-1 حســـاب $f(u_2), f(u_1)$**

$$f(u_1) = f(2,1) = (2 \times 2 - 5 \times 1, \quad 3 \times 2 + 1) = (-1, \quad 7)$$

$$f(u_2) = f(3,2) = (6 - 10, \quad 9 + 2) = (-4, \quad 11)$$

**-2 كتابة كل من $f(u_1)$ و $f(u_2)$ في الأساس $B$**

- لدينا

$$f(u_1) = (-1,\ 7)$$

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = (-1, \quad 7) \Rightarrow \alpha(2, \quad 1) + \beta(3, \quad 2) = (-1, \quad 7)$$

$$\Rightarrow (2\alpha + 3\beta, \quad \alpha + 2\beta) = (-1, \quad 7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -1 \dots\dots 1 \\ \alpha + 2\beta = 7 \dots\dots\dots 2 \end{cases}$$

بضرب المعادلة 2 في $(-2)$ ثم جمعها مع المعادلة 1 نجد: $\beta = 15$

بتعويض قيمة $\beta$ في المعادلة 2 نجد: $\alpha = -23$

و منه $f(u_1) = -23u_1 + 15u_2$

- لدينا

$$f(u_2) = (-4,\ \ 11) = \alpha u_1 + \beta u_2$$

$$\Rightarrow (-4, \quad 11) = \ \alpha(2, \quad 1) + \beta(3, \quad 2)$$

$$\Rightarrow (-4, \quad 11) = (2\alpha + 3\beta, \quad \alpha + 2\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -4 \dots \dots 1 \\ \alpha + 2\beta = 11 \dots \dots . . . 2 \end{cases}$$

بضرب المعادلة 2 في $(-2)$ ثم جمعها مع المعادلة 1 نجد: $\beta = 26$

بتعويض قيمة $\beta$ في المعادلة 2 نجد: $\alpha = -41$

و منه $f(u_2) = -41u_1 + 26u_2$

3- المصفــــوفة المرفقــــة لــ $f$ في الأســــاس $B$

- عدد الأعمدة = $dim(E)$ (بعد فضاء الانطلاق)
- عدد الأسطر= $dim(F)$ (بعد فضاء الوصول)

$$M_f(B) = \begin{array}{cc} f(u_1) & f(u_2) \end{array} \quad \begin{pmatrix} -23 & -41 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}$$

ملاحظة

إذا غيرنا الأساس فإن عناصر المصفوفة أٌيضا تتغير

4- حــــساب صورة الشعاع $v = (3,4)$ بواسطة $f$ في الأساس B و باستخدام المصفوفة المرفقة لـــ $f$

لدينا :

$$f(x,y) = M_f(B) \times (\mathrm{x},\mathrm{y})$$

$$\Rightarrow f(3,4) = \begin{pmatrix} -23 & -41 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(3,4) = \begin{pmatrix} -233 \\ 144 \end{pmatrix}$$

## التمرين 7:

لدينا: $f: \quad \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي معرف بالمصفوفة التالية :

$$\begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} \end{array}$$

من الواضح من خلال المصفوفة $A$ أن:

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \rightarrow f(x,y)$$

لان عدد أعمدة المصفوفة يساوي بعد فضاء البدء، عدد أسطر المصفوفة يساوي بعد فضاء الوصول.

1. حســـــاب صورة $v = (2,3,1)$ بواسطة $f$

بما الشعاع $v = (2,3,1) \notin \mathbb{R}^2$ إذن لا يمكن حساب صورته

2. ايـــــــجاد عبـــــارة $f(x,y)$

نلاحظ ان المصفوفة ذات عمودين و ثلاثة اسطر اذن التطبيق الخطي المرافق لها معرف من $R^2$ نحو $R^3$ .

