حل السلسلة

حل التمرين الأول:

معطيات التمرين: $x_i = \{7\ \ 11\ \ 35\ \ 15\ \ 5\ \ 2\}$

المطلوب:

1- قدر بقيمة الوسط الحسابي للمجتمع؟

- أحسن مقدر بنقطة (بقيمة) لمتوسط المجتمع المجهول هو متوسط العينة: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{7+11+35+15+5+2}{6} = \frac{75}{6} = 12.5$$

تقدير متوسط المجتمع بنقطة هو: 15.

2- قدر بقيمة نسبة قيم المجتمع التي تزيد على 14؟

أحسن مقدر بنقطة لنسبة المجتمع المجهولة هي نسبة العينة $\bar{p} = \frac{x}{n}$

X هنا يمثل عدد الحالات الملائمة أي عدد القيم التي تزيد عن 14، وهنا لدينا قيمتين فقط وهما (35 15) أي x=2 أي:

$$\bar{p} = \frac{x}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

تقدير نسبة المجتمع بنقطة هو $\frac{1}{3}$

3- قدر بقيمة تباين المجتمع في حالة سحب العينة مع الإرجاع؟

أحسن مقدر بنقطة لتباين المجتمع المجهول هو $\acute{s}^2$ حيث $\acute{s}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

$$\acute{s}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$
$$= \frac{(7-12.5)^2-(11-12.5)^2-(35-12.5)^2-(15-12.5)^2-(5-12.5)^2-(2-12.5)^2}{5}$$
$$= \frac{711.5}{5} = 142.3$$

تقدير تباين المجتمع بنقطة هو 142.3

حل التمرين 3:

المعطيات

$\bar{x} = 25 \quad \delta^2 = 4$ المجتمع طبيعي $n = 9.$

بما ان المجتمع طبيعي وتباينه معلوم فان فترة الثقة تعطى بالعلاقة التالية:

$$\mu \in \bar{x} \mp Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

لدينا: درجة الثقة = $1-\alpha$ =0.95

$$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 1-0.95 = 0.05 \Longrightarrow \alpha = 0.05$$
$$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right)} = Z_{(0.975)} = 1.96$$

ومنه:

$$\mu \in \bar{x} \mp Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mu \in 25 \mp 1.96\frac{2}{\sqrt{9}} \Longrightarrow \mu = 25 \mp 1.31$$

الحد الأدنى للمجال $\mu = 25 - 1.31 = 23.69$

الحد الأعلى للمجال $\mu = 25 + 1.31 = 26.31$

ومنه فترة الثقة هي: $\mu \in [23.69 \quad 26.31]$ وعليه يمكن القول:

نحن واثقون بنسبة 95% أن متوسط المجتمع سوف ينتمي للمجال [23.69 26.31]

حل التمرين الرابع:

المعطيات: مجتمع طبيعي، $n = 36 \quad \bar{x} = 36 \quad s' = 9$

المطلوب: أيجاد فترة ثقة 97% لوسط المجتمع μ.

بما حجم العينة أكبر من 30 فان فترة الثقة تعطى بالعلاقة التالية:

$$\mu \in \bar{x} \mp Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث:

$$1-\alpha = 0.97 \Longrightarrow \alpha = 1-0.97 = 0.03 \Longrightarrow \alpha = 0.03$$
$$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(1-\frac{0.03}{2}\right)} = Z_{(0.985)} = 2.17$$
$$\mu \in \bar{x} \mp Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mu \in 36 \mp 2.17 * \frac{9}{\sqrt{36}} \Longrightarrow \mu \in 36 \mp 3.255$$

الحد الأدنى للمجال: $\mu = 36 - 3.255 = 32.745$

الحد الأعلى للمجال: $\mu = 36 + 3.255 = 39.255$

ومنه فترة الثقة هي: $\mu \in [32.745 \quad 39.255]$ وعليه يمكن القول:

نحن واثقون بنسبة 97 % أن متوسط المجتمع محصور في المجال [32.745 39.255]

حل التمرين الرابع:

معطيات التمرين: $x_i = \{101، 98، 103، 105، 96، 99، 102\}$

التقدير بنقطة لمتوسط زمن التخمر.

