****

التحليل الرياضي

السنة الأولى

____

الجزء 2

الاشتقاق ودساتير المتوسط وتايلور

____

أبو بكر خالد سعد الله

المدرسة العليا للأساتذة، القبة

مقدمة

يسعى هذا الكتاب إلى تقديم مادة في التحليل الرياضي تُعنىَ بمواضيع السنة الأولى لفائدة طلبة نظام ل.م.د. (ليسانس/ماستر/دكتوراه) في الرياضيات والإعلام الآلي. والكتاب ليس كتابا للدرس وحده، ولا للتمارين وحدها، وإنما يمزج بين الاثنين.

ومن عادة المؤلفين في الرياضيات تصميم كتبهم على أن تكون تغطي أحد الاثنين وليس الاثنين معا (كتاب للدرس بدون تمارين أو كتاب للتمارين مع عرض موجز للدرس). وهذا الاختيار يمليه عموما ضيق المكان لأن حجم الكتب لا تسع لبراهين النظريات وحلول التمارين.

أما هنا فقد صممنا الكتاب ليحتوي تفاصيل الدرس كله دون براهين النظريات التي عوضت في كل مرة بتعقيبات وأمثلة من شأنها أن تأخذ بيد الطالب موضحة بعض الجوانب التي قد تغيب عن ذهن القارئ عند الاطلاع على نظرية أو تعريف. وسيلاحظ الطالب أن تلك التعقيبات قد أخذت حيزا معتبرا من الكتاب.

ثم إن الكتاب اتبع بعد ذلك ما درج على تقديمه جلّ المؤلفين : التمارين المحلولة. وهكذا يقع هذا الجزء في أربعة فصول تغطي دراسة على

التوالي مواضيع الاشتقاق (الفصل الرابع) والتزايدات المنتهية (الفصل الخامس) والنشر المحدود (الفصل السادس) منتهيا باستعراض الدوال المألوفة (الفصل السابع). نشير أن الجزء الأول قد تناول الأعداد الحقيقية (الفصل الأول) والمتتاليات (الفصل الثاني) والاستمرار (الفصل الثالث). ولذا كان الفصل الأول من الجزء الثاني يحمل الرقم 4.

نشير في الأخير أن ترتيب مادة الكتاب هي كالتالي : قدمنا الجانب النظري (الدرس) لكل هذه الفصول في بداية الكتاب. تلتها قوائم نصوص التمارين لكافة الفصول بالترتيب. ثم حلول تلك التمارين مرتبة أيضا حسب الفصول.

كلنا أمل أن يفيد هذا العمل بوجه خاص طلبة النظام الجديد بالجزائر.

أبو بكر خالد سعد الله
قسم الرياضيات
المدرسة العليا للأساتذة، القبة، الجزائر

الفهـــــــــــرس الجزء 2

الفصل الرابع : الاشتقاق

الفصل الخامس: التزايدات المنتهية

الفصل السادس : النشر المحدود

الفصل السابع : الدوال المألوفة

فهـــــــــــرس الجزء 1

الفصل الأول : الأعداد الحقيقية والأعداد العُقَدِيَّة

الفصل الثاني : المتتاليات

الفصل الثالث : الدوال الحقيقية الوحيدة المتغيّر

الفصل الرابع

الاشتـــقاق

العناوين

1. مقدمة
2. الاشتقاق
3. التحدب

1. مقدمة

سبق لك أن تعرفت على مفهوم الاشتقاق قبل البكالوريا، والهدف من هذا الدرس هو التذكير بذلك المفهوم، ثم توسيع مداه والتعرف على خواص جديدة تتعلق به لم يتم تناولها في المرحلة الثانوية. ولا شك أن طالب السنة الأولى في فرع العلوم الدقيقة ملمّ بعدة خواص تتعلق بمشتق دالة (نلاحظ أننا سنستعمل في هذا الـــدرس وفي الذي يلـــيه مصطلحي "دالة" و"تابع" دون تمييز بينهما) مثل التفسير الهندسي للمشتق ونحو ذلك من النتائج الكثيرة (بوصفه يمثل ميل مماس بيان الدالة) في النقطة التي فاصلتها هي الفاصلة التي نشتق فيها الدالة). ورغم ذلك سنعود إلى تلك المفاهيم والخواص في هذا الفصل والذي يليه.

والجدير بالملاحظة أن مفهوم المشتق قد أدخل لتلبية حاجيات المختصين في صياغة مسائل فيزيائية وهندسية بأدوات التحليل الرياضي، وكذا بأدوات الهندسة التحليلية التي كانت ذات شأن منذ منتصف القرن السابع عشر. فمن المعلوم أن هذه الهندسة كان من ورائها الفرنسي ديكارت Descartes (1596–1650) والأنكليزي نيوتن Newton (1642–1727) والألماني لايبنيتز Leibniz (1646–1716). وقد كان ظهورها يضاهي ظهور نظرية المجموعات في العصر الحديث وبروز الهندسة الإقليدية في عصر الإغريق.

