Université Mohamed Khider Biskra.

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Vie
Département d'Informatique

$2^{ème}$ Année Info (LMD).
Module: Méthodes Numériques
Ann Univ: 2021/2022.

SERIE DE TDN°03

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES (METHODES INDIRECTES)
+ VALEURS ET VECTEURS PROPRES

Exercice N°01: Soit le système linéaire:

$$\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + x_3 & = 13 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 & = 9 \\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 & = -11 \end{cases}$$

1°/ Que peut-on dire de la convergence de la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel.

2°/ Donner l'écriture linéaire de ces méthodes.

3°/ Trouver une solution approchée de la solution exacte x; on prendra $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ (faire les 5 premières itérations seulement).

Exercice N°02: On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1+\alpha \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha > 0$$

1°/ Calculer la matrice de Jacobi J associée à A.

2°/ Calculer $\rho(J)$ et déduire $\rho(G)$ pour $\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$.

3°/ Que peut-on dire de la convergence de ces méthodes.

4°/ Dans le cas où $\alpha = 1$, $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, $\varepsilon = 10^{-6}$, calculer les nombres d'itérations k_1, k_2 à effectuer pour avoir respectivement:

4.1/ $\|x^{(k)} - x\| \leq \varepsilon$, $\forall k \geqslant k_1$ par la méthode de Jacobi.

4.2/ $\|x^{(k)} - x\| \leq \varepsilon$, $\forall k \geqslant k_2$ par la méthode de Gauss-Seidel.

(*Indication: Utiliser la majoration* $\|x^{(k)} - x\| \leq \left(\frac{l^k}{1-l}\right) \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \varepsilon$ *et Choisir resp* $l = \rho(J)$, $\rho(G)$).

Exercice N°03: On considère la matrice A et le vecteur $y^{(0)}$ suivants:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1°/ Calculer algébriquement les valeurs et les vecteurs propres de A.

2°/ Appliquer (06) fois la méthode de la puissance pour trouver λ_1 (la plus grande valeur propre) et V_1 (le vecteur propre associé à λ_1) de la matrice A.

3°/ Estimer alors λ_1 et V_1.

Série de TD n° 03 :

Exercice n° 01 :

1°/ On a :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|9| = 9 > |-2| + |1| = 3$$
$$|5| = 5 > |-1| + |-1| = 2$$
$$|9| = 9 > |1| + |-2| = 3$$

La matrice A a diagonale strictement dominant.
Donc les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel Convergent.

2°/ L'écriture linéaire de ces méthodes

$$\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{9}(13 + 2x_2 - x_3) \\ x_2 = 1/5\,(9 + x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{9}(-11 - x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

- **Méthode de Jacobi :**

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}\left(13 + 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(9 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{9}\left(-11 - x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

- **Méthode de Gauss-Seidel**

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}\left(13 + 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(9 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{9}\left(-11 - x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

3°/ On applique cinq fois chaque méthode :

- **Méthode de Jacobi :**

k	0	1	2	3	4
$x_1^{(k+1)}$	1,4444	1,9802	1,9635	2,0034	1,9965
$x_2^{(k+1)}$	1,8000	1,8444	1,9995	1,9862	2,0014
$x_3^{(k+1)}$	-1,2222	-0,9827	-1,0323	-0,9960	-1,0034

- **Méthode de Gauss-Seidel :**

k	0	1	2	3	4
$x_1^{(k+1)}$	1,4444	2,0107	2,0037	2,0003	2,1000
$x_2^{(k+1)}$	2,0888	2,0184	2,10013	2,1000	1,9999
$x_3^{(k+1)}$	-0,9185	-0,997	-1,0001	-1,000	-1,000

Exercice n°02 : D'une façon générale, on décompose la matrice A sous la forme : $A = \begin{pmatrix} D & -F \\ -E & D \end{pmatrix}$

On a : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1+\alpha \end{pmatrix}; \alpha > 0$

1°/ On calcule la matrice de Jacobi :

$J = D^{-1}(E+F)$; où : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha} \end{pmatrix}$,

$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{1+\alpha} & 0 \end{pmatrix}.$$

2°/ On calcule $\rho(J)$:

$\rho(J) = \max_i |\lambda_i|$; λ_i : est une valeur propre.

On calcule les valeurs propres par la formule :

$\det(J - \lambda I_3) = 0$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(J - \lambda I_3) = \det\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{1+\alpha} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{1+\alpha} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I_3) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2(1+\alpha)}\right) - \left(-\frac{\lambda}{2}\right) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2(1+\alpha)} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\alpha+2}{2(1+\alpha)}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 - \frac{\alpha+2}{2(1+\alpha)} = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{\frac{\alpha+2}{2(1+\alpha)}}$ et $\lambda_3 = -\sqrt{\frac{\alpha+2}{2(1+\alpha)}}$

On a : $\rho(J) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\left\{0, \sqrt{\frac{\alpha+2}{2(1+\alpha)}}\right\}$

C'est-à-dire : $\rho(J) = \sqrt{\frac{\alpha+2}{2(1+\alpha)}}$ si $\alpha \neq 1$ et $\rho(J) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si $\alpha = 1$

• Remarque importante : si A est tridiagonale : $\rho(G) = \rho(J)^2$.

Alors : $\rho(G) = \frac{\alpha+2}{2(1+\alpha)}$ si $\alpha \neq 1$ et $\rho(G) = \frac{3}{4}$ si $\alpha = 1$.

3/ Il est clair que $\rho(J) < 1$ et $\rho(G) < 1$; donc les deux méthodes Convergent (D'après le théorème principal de Convergen[ce])

4/ Pour calculer le nombre d'itération "k", on utilise :

$$\left(\frac{\ell^k}{1-\ell}\right)\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \varepsilon \iff \frac{\ell^k}{1-\ell} \leq \frac{\varepsilon}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} \iff \ell^k \leq \frac{\varepsilon(1-\ell)}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}$$

On introduit la fonction "ln" :

$$k \ln \ell \leq \ln\left(\frac{\varepsilon(1-\ell)}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}\right) \Rightarrow k \geq \ln\left(\frac{\varepsilon(1-\ell)}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}\right) / \ln \ell.$$

($\ln \ell < 0$ parce que $0 < \ell = \rho(J) < 1$).

Dans le cas où $\alpha = 1$, on a : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

• Pour Jacobi : On a : $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\rho(J) = \sqrt{3}/2$ et $\varepsilon = 10^{-6}$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}(1 + x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{2}(1 + x_2) \end{cases} \xrightarrow{\text{Jacobi}} \begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 + x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \end{cases}$$

Pour $k = 0$: $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \sqrt{(1-0)^2 + (\frac{1}{2}-0)^2 + (\frac{1}{2}-0)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Par la substitution, on trouve :

$$k \geq \ln\left(\frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)10^{-6}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) / \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 111,43$$

Donc, on peut prendre $k_1 = 112$.

- <u>Pour Gauss-Seidel</u> : Maintenant, on a : $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\rho(G) = \frac{3}{4}$ et $\varepsilon = 10^{-6}$

La suite de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 + x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 + x_2^{(k+1)}\right) \end{cases} \xRightarrow[k=0]{G-S} x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}.$$

$$k \geq \ln\left(\frac{(1-3/4)10^{-6}}{\sqrt{3}}\right) / \ln(3/4) = 54,75..$$

Alors, on peut prendre $k_2 = 55$

Exercice n° 03 : Pour calculer les valeurs et les vecteurs propres on utilise respectivement : $\det(A-\lambda I_n)=0$ et $(A-\lambda I_n)v = 0_{\mathbb{R}^n}$.

• On calcule les valeurs propres de la matrice A :

$$(A-\lambda I_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Pour calculer le determinant, on choisit la troisième Colonne

$$\det(A-\lambda I_n) = [(1-\lambda)(-\lambda)-2] = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = 0$$

$$P_n(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 0 \\ \vee \\ \lambda^2-\lambda-2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 1+8 = 9 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 1$$

Donc les valeurs proprorpres de la matrice A sont : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$.

• Le vecteur propre v_1 associé à $\lambda_1 = 2$:

On a : $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 \\ 2x_1 - 2y_1 = 0 \\ x_1 + y_1 - z_1 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 + x_1 - z_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 2x_1$$

Alors : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc le vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Le vecteur propre v_2 associé à $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ 2x_2 - y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_2 + y_2 = 0 \end{cases}$$

Alors : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Le vecteur propre v_3 associé à $\lambda_3 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_3 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -2x_3 \\ 2x_3 + y_3 = 0 \\ x_3 + y_3 + 2z_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_3 - 2x_3 + 2z_3 = 0 \Rightarrow z_3 = \frac{x_3}{2}$$

Alors : $\begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3/2 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

2/ On applique (06) fois la méthode de la puissance :

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow y^{(1)} = A y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y^{(2)} = A y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y^{(3)} = A y^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

k	1	2	3	4	5	6
$y^{(k)}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\6\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\10\\20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}21\\22\\41\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}43\\42\\84\end{pmatrix}$
u_k	1	3	$5/3$	$11/5$	$21/11$	$43/21$
$v^{(k)}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\6/5\\9/5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\10/11\\20/11\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\22/21\\41/21\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\42/43\\84/43\end{pmatrix}$

3°/ On estime λ_1 et v_1 :

Il est clair que : $\lambda_1 = 2$ et $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.