اذن فالبحث عن $f(x,y) = (?\,,?\,,?\,)$

سوف نستخدم الأسس القانونية للفضائيين

- $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ أساس قانوني للفضاء $R^2$.
- $\{e'_1 = (1,0,0), e'_2 = (0,1,0), e'_3 = (0,0,1)\}$ أساس قانوني للفضاء $R^3$

و بالتالي

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + a_{31}e'_3 \\ f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + a_{32}e'_3 \end{cases}$$

اذن

$$\begin{cases} f(e_1) = 3e'_1 + 2e'_2 + 5e'_3 \\ f(e_2) = -e'_1 + 4e'_2 - 6e'_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (3,2,5) \\ f(e_2) = (-1,4,-6) \end{cases}$$

لدينا $(x,y)$ شعاع من $R^2$ فهو يكتب على الشكل

$$(x,y) = xe_1 + ye_2$$

اذن

$$f(x,y) = f(xe_1 + ye_2)$$

بما ان $f$ تطبيق خطي اذن:

$$f(x,y) = xf(e_1) + yf(e_2)$$
$$= x(3,2,5) + y(-1,4,-6)$$
$$= (3x,2x,5x) + (-y,4y,-6y)$$
$$= (3x-y,2x+4y,5x-6y)$$

اذن:

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \rightarrow f(x,y) = (3x-y,2x+4y,5x-6y)$$

---

بطريقة أبسط: لإيجاد عبارة $f$

$$f(x,y) = M_f \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3x-y \\ 2x+4y \\ 5x-6y \end{pmatrix}$$
$$= (3x-y,2x+4y,5x-6y)$$

اذن:

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \rightarrow f(x,y) = (3x-y,2x+4y,5x-6y)$$

---

3. حـــساب صـــورة الشعاع $V = (2,3)$

طريقة1 :

$$f(2,3) = (3\times 2 - 3, \quad 2\times 2 + 4\times 3, \quad 5\times 2 - 6\times 3)$$
$$f(x,y) = (3, \quad 16, \quad -8\ )$$

طريقة2

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$
$$f(x,y) = M_f \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$f(2,3) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

## التمرين 8:

- حســـــــاب المحددات

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times 0) = 6 - 0 = 6$$

**-1 طريقة النشر** $(La\ règle\ de\ développement)$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = +2 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (2 \times 0 - 1 \times 4) - 6(3 \times 0 - 4 \times 4) + 3(3 \times 1 - 4 \times 2)$$

$$= 83$$

**-2 او طريقة سايري** $(La\ règle\ de\ Saurrs)$

$$\begin{array}{ccccc} & & 8 & 8 & 0 \\ \left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}\right| & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \\ & & 0 & 96 & 3 \end{array} = (0 + 96 + 3) - (8 + 8 + 0) = 83$$

## التمرين 9:

**مقلـــوب مصفـــوفة:**

لتكن المصفــــوفة $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

- $A$ قـــابلة للقلـــب ⇔ التطبيـــق الخطـــي المـــرافق لهـــا تقـــابلي.
- A قـــابلة للقلـــب ⇔ أشـــعة أعمـدة المصفـــوفة A مستقـــلة خطيـــا.
- A قـــابلة للقلـــب ⇔ $\det(A) = |A| \neq 0$

نرمـــز لمقـــلوب A بـــ $A^{-1}$ و يحســـب بالعلاقـــة التـــالية:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times (adj(A))^t, \qquad |A| \neq 0$$

حيث $adj(A) = (a'_{ij})$ هي مصفـــوفة ناتجـــة من المصفـوفة $A$ بالعلاقـــة التالية:

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

أي

$$adj(A) = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

تسمى $(adj(A))^t$ بالمصفــوفة المرافقـــة لـــ $A$

- حســــــــــاب مقلـــــوب (او معكوس) مصفوفة

*1.* $$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times (adj(A))^t, \qquad |A| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 83 \neq 0$$

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \quad \text{و} \quad adj(A) = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 16 & -5 \\ 1 & -4 & 22 \\ 22 & -5 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\left(adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}$$

و منه

$$A^{-1} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}$$

*2.*

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A))^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$