أحسن مقدر لمتوسط المجتمع هو متوسط العينة: $\bar{x} = \frac{704}{7} = 100.57$

على افتراض أن زمن تخمر هذه المادة الغذائية يخضع لتوزيع طبيعي، أوجد فترة ثقة 95% لمعدل زمن التخمر؟

من بيانات العينة يمكن استخراج النتائج التالية:

$$s'^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\begin{array}{c}(101-100.57)^2 - (98-100.57)^2 - (103-100.57)^2 - (105-100.57)^2 - \\ (96-100.57)^2 - (99-100.57)^2 - (102-100.57)^2\end{array}}{6} = \frac{57.71}{6} = 9.62$$

$s' = 3.1$

ومنه

$$s' = 3.1 \quad \bar{x} = 100.57 \quad n = 7$$

بمان المجتمع طبيعي وتباينه مجهول وحجم العينة أقل من 30 فان فترة الثقة تعطى بالعلاقة التالية:

$$\mu \in \bar{x} \mp t_{\left(1-\frac{\alpha}{2};n-1\right)} * \frac{s'}{\sqrt{n}}$$

إيجاد $t_{\left(1-\frac{\alpha}{2};n-1\right)}$

$$1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \Longrightarrow \alpha = 0.05$$

$$t_{\left(1-\frac{\alpha}{2};n-1\right)} = t_{\left(1-\frac{0.05}{2};7-1\right)} = t_{(0.975;6)} = 2.45$$

$$\mu \in 100.57 \mp 2.45 * \frac{3.1}{\sqrt{7}} = 100.57 \mp 2.87$$

حساب الحد الأدنى للمجال $\mu = 100.57 - 2.87 = 97.7$

حساب الحد الأعلى للمجال $\mu = 100.57 + 2.87 = 103.44$

ومنه فترة الثقة سوف تكون على النحو التالي:

$$\mu \in [97.7 \quad 103.44\,]$$

نحن واثقون بنسبة 95% بأن متوسط الزمن اللازم من أجل تخمر هذه المادة بين 97.7 و103.44 دقيقة.

حل التمرين رقم 5

لاحظ صيدلاني من خلال خبراته السابقة أن معدل تأثير دواء معين يدوم 12 ساعة بانحراف معياري 2 ساعة. رغب هذا الصيدلي في تطوير الدواء ومن ثم تقدير معدل فترة تأثير الدواء الجديد، بحيث انه يكون متأكدا بنسبة 95% أن الخطأ في التقدير الناتج لا يزيد عن 0.5 ساعة.

حساب حجم العينة:

بما أن المجتمع طبيعي والانحراف المعياري معلوم فإن خطأ التقدير يعطى بالعلاقة التالية:

$$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ومنه المطلوب هو

$$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.5$$

حيث:

$$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 1-0.95 = 0.05 \Longrightarrow \alpha = 0.05$$
$$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right)} = Z_{(0.975)} = 1.96$$
$$1.96 * \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0.5 \Longrightarrow 1.96 * \frac{2}{0.5} \leq \sqrt{n} \Longrightarrow 7.84 \leq \sqrt{n} \Longrightarrow n \geq 61.47$$

أي أصغر قيمة لحجم العينة هو 62.

الصيدلي حتى يكون متأكد بنسبة 95% أن خطا التقدير لا يزيد عن 0.5 لابد له أن يسحب عينة حجمها على الأقل 62.

حل التمرين 6.

معطيات التمرين

باتنة 1	بسكرة 2
$\delta_1^2 = 3200$ $n_1 = 144$ $\bar{x}_1 = 45000$	$\delta_2^2 = 4900$ $n_2 = 144$ $\bar{x}_2 = 49000$

إيجاد فترة ثقة 90% للفرق بين متوسط دخل الاسر القاطنة بباتنة والاسر القاطنة ببسكرة.

بمان حجم العينتين كبير فان فترة الثقة تعطى بالعلاقة التالية:

$$\mu_1-\mu_2 \in (\bar{x}_1-\bar{x}_2) \mp Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

حيث:

$$1-\alpha = 0.9 \Longrightarrow \alpha = 1-0.9 = 0.1 \Longrightarrow \alpha = 0.1$$
$$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(1-\frac{0.1}{2}\right)} = Z_{(0.95)} = 1.64$$

ومنه:

$$\mu_1-\mu_2 \in (\bar{x}_1-\bar{x}_2) \mp Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \Longrightarrow$$

$$\mu_1-\mu_2 = (45000-49000) \mp 1.64 * \sqrt{\frac{4900}{144}+\frac{3200}{144}}$$

حساب الحد الأدنى للمجال: $= (45000-49000) - 1.64 * \sqrt{\frac{4900}{144}+\frac{3200}{144}} = -4012.3$

حساب الحد الأعلى للمجال $= (45000-49000) + 1.64 * \sqrt{\frac{4900}{144}+\frac{3200}{144}} = -3987.7$

ومنه فترة الثقة للفرق سوف متوسط دخل الأسر التي تقيم في ولاية باتنة وولاية بسكرة هي $\mu_1-\mu_2 \in [-4012.3 \quad -3987.7]$

حل التمرين رقم 07:

معطيات التمرين

المجتمع الأول (باتنة)	المجتمع الثاني (بسكرة)
$\bar{x}_1 = 45000$	$\bar{x}_2 = 49000$
$n_1 = 144$	$n_2 = 144$
$\sigma_1^2 = 3200$	$\sigma_2^2 = 4900$
μ_1	μ_2

بما أن العينتين كبيرتا الحجم ومستقلتان، وتبايني المجتمعين معلومين، فان فترة الثقة المطلوبة هي على الشكل التالي:

$$\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad , (\bar{X}_1-\bar{X}_2) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

وبما أن:

$$1-\alpha=0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95$$

وبالتالي يكون:

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.95} = 1.64$ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)-\ z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=(45000-49000)-1.64.\sqrt{\frac{3200}{144}+\frac{4900}{144}}=-4000-12.3=$$
-4012.3

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)+\ z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=(45000-49000)+1.64.\sqrt{\frac{3200}{144}+\frac{4900}{144}}=-4000+12.3=$$
-3987.7

إذن **فترة الثقة للفرق** بين متوسطي الدخل في الولايتين $(\mu_1-\mu_2)$ عند مستوى الثقة 90% هي:
[-4012.3 ، -3987.7]

حل التمرين رقم 08:

بما أن العينتين كبيرتا الحجم ومستقلتان، فان فترة الثقة المطلوبة هي على الشكل التالي:

$$\left[\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)-\ z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{s'^2_1}{n_1}+\frac{s'^2_2}{n_2}}\ ,(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+\ z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{s'^2_1}{n_1}+\frac{s'^2_2}{n_2}}\right]$$

وبما أن:

$$1-\alpha=0.95\Rightarrow\alpha=0.05\Rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0.975$$

وبالتالي يكون:

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}=\ z_{0.975}=1.96$ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

وبالتعويض في هذه الفترة بالبيانات المتوافرة لدينا نتحصل على:

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)-\ z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}=(50-45)-1.96.\sqrt{\frac{7.5^2}{100}+\frac{7.6^2}{120}}=5-2=3$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+\ z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}=(50-45)+1.96.\sqrt{\frac{7.5^2}{100}+\frac{7.6^2}{120}}=5+2=7$$

إذن **فترة الثقة للفرق** بين المتوسطي عند مستوى الثقة95% هي: [3، 7]

ومن هنا نستنتج أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني.

حل التمرين رقم 09:

معطيات التمرين

المجتمع الأول (الطلبة الذين حضروا البرنامج الصيفي)	المجتمع الثاني (الطلبة الذين لم يحضروا هذا البرنامج)
$\bar{x}_1 = 15$	$\bar{x}_2 = 13.5$
$n_1 = 20$	$n_2 = 25$
$s'^2_1 = 2$	$s'^2_2 = 2.5$
μ_1	μ_2
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	

1– تقدير الفرق بين متوسط درجات الطلبة الذين حضروا البرنامج الصيفي والذين لم يحضروا $(\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2})$.

التقدير بنقطة ل $(\mu_1 - \mu_2)$ هو $1.5 = 15 - 13.5 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$.