2. المشتق

تعريف (المشتق)

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على مجال مفتوح I. ولتكن نقطة x_0 من I.

1) نقول عن f إنه قابل للاشتقاق عند x_0 إذا وجـــد عدد حقيقي نرمز إليه بــ $f'(x_0)$ يحقق:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

2) نقول إن f يقبل الاشتقاق على I إذا قبل الاشتقاق عند كل نقطة منه.

3) نقول إن f إنه قابل للاشتقاق من اليمين عند x_0 إذا كانت النهاية التالية موجودة (التي تسمى عند وجودها المشتق من اليمين عند x_0) :

$$\lim_{h \xrightarrow{>0} 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

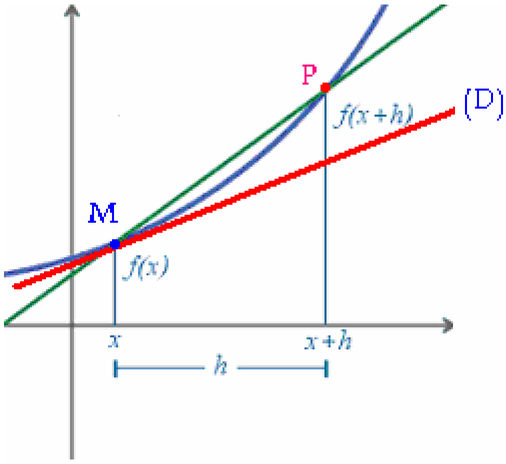
4) نقول إن f إنه قابل للاشتقاق من اليسار عند x_0 إذا كانت النهاية التالية موجودة (التي تسمى عند وجودها المشتق من اليسار عند x_0) :

$$\lim_{h \xrightarrow{<0} 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

تعقيبات

1) المشتق، إن وجد، فهو وحيد (لماذا؟).

2) التفسير الهندسي للمشتق



نعتبر دالة f قابلة للاشتقاق عند نقطة x. يعني ذلك أن النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ موجودة وتساوي $f'(x)$. ماذا يمثل المشتق $f'(x)$ هندسيا؟ لنرسم بيان الدالة f كما هو مبيّن في الشكل ولنكتب معادلة المستقيم (MP). إنها من الشكل $y=ax+b$ ... وإذا كانت نيّتنا جعل h يؤول إلى 0، أي النقطة P تؤول إلى M فيستحسن كتابة المعادلة $y=ax+b$ على الشكل $y=a(h).x+b(h)$ لإبراز أن المعاملين a و b يتغيران بتغير h.

لنمعن النظر في هذه المعادلة ... إنها تحقق المساواتين :

$$f(x)=a(h).x+b(h)$$
$$f(x+h)=a(h)(x+h)+b(h).$$

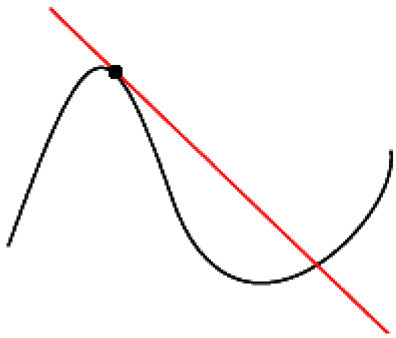
ومنه يأتي :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a(h)$$

مع العلم أن $a(h)$ يشير إلى ميل المستقيم (MP). ثم إن القول بأن f يقبل الاشتقاق عند x معناه وجود النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، أي النهاية

$\lim_{h\to 0} a(h)$. وماذا تمثل هذه النهاية للمعاملات $a(h)$؟ إنها تمثل ميل المستقيم الذي نحصل عليه عندما تؤول النقطة P إلى M (المستقيم (D) في الشكل أعلاه) ... هذا المستقيم هو مماس بيان f عند النقطة M.
خلاصة القول إن $f'(x)$ يمثل ميل المماس عند النقطة من بيان f ذات الفاصلة x.

لعله من المفيد في هذا السياق أن نلاحظ بأن المماس عند نقطة لبيان دالة يمكنه أن يقطع البيان في نقطة أخرى منه ... كما يبيّن الشكل التالي :



3) لاحظ أن قابلية الاشتقاق عند نقطة تكافئ وجود وتساوي المشتقين من اليمين ومن اليسار عند تلك النقطة (برهن على ذلك).

4) يمكن كتابة هذا التعريف على الشكل التالي : نقول عن f إنه قابل للاشتقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي نرمز إليه بـ $f'(x_0)$ يحقق :

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(h)$$

علما أن رمز لوندو Landau $o(h)$ (الذي سنعود إليه لاحقا)كمية تتعلق بـــ h وتحقق :

$$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0.$$

وهكذا نلاحظ أن الدالة $h\mapsto f(x_0+h)$ تكتب على شكل مجموع كمية مهملة ودالة تآلفية g معرفة بـــ $g(h)=f(x_0)+f'(x_0)h$.

يمكن أن نفسر ذلك بأن أفضل تقريب للدالة المعطاة بجوار x_0 دالـــة تآلفية، هي الدالة g. ومن جهة أخرى، نحن نعلم أن بيان الدالـــة g هـــو مماس بيان f عند x_0.

لإدراك أن تقريب f بـــ g تقريب جيد، اعتـــبر مـــثلا الدالـــة $f:x\mapsto x^3+x^2$ ، واحسب $f(1.017)$ باعتبار $x_0=1$ و $h=0.017$ فستجد أن

$$f(1.017)=(f(1+h)=2+5h+4h^2+h^3=g(h)+4h^2+h^3$$

وبذلك ترى أن تعويض القيمة $f(1.017)$ بالقيمة $g(h)$ تجعلنا نرتكب خطأ يساوي $4h^2+h^3$، أي 0.00116 علمـــا أن $f(1.017)=2.86160913$ وأن $g(0.17)=2.085$.

إليك أمثلة أخرى نقدمها في هذا الجدول :

العدد h يحقق	العبارة بدلالة h	تقريب العبارة	الخطأ أصغر من
$h \in \mathbb{R}$	$(1+h)^2$	$1+2h$	h^2
$\|h\|<1$	$(1+h)^3$	$1+3h$	$4h^2$
$\|h\|<1$	$\sqrt{1+h}$	$1+\frac{h}{2}$	$\frac{h^2}{2}$
$\|h\|<0.5$	$\frac{1}{1+h}$	$1-h$	$2h^2$

أمثلة شهيرة

من الأمثلة المتداولة نشير إلى :

1) مشتق التابع الثابت هو 0.

2) مشتق التابع f المعرف بـــ $f(x)=x^n$ هو $f'(x)=nx^{n-1}$ وهذا من أجل كل عدد صحيح. لرؤية ذلك يكفي أن نرى كيف يكون الحـــال عندما يكون n طبيعيا (لماذا؟). لدينا :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+...xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}\right)$$
$$=nx_0^{n-1}.$$

3) مشتق التابع f المعرف بـــ $f(x)=|x|$ من أجل $x\neq 0$ هـــو (أثبت ذلك) :

$$f'(x)=\begin{cases}1 & : x>0,\\ -1 & : x>0.\end{cases}$$

أما عند النقطة $x_0=0$ فالتابع لا يقبل الاشتقاق لأن النهاية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

غير موجودة ... ذلك أن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليـــسار عنـــد 0 :

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{|x|}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \frac{|x|}{x} = -1.$$

وبالتالي :

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

4) مشتق التابع الجيبي f المعرف بـــ $f(x) = \sin x$.

باستخدام العلاقة المثلثية الشهيرة

$$\sin x - \sin x_0 = 2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right).\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$$

نحصل على :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right).\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \\
&= \cos x_0 \times 1 \\
&= \cos x_0.
\end{aligned}$$

ومنه تأتي العلاقة $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

يمكن بنفس الكيفية إثبات أن $(\cos x)' = -\sin x$.

5) مشتق التابع الأسي f المعرف بـــ $f(x) = e^x$.

باستخدام العلاقة $\lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = 1$ يتضح أن:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}.\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}$$
$$= e^{x_0}.\lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t}$$
$$= e^{x_0}.$$

ومنه $f'(x) = (e^x)' = e^x$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

يمكن أن نستنتج بواسطة القاعدة التي تعطي مشتق التابع العكسي بأن $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$. كما يمكن البرهان على تلك العلاقة باستخدام خصائص اللوغاريتم.

نظرية (الاشتقاق والاستمرار)

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على مجـــال مفتـــوح I . إذا كانت قابلة للاشتقاق عند نقطة x_0 من I فإنها مستمرة عند هذه النقطة.

تعقيب

لاحظ أن عكس النظرية غير صحيح : استمرار دالة لا يؤدي إلى قابلية الاشتقاق. مثال ذلك : الدالة المعرفة بـــ $f(x)=|x|$ مستمرة عند 0، ورغم ذلك فهي لا تقبل الاشتقاق عند هذه النقطة كما سبق أن رأينا.

نظرية (اشتقاق المجموع والجداء والكسر)

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ و $g: I \to \mathbb{R}$ دالتين حقيقيتين معرفتين علـــى مجال مفتوح I وقابلتين للاشتقاق عند نقطة x_0 من I.

حينئذ يتحقق ما يلي :

1) المجموع $f+g$ يقبل الاشتقاق عند x_0 ولدينا :

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

2) الجداء $f.g$ يقبل الاشتقاق عند x_0 ولدينا :

$$(f.g)'(x_0)=f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0).$$

3) إذا كان $g(x_0)\neq 0$ فإن الكسر $\frac{f}{g}$ يقبل الاشتقاق ولدينا :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

نتيجة (مشتق الأس)

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على مجال مفتوح I وقابلـــة للاشتقاق عند نقطة x_0 من I.

حينئذ يكون التابع f^n قابلا للاشتقاق من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم n، ولدينا :

$$(f^n)'(x_0) = n.f^{n-1}(x_0).f'(x_0) .$$

لرؤية ذلك يكفي تطبيق الخاصية 2) المتعلقة بالجداء الواردة في النظرية السابقة.

مثال

ما هو مشتق كثير الحدود المعرّف بـــ (حيث $x \in \mathbb{R}$):

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 ?$$

تأكد استنادا إلى ما سبق أن المطلوب هو :

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1 .$$

نظرية (مشتق تركيب دالتين)

ليكن I و J مجالين مفتوحين من $\mathbb{R}$ ، و $f : I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على I بحيث $f(I) \subset J$، و $g : J \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على J.
نفرض أن :

1) $f : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند نقطة x_0 من I ،

2) $g : J \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند نقطة $f(x_0)$.

حينئذ يكون التركيب $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ قابلا للاشتقاق عند النقطة x_0، ولدينا :

$$(g \circ f)'(x_0) = \left(g'(f(x_0)\right) \times f'(x_0) .$$

أمثلة

1) يمكن الاستفادة من مشتق التابع الجيبي لاستنتاج مشتق التابع جيب التمام بملاحظة أن $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

لتنفيذ ذلك نضع $g(x) = \sin x$ و $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ في النظرية السابقة فنجد أن $g \circ f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ ونتيجة النظرية تقول عندئذ إن :

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) \times f'(x) \\ &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) \times 1 \\ &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

2) نعتبر التابع

$$f(x) = \begin{cases} x.\sin\frac{1}{x} & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

هل يقبل f الاشتقاق عند نقطة $x \neq 0$؟

بتطبيق النظرية السابقة (بوجه خاص) وقاعدة مشتق جداء تابعين نحصل على المطلوب :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sin\frac{1}{x} + \left(x \cos\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

لكننا لا نستطيع تطبيق النظرية السابقة عند النقطة $x = 0$. هذا لا يعني بطبيعة الحال أن f لا يقبل الاشتقاق عند تلك النقطة. ولذلك ينبغي

علينا البحث بطريقة أخرى عما إذا كان المشتق موجودا أم لا عند 0.
أفضل طريقة هنا هي التعريف، أي أننا نبحث عما إذا كانت النهاية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

موجودة أم لا. لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\ .$$

نلاحظ أن هذه النهاية غير موجودة لأن (مثلا) اختيار $x=\dfrac{1}{n\pi}$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم يعطي :

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\lim_{n\to+\infty}\sin n\pi=0\ .$$

أما اختيار $x=\dfrac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$ حيث n عدد طبيعي فيعطي :

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\lim_{n\to+\infty}\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}=1\ .$$

إن اختلاف النهايتين السابقتين يؤدي إلى عدم وجود النهاية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\ .$$

ومنه فإن f لا يقبل الاشتقاق عند 0.

3) نعتبر التابع :

$$f(x)=\begin{cases} x^2.\sin\dfrac{1}{x} & : x\neq 0,\\ 0 & : x=0.\end{cases}$$

هل يقبل f الاشتقاق عند نقطة $x\neq 0$؟

بتطبيق النظرية السابقة (بوجه خاص) وقاعدة مشتق جداء تابعين نحصل على المطلوب :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin\frac{1}{x} + \left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

لكننا لا نستطيع تطبيق النظرية السابقة عند النقطة $x=0$. هذا لا يعني بطبيعة الحال أن f لا يقبل الاشتقاق عند تلك النقطة. ولذلك ينبغي علينا البحث بطريقة أخرى عما إذا كان المشتق موجودا أم لا عند 0. وأفضل طريقة — هنا أيضا – هي التعريف، أي أننا نبحث عما إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ موجودة أم لا. لدينا :

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

لاحظ أننا استفدنا هنا من الاستلزام التالي (مثلا) الذي يؤدي إلى النهاية المحصل عليها :

$$0 \le \lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le \lim_{x\to 0}|x| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0\,.$$

خلاصة القول إن التابع المعتبر يقبل الاشتقاق في كل مكان ... وقد حