جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييـــر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية LMD-SEGC
السنـــة الأولـــى

حلول سلسلة التمـــارين رقم 03 في الإحصـــاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية.

التمرين الأول:

يتكون فوج سياحي من ثمانية أشخاص: خمسة رجال وثلاث نساء. سحبنا عشوائيا خمسة أشخاص.

ليكن X متحولا عشوائيا يمثل عدد الرجال ضمن العينة المسحوبة.

المطلوب:

1. حدد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X.
2. أحسب التوقع الرياضي والتباين لهذا التوزيع.
3. أحسب دالة التوزيع (تابع التوزيع) ومثلها بيانيا.

حل التمرين الأول:

1. تحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X:

نلاحظ أن:

- ✓ النتائج المنتظرة ثنائية الإمكانية (كل شخص مسحوب إما رجل وإما امرأة).
- ✓ السحب دون إرجاع (أي السحبات غير مستقلة واحتمال النجاح P غير ثابت).
- ✓ لا أهمية للترتيب.

ومنه: X متغير عشوائي خاضع للتوزيع فوق الهندسي، أي: $X \sim H(n,M,N) \Leftrightarrow X \sim H(5,5,8)$

حيث: $\boldsymbol{P(X=k)=\frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}}$

لتحديد جدول التوزيع الاحتمالي لابد من ايجاد مجموعة الامكانيات ... واحتمال كل واحدة من هذه الامكانيات:

$$\Omega=\{2,3,4,5\}$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2 \times C_3^3}{C_8^5}=\frac{10}{56}=\mathbf{0.187}$$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3 \times C_3^2}{C_8^5}=\frac{30}{56}=\mathbf{0.535}$$

$$P(X=4)=\frac{C_5^5 \times C_3^1}{C_8^5}=\frac{15}{56}=\mathbf{0.267}$$

$$P(X=5)=\frac{C_5^5\times C_3^0}{C_8^5}=\frac{1}{56}=\mathbf{0.018}$$

الجدول رقم **01**: التوزيع الاحتمالي للمتغير **X.**

x_i	2	3	4	5	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	$\mathbf{\frac{56}{56}}$

المصدر: التمرين الأول من السلسلة 03.

2. حساب التوقع الرياضي والتباين لهذا التوزيع:

✓ حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum x_ip_i=\left(2\times\frac{10}{56}\right)+\left(3\times\frac{30}{56}\right)+\left(4\times\frac{15}{56}\right)+\left(5\times\frac{1}{56}\right)=\frac{175}{56}=\mathbf{3.125}$$

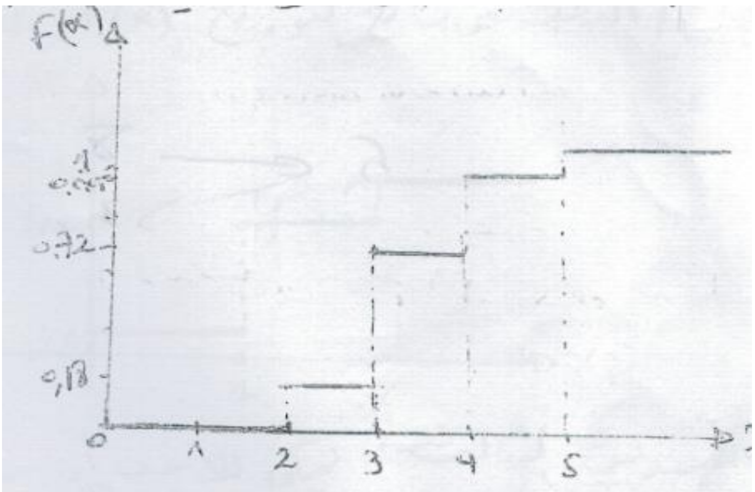
✓ حساب التباين:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum {x_i}^2p_i-[E(X)]^2$$
$$=\left[\left(2^2\times\frac{10}{56}\right)+\left(3^2\times\frac{30}{56}\right)+\left(4^2\times\frac{15}{56}\right)+\left(5^2\times\frac{1}{56}\right)\right]-\left(\frac{175}{56}\right)^2$$
$$=10.35-9.92=\mathbf{0.43}$$

3. حساب دالة التوزيع (تابع التوزيع) وتمثيلها بيانيا:

$$F(x_k)=\begin{cases}0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -\infty<x_k<2\\ {}^{10}/_{56}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2\le x_k<3\\ {}^{40}/_{56}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3\le x_k<4\\ {}^{55}/_{56}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4\le x_k<5\\ {}^{56}/_{56}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 5\le x_k<+\infty\end{cases}$$

تمثيلها البياني:



التمرين الثاني:

توجد في صندوق سبع زجاجات ماء معدني، أربع منها من نوع "بن هارون" B والباقي من نوع "سْعَيدة" S. سحبنا زجاجتين عشوائيا. ليكن X متحولا عشوائيا يمثل عدد الزجاجات المسحوبة من نوع "بن هارون".

المطلوب:

1. أدرج فضاء إمكانات هذه التجربة.
2. ما هي القيم الممكنة للمتغير X ؟
3. ما هو احتمال أن يكون ضمن الزجاجات المسحوبة زجاجة واحدة B على الأقل؟
4. أدرج جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير X ومثله بيانيا.
5. أوجد تابع التوزيع $F(x)$ ومثله بيانيا.

حل التمرين الثاني:

1. إدراج فضاء إمكانات هذه التجربة:

$$N = \{(S,S),(S,B),(B,B)\}$$

2. القيم الممكنة للمتغير X:

$$\Omega = \{0,1,2\}$$

3. احتمال أن يكون ضمن الزجاجات المسحوبة زجاجة واحدة B على الأقل.

نلاحظ أن:

- ✓ النتائج المنتظرة ثنائية الإمكانية (كل زجاجة مسحوبة إما ماء سعيدة وإما ماء بن هارون).
- ✓ السحب دون إرجاع (أي السحبات غير مستقلة واحتمال النجاح P غير ثابت)
- ✓ كما أنه لا أهمية للترتيب.

ومنه: X متغير عشوائي خاضع للتوزيع فوق الهندسي، أي: $X \backsim H(n,M,N) \Leftrightarrow X \backsim H(2,4,7)$

حيث: $\boldsymbol{P(X=k)} = \frac{\boldsymbol{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}}{\boldsymbol{C_N^n}}$

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2)$$
$$= \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_7^2} + \frac{C_4^2 \times C_3^0}{C_7^2} = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \mathbf{\frac{6}{7}}$$

4. أدرج جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير X:

لتحديد جدول التوزيع الاحتمالي لابد من ايجاد مجموعة الامكانيات ... واحتمال كل واحدة من هذه الامكانيات:

$$\Omega = \{0,1,2\}$$

وسبق حساب $P(X=1)$ و $P(X=2)$، ولم يبق لنا إلا حساب $P(X=0)$

$$P(X=0)=\frac{C_4^0\times C_3^2}{C_7^2}=\mathbf{\frac{1}{7}}$$

أو بطريقة أخرى (طرقة المتمم):

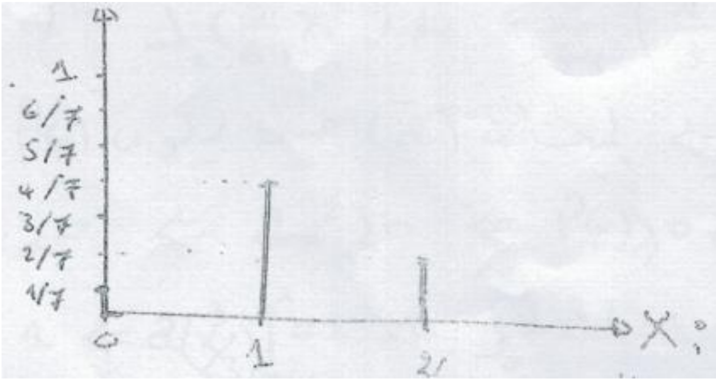
$$P(X=0)=P(X<1)=1-P(X\geq 1)=\left(1-\frac{6}{7}\right)=\left(\frac{7}{7}-\frac{6}{7}\right)=\mathbf{\frac{1}{7}}$$

الجدول رقم **02**: التوزيع الاحتمالي للمتغير **X**.

x_i	*0*	*1*	*2*	*المجموع*
P(xi)	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\mathbf{\frac{7}{7}}$

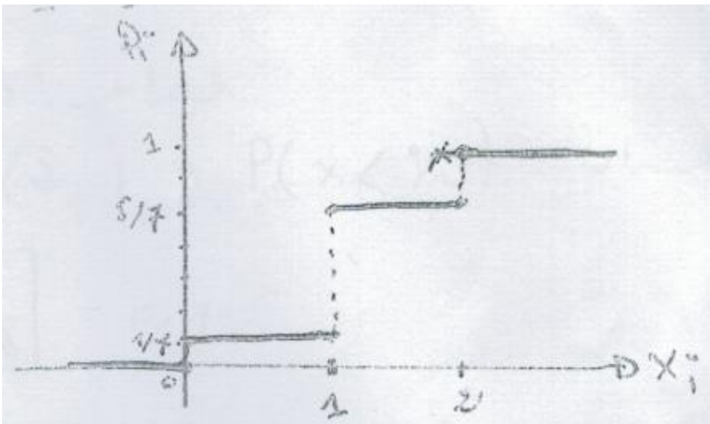
المصدر: التمرين الثاني من السلسلة 03.

تمثيله بيانيا:



5. إيجاد تابع التوزيع $F(x)$ وتمثيله بيانيا:

$$F(x_k)=\begin{cases}0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -\infty < x_k < 0\\ {}^1/_7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0\leq x_k<1\\ {}^5/_7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1\leq x_k<2\\ {}^7/_7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2\leq x_k<+\infty\end{cases}$$



التمرين الثالث:

يرمي لاعب قطعة نرد، وذلك ضمن الشروط الآتية:

- إذا كان الرقم الناتج 1 يحصل اللاعب على نقطتين اثنتين.
- إذا كان الرقم الناتج 6 يحصل اللاعب على ثلاث نقاط.
- إذا كان الرقم الناتج أكبر من أو يساوي 2، وأقل من أو يساوي 5 يحصل اللاعب على نقطة واحدة.

ليكن X متغيرا عشوائيا يمثل النقاط التي يحصلها هذا اللاعب.

المطلوب: حدد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X وتأكد من تحقيقه للشرطين.

حل التمرين الثالث:

تحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X:

يمكن لهذا الاعب أن يحصد نقطة واحدة، أو نقطتين أو ثلاث نقاط، حسب الوجه الذي يظهر من الترد.

إذن القيم الممكنة للمتغير X هي: $\Omega = \{1,2,3\}$

$p(x_i)$	x_i
$4/6$	1
$1/6$	2
$1/6$	3
$6/6$	المجموع

$$P(X=1) = \frac{4}{6}$$
$$P(X=2) = \frac{1}{6}$$
$$P(X=3) = \frac{1}{6}$$

نلاحظ أن هذا التوزيع يحقق الشرطين الأساسيين ليكون توزيعا احتماليا، وهما:

$$p(x_i) \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{3} p(x_i) = 1$$

التمرين الرابع:

لتكن الدالة f معرفة كما يأتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{64}x^2 \ldots\ldots\ldots 0 < x < 4 \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots sinon \end{cases}$$

1. تأكد أن هذه الدالة دالة كثافة احتمالية، ثم مثلها بيانيا.
2. أوجد الاحتمال $p(1 < x < 1.5)$
3. أحسب كلا من التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير.

حل التمرين الرابع:

1. التأكد من أن هذه الدالة دالة كثافة احتمالية:

لتكون أي دالة رياضية دالة كثافة احتمالية لابد أن تحقق الشرطين الآتيين:

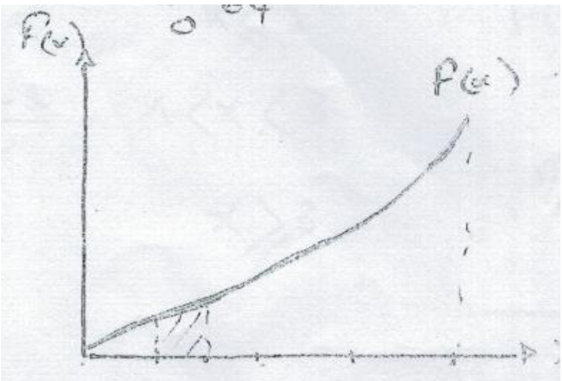
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

نلاحظ أن الشرط الأول **محقق**. نتأكد الآن من الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^4 \frac{3}{64}x^2dx = \frac{3}{64}\int_0^4 x^2dx = \frac{3}{64}\times\frac{x^3}{3}\bigg|_0^4 = \left(\frac{3}{64}\times\frac{4^3}{3}\right) = \frac{3}{64}\times\frac{64}{3} = \mathbf{1}$$

ومنه الشرط الثاني ايضا **محقق.**

تمثيله البياني:



2. حساب الاحتمال $p(1 < x < 1.5)$

$$p(1 < x < 1.5) = \int_1^{1.5} \frac{3}{64}x^2dx = \frac{3}{64}\int_1^{1.5} x^2dx = \frac{3}{64}\times\frac{x^3}{3}\bigg|_1^{1.5}$$

$$= \frac{3}{64}\left(\frac{1.5^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{3}{64}\left(\frac{\frac{27}{8}}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{64}\left(\frac{27}{8}\times\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{64}\left(\frac{9}{8} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{27}{512} - \frac{3}{192} = 0.053 - 0.016 = \mathbf{0.037}$$

3. **حساب كل من التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير.**

✓ **التوقع الرياضي:**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^4 x\left(\frac{3}{64}x^2\right)dx = \frac{3}{64}\int_0^4 x^3dx = \frac{3}{64}\times\frac{x^4}{4}\bigg|_0^4$$

$$= \left(\frac{3}{64}\times\frac{4^4}{4}\right) = \frac{3}{64}\times 64 = \mathbf{3}$$

✓ **التباين:**

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx - [E(X)]^2$$

$$= \int_0^4 x^2\left(\frac{3}{64}x^2\right)dx - [E(X)]^2 = \frac{3}{64}\int_0^4 x^4dx - [E(X)]^2$$

$$= \frac{3}{64}\times\frac{x^5}{5}\bigg|_0^4 - 3^2 = \left(\frac{3}{64}\times\frac{4^5}{5}\right) - 9 = \left(\frac{3072}{320} - 9\right) = (9.6 - 9) = \mathbf{0.6}$$

التمرين الخامس:

لتكن الدالة f معرفة كما يأتي: حيث a عدد حقيقي.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 \dots\dots\dots 0 < x < 1 \\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots sinon \end{cases}$$

1. حدد قيمة a حتى تكون f تابع كثافة، ثم مثلها بيانيا.
2. أحسب: $p(x < 0.5)$ ، $p\left(x < {}^{3}\!/_{4}\right)$
3. أحسب $F(x)$ ومثله بيانيا.

حل التمرين الخامس:

1. تحديد قيمة a حتى تكون f تابع كثافة احتمالية:

لتكون الدالة f دالة كثافة احتمالية لابد أن تحقق الشرطين الآتيين:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \dots\dots\dots....(2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1\right) \Leftrightarrow \left(\int_{0}^{1} ax^2dx = 1\right) \Leftrightarrow \left(a\int_{0}^{1} x^2dx = 1\right) \Leftrightarrow \left(a \times \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1\right)$$

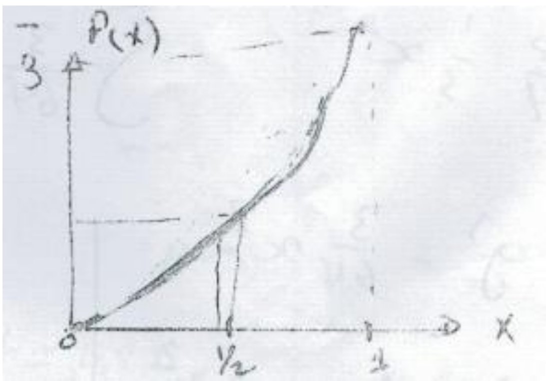
$$\Leftrightarrow \left(a \times \frac{1^3}{3} = 1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{3} = 1\right) \Rightarrow \boldsymbol{a = 3}$$

وإذا كان $a = 3$ فإن الدالة تحقق الشرط الثاني، وكذلك الشرط الأول، بأن تكون موجبة على امتداد مجال تعريفها.