2– تحديد هامش خطأ المعاينة للتقدير.

بما أن العينتان مستقلتان وحجمهما صغير، وتبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين فان هامش خطأ المعاينة للتقدير يأخذ الشكل التالي:

$$t_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \cdot \sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

لدينا: $1\text{-}\alpha = 0.95$ فان : $1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$

ولدينا: $\upsilon = n_1+n_2-2 = 20+25-2 = 43$

فيكون: $t_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = t_{(0.975,43)} = 2.02$

كذلك نجد أن:

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)\, s'^2_1+(n_2-1)\, s'^2_2}{n_1+n_2-2} = \frac{(20-1)2+(25-1)2.5}{20+25-2} = 2.28$$

وعليه يكون:

$$t_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \cdot \sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = 2.02\sqrt{2.28\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{25}\right)} = 0.915$$

وهو المطلوب

3. تحديد ما إذا كانت فترة ثقة 95% تشير إلى أن البرنامج الصيفي مفيد :

بعد القيام بجميع الحسابات نجد أن فترة الثقة المطلوبة هي:

$$(\mu_1 - \mu_2) = [0.585 ، 2.415]$$

من خلال فترة الثقة السابقة نلاحظ أنها لا تحتوي لا على قيم سالبة ولا على القيمة صفر، وبالتالي فان فترة ثقة 95% تشير إلى أن البرنامج الصيفي مفيد.

حل التمرين رقم 10:

بعد القيام بمختلف العمليات الحسابية يتوفر لدينا البيانات التالية:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i}{n_1} = \frac{12}{6} = 2$$
$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} x_i}{n_2} = \frac{15}{5} = 3$$
$$s'^2_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{10}{5} = 2$$
$$s'^2_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_i - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{16}{4} = 4$$

بما أن المجتمعأن يتوزعان توزيعا طبيعيا بتباينين غير متساويين، والعينتين مستقلتين، فان فترة الثقة المطلوبة في هذه الحالة هي:

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\sqrt{(\frac{s'^2_1}{n_1} + \frac{s'^2_2}{n_2})}\ ,(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \ t_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\sqrt{(\frac{s'^2_1}{n_1} + \frac{s'^2_2}{n_2})}\right]$$

ولدينا : $1-\alpha = 0.90$ فان : $1-\frac{\alpha}{2} = 0.95$ ،ونجد أن درجة الحرية تساوي:

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{s'^2_1}{n_1}+\frac{s'^2_2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s'^2_1}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)} + \frac{\left(\frac{s'^2_2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}} = \left(\frac{\left(\frac{2}{6}+\frac{4}{5}\right)^2}{\frac{\left(\frac{2}{6}\right)^2}{(6-1)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{(5-1)}}\right) = 7$$

وعليه يكون:

$$t_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = \ t_{(0.95,7)} = 1.895$$

وعند التعويض في فترة الثقة المطلوبة نحصل على:

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\sqrt{(\frac{s'^2_1}{n_1} + \frac{s'^2_2}{n_2})} = (2-3) - 1.895.\sqrt{(\frac{2}{6} + \frac{4}{5})} = -3.017$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \ t_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\sqrt{(\frac{s^2_1}{n_1} + \frac{s^2_2}{n_2})} = (2-3) + 1.895.\sqrt{(\frac{2}{6} + \frac{4}{5})} = 1.017$$

إذن فترة ثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ عند مستوى الثقة 90% هي بالتقريب:

$$[-3.017 \ ، \ 1.017]$$

حل التمرين 11:

لدينا المجتمع محل الدراسة يتكون من درجات كل الطلبة المشتركين في هذا الامتحان، وبما أن هذا المجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا، فان فترة الثقة لتباين درجات كل الطلبة المشتركين في هذا الامتحان ستكون كما يلي :

$$\frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}}$$

بعد القيام بالعمليات الحسابية نجد أن الوسط الحسابي وتباين العينة هما على التوالي:

$$S'^2 = 216.5 \quad \text{،} \quad \overline{x} = 24$$

ولدينا: $1-\alpha = 0.90$ ، $\alpha = 0.1$ ، $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ ، $\upsilon = n-1 = 5-1 = 4$

