Nom et Prénom: **$2^{ème}$ A Info (Métho Num)**

Groupe: **Ann Univ: 2021/2022**

INTERROGATION N°01

Exercice: On considère la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1°/ Montrer que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

2°/ On écrit A sous la forme: $A = A_1 \times A_2$; où

$$A_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_2^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A_2^{-1} \times A_1^{-1}$ et commenter les résultats obtenus.

Correction de l'interrogation n°01 :

1°/ • On calcule det(A) :

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-3} & \overset{+}{2} \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$ 0,5

$$= -10+48-28 = 10$$ 1

$\det(A)=10\neq 0$; 0,5 donc la matrice A est inversible.

• On calcule A^{-1} :

On a : $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\,Com(A)^{T}$.

$$Com(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$ 1

$$= \begin{pmatrix} -5 & -16 & -14 \\ 0 & -4 & -6 \\ 5 & 10 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow Com(A)^{T} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -16 & -4 & 10 \\ -14 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$ 1 0,5

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -16 & -4 & 10 \\ -14 & -6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$$ 0,5

2°/ • On calcule $A_2^{-1} \times A_1^{-1}$:

$$A_2^{-1} \times A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

1,5

• Commentaire : D'après ce que nous avons vu, on trouve que :

0,5 1

$$A^{-1} = (A_1 \times A_2)^{-1} = A_2^{-1} \times A_1^{-1}.$$

Nom et Prénom: **$2^{ème}$ A Info (Métho Num)**

Groupe: **Ann Univ: 2021/2022**

INTERROGATION N°02

On considère la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}$$

1°/ Pour quelles valeurs du paramètre réel α, La matrice A admet la factorisation LU.

2°/ Pour $\alpha = 2$, réaliser la factorisation LU de A.

3°/ Déduire $\det(A)$ (Sans faire les calculs).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Correction de l'interrogation n°02 :

1°/ On a : $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

A admet la factorisation LU si :

- $|\alpha| = \alpha \neq 0$ (0,5)
- $\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 \neq 0$ (0,5) $\Rightarrow \alpha \neq 1$ (0,5) et $\alpha \neq -1$ (0,5)
- $\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2 - 1) - (\alpha - 1) + (1 - \alpha)$ (0,5)

$$= (\alpha - 1)\left(\alpha(\alpha + 1) - 1 - 1\right)$$

$$= (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) \neq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 1 \\ \text{et} \\ \alpha^2 + \alpha - 2 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq -2 \ (0{,}5) \text{ et } \alpha \neq 1 \ (0{,}5) \quad (\Delta = 1 + 8 = 9) \ (0{,}5) \end{cases}$$

Donc : A admet la factorisation LU si $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1, -2\}$

2°/ Pour $\alpha = 2$, on a :

$$A^{(1)} = \begin{array}{c} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = \begin{array}{c} \\ \\ 1/3 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Alors : $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$ (1,5) (1,5)

3°/ On a : $\det(A) = \det(L) \times \det(U)$ (0,5) ; où

$\det(L) = 1 \times 1 \times 1 = 1$ (0,5) et $\det(U) = 2 \times (3/2) \times \left(\frac{4}{3}\right) = 4$ (0,5)

C'est-à-dire : $\det(A) = 4$ (0,5)