ومنه تصبح الدالة f معرفة على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \dots\dots\dots 0 < x < 1 \\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots sinon \end{cases}$$

تمثيلها بيانيا:



2. حساب: $p(x < 0.5)$ ، $p\left(x < {}^{3}\!/_{4}\right)$

$$p(x < 0.5) = \int_{0}^{0.5} 3x^2 dx = 3\int_{0}^{0.5} x^2 dx = 3 \times \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{0.5} = 3 \times \frac{0.5^3}{3} = \mathbf{0.125}$$

$$p\left(x < {}^{3}\!/_{4}\right) = \int_{0}^{0.75} 3x^2 dx = 3\int_{0}^{0.75} x^2 dx = 3 \times \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{0.75} = 3 \times \frac{0.75^3}{3} = \frac{27}{64} = \mathbf{0.422}$$

3. حساب ***F(x)*** وتمثيله بيانيا:

نميز الحالات الثلاث الآتية:

$-\infty < x_k < 0$

$$F(x_k) = p(x \le x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} 3x^2 dx = 0$$

$0 \le x_k < 1$

$$F(x_k) = p(x \le x_k) = \int_{-\infty}^{0} 3x^2 dx + \int_{0}^{x_k} 3x^2 dx$$

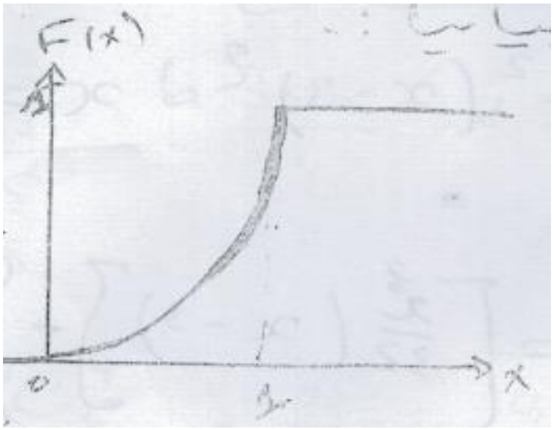
$$= 0 + 3\int_{0}^{x_k} x^2 dx = 3 \times \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{x_k} = 3 \times \frac{{x_k}^3}{3} = \boldsymbol{{x_k}^3}$$

$1 \le x_k < +\infty$

$$F(x_k) = p(x \le x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} 3x^2 dx = \int_{-\infty}^{0} 3x^2 dx + \int_{0}^{1} 3x^2 dx + \int_{1}^{+\infty} 3x^2 dx$$

$$= 0 + 1 + 0 = \mathbf{1}$$

$$F(x_k) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad -\infty < x_k < 0 \\ {x_k}^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .0 \le x_k < 1 \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ..1 \le x_k < +\infty \end{cases}$$



التمرين السادس:

لتكن الدالة f معرفة كما يأتي:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 \dots\dots\dots 1 < x < 3 \\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots sinon \end{cases}$$

1. تأكد أن هذه الدالة تابع كثافة احتمالية.
2. مثلها بيانيا.
3. أوجد الاحتمال $p(2 < x < 2.5)$
4. أوجد تابع التوزيع *F(x)* ومثله بيانيا.

حل التمرين السادس:

1. التحقق من أن هذه الدالة تابع كثافة احتمالية:

لتكون أي دالة رياضية دالة كثافة احتمالية لابد أن تحقق الشرطين الآتيين:

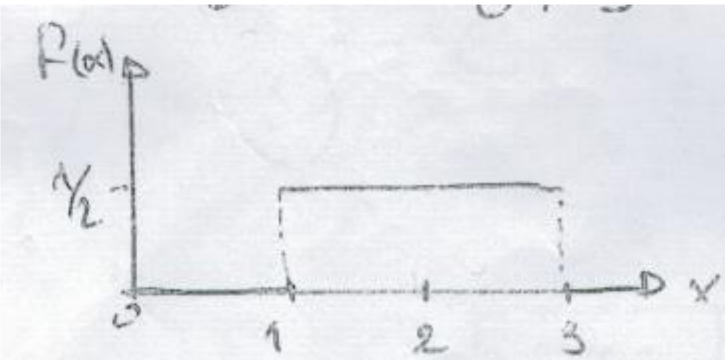
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

نلاحظ أن الشرط الأول محقق. نتأكد الآن من الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{3} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{3} x^0 dx = \frac{x}{2}\Big|_1^3 = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

ومنه الشرط الثاني أيضا محقق. (يسمى هذا النوع من التوزيعات الاحتمالية بالتوزيع المنتظم).

2. تمثيلها بيانيا:



3. حساب الاحتمال $p(2 < x < 2.5)$

$$p(2 < x < 2.5) = \int_{2}^{2.5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{2.5} x^0 dx = \frac{x}{2}\Big|_2^{2.5} = \left(\frac{2.5}{2} - \frac{2}{2}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \mathbf{0.25}$$

4. إيجاد تابع التوزيع $F(x)$ وتمثيله بيانيا:

5. نميز الحالات الثلاث الآتية:

$-\infty < x_k < 1$

$$F(x_k) = p(x \le x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \frac{1}{2} dx = 0$$

$1 \le x_k < 3$

$$F(x_k) = p(x \le x_k) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2} dx + \int_{1}^{x_k} \frac{1}{2} dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\int_{1}^{x_k} x^0 dx = \frac{x}{2}\Big|_{1}^{x_k} = \frac{x_k}{2} - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{x_k - 1}{2}}$$

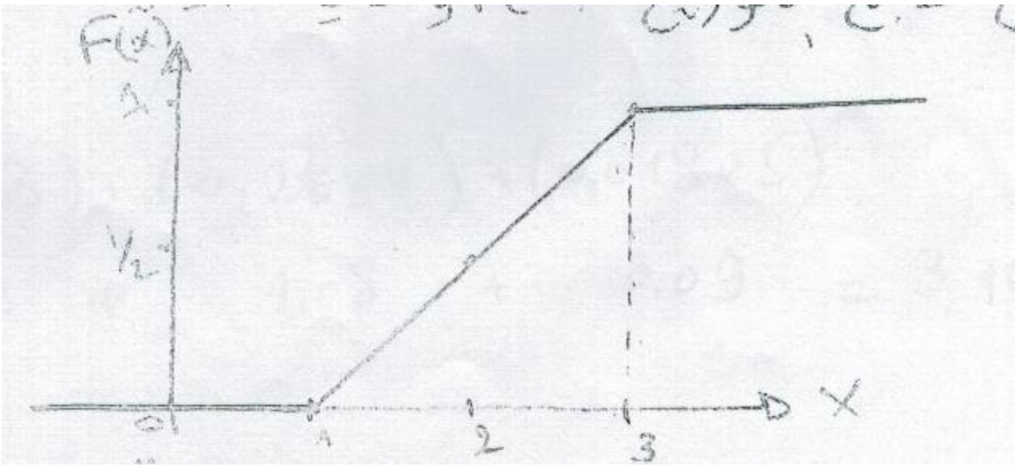
$3 \le x_k < +\infty$

$$F(x_k) = p(x \le x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \frac{1}{2} dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2} dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{2} dx + \int_{3}^{+\infty} \frac{1}{2} dx$$

$$= 0 + 1 + 0 = \mathbf{1}$$

$$F(x_k) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad -\infty < x_k < 1 \\ \dfrac{x_k - 1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .1 \le x_k < 3 \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad .. \; ..3 \le x_k < +\infty \end{cases}$$

تمثيله البياني:



أســــــــــــرة المقياس.