ويكون: $\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = \chi^2_{(0.05,4)} = 0.711$

$$\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = \chi^2_{(0.95,4)} = 9.488$$

وبالتالي فان الحد الأدنى لهذه الفترة هو:

$$\frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} = \frac{(5-1)216.5}{9.488} = 91.27$$

والحد الأعلى هو:

$$\frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} = \frac{(5-1)216.5}{0.711} = 1218$$

وعليه فان فترة الثقـــــة لتباين درجات كل الطلبة المشـــتركين في هذا الامتحان عند مســـتوى الثقة 90% هي: [1218 ، 91.27] ؛بعبارة أخرى نستطيع القول بثقة قدرها 90% بأن تباين درجات كل الطلبة المشتركين في هذا الامتحان يقع بين القيمتين 91.27 و 1218 .

حل التمرين 12:

بما أن المجتمع محل الدراسة يتوزع توزيعا طبيعيا، فان فترة الثقة لتباين المجتمع ستكون كما يلي :

$$\frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}}$$

بعد القيام بالعمليات الحسابية نجد أن تباين العينة هو:

$$S'^2 = \frac{125}{16-1} = 8.33$$

ولدينا: $1-\alpha = 0.95$ ، $\alpha = 0.05$ ، $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$\upsilon = n-1 = 16-1 = 15$$

ويكون: $\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = \chi^2_{(0.025,15)} = 6.26$

$$\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = \chi^2_{(0.975,15)} = 27.49$$

وبالتالي فان الحد الأدنى لهذه الفترة هو: $\frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} = \frac{(16-1)8.33}{27.49} = 4.545$

و الحد الأعلى هو: $\frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} = \frac{(16-1)8.33}{6.26} = 19.96$

وعليه فان فترة الثقة لتباين المجتمع عند مستوى الثقة 95% هي: [19.96 ، 4.545]

وبالتالي تكون فترة الثقة للانحراف المعياري للمجتمع عند نفس مستوى الثقة هي: [4.468 ، 2.132]

حل التمرين 13:

نلاحظ أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا ، والعينتين مستقلتان ، إذن فترة الثقة المطلوبة هي :

$$\frac{s'^2_1 / s'^2_2}{F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s'^2_1 / s'^2_2}{F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}}$$

لدينا:

$$\upsilon_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9 \quad , \quad \upsilon_1 = n_1 - 1 = 14 - 1 = 13$$

وبما أن : $1-\alpha = 0.95$ ، $\alpha = 0.05$ ، $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ، يكون :

$$F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.025,13,9)} = 0.302$$

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.975,13,9)} = 3.831$$

وبالتالي فان الحد الأدنى لفترة الثقة هو: $\frac{s_1^2/\ s_2^2}{F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}}=\frac{32.7/27.6}{3.831}=0.309$

و الحد الأعلى هو: $=\frac{s_1^2/\ s_2^2}{F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}}\ \frac{32.7/27.6}{0.302}=3.923$

وعليه فان فترة الثقة لنسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ عند مستوى الثقة

%95 هي: [0.35 ، 3.923] .

حل التمرين 14:

بنفس الطريقة السابقة نلاحظ أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا ، والعينتين مستقلتين ، إذن فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{s'^2_1/\ s'^2_2}{F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}}\ \leq\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leq\qquad\frac{s'^2_1/\ s'^2_2}{F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}}$$

بعد القيام بمختلف العمليات الحسابية نجد أن مقدر التباينين من العينتين هما على التوالي : 4.3 و 1.67 .

ولدينا:

$$\upsilon_2=n_2-1=4-1=3,\quad \upsilon_1=n_1-1=5-1=4$$

وبما أن : $1-\alpha=0.95$ ، $\alpha=0.05$ ، $\frac{\alpha}{2}=0.025$ ، يكون :

$$F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}=F_{(0.025,4,3)}=0.1$$

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}=F_{(0.975,4,3)}=15.1$$

وبالتالي فان الحد الأدنى لفترة الثقة هو: $\frac{s'^2_1/\ s'^2_2}{F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}}=\frac{4.3/1.67}{15.1}=0.1705$

والحد الأعلى هو:

$$\frac{s'^2_1/\ s'^2_2}{F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}}=\frac{4.3/1.67}{0.1}=25.7485$$

وبالتالي فترة الثقة لنسبة التباينين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ عند مستوى الثقة 95% هي: [25.7485 ، 0.1705].

حل التمرين 15

لدينا: $n = 100$ ، $x = 35$

فإذا رمزنا لنسبة الطلبة المدخنين في الجامعة بـــP ، مع العلم أن هذه النسبة مجهولة فيتم تقديرها اعتمادا على نسبة الطلبة المدخنين في العينة $\bar{p}$ ، ومنه نجد:

$$\bar{p} = \frac{35}{100} = 0.35$$

وبالتالي فان النسبة 35% هي تقدير نقطي لنسبة الطلبة المدخنين في الجامعة ككل.

حل التمرين 16:

لدينا: $1-\alpha = 0.95$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ، ومنه $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$

1- $E = 0.025$, $P = 0.3$

فتكون:
$$n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{E}\right)^2 .P(1-P)$$

$$n \geq \left(\frac{1.96}{0.025}\right)^2 .(0.3)(0.7)$$

$$n \geq 1290.778$$

ومنه أصغر حجم ممكن للعينة المطلوب هو $n = 1291$

2 – بما أن P غير معلومة فإننا نضع مكانها أسوأ قيمة وهي : $P = \frac{1}{2}$

فتكون:
$$n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{E}\right)^2 * \frac{1}{4}$$

$$n \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1.96}{0.025}\right)^2$$

$$n \geq 1536.64$$

ومنه أصغر حجم ممكن للعينة المطلوب هو $n = 1537$

حل التمرين 17:

1– نسبة المعلمين في المرحلة الابتدائية الحاصلين على شهادة البكالوريا تقدر بالقيمة:

$$\bar{p} = \frac{75}{200} = 0.375$$

2- بما أن حجم العينة كبير، فان فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي:

$$\left[p - \boldsymbol{z_{1-\alpha/2}}\cdot\sqrt{(\frac{\overline{pq}}{n})} \quad , \; p + \boldsymbol{z_{1-\alpha/2}}\cdot\sqrt{(\frac{\overline{pq}}{n})}\right]$$

ولدينا $1-\alpha = 0.97$ فان: $\frac{\alpha}{2} = 0.015$ ، من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد: $z_{1-\alpha/2} = z_{0.985} = 2.17$

وعند التعويض في فترة الثقة السابقة نحصل على:

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\left[\bar{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{(\frac{\overline{pq}}{n})}\right] = 0.375 - 2.17 * \sqrt{\frac{(0.375)(0.625)}{200}} = 0.3$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\left[\bar{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{(\frac{\overline{pq}}{n})}\right] = 0.375 + 2.17 * \sqrt{\frac{(0.375)(0.625)}{200}} = 0.45$$

وعليه يمكن القول بثقة 99% بأن النسبة الحقيقية للمعلمين الحاصلين على شهادة البكالوريا تقع بين 30% و 45% .

حل التمرين 19:

بما أن العينتان عشوائيتان مستقلتان وكبيرتا الحجم، فان فترة الثقة المطلوبة هي: $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\,\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\,\bar{q}_2}{n_2}}$

ومن البيانات المتوافرة لدينا نستطيع حساب ما يلي:

نسبة المدخنين في عينة الرجال هي: $\bar{p}_1 = \frac{36}{150} = 0.24$

نسبة المدخنين في عينة النساء هي: $\bar{p}_2 = \frac{5}{300} = 0.0167$

ولدينا: $1-\alpha = 0.95$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ، ومنه $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$

وعند التعويض في فترة الثقة السابقة نحصل على:

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\,\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\,\bar{q}_2}{n_2}} = (0.24 - 0.0167) \pm 1.96\sqrt{\frac{0.24*0.76}{150} + \frac{0.0167*0.9833}{300}}$$

$$\Rightarrow (P_1 - P_2) \in [0.1534,\ 0.2932]$$

أي نستطيع القول بثقة قدرها 95% أن الفرق بين نسبة المدخنين بين الرجال والنساء يقع بين النسبتين 15.34% و 29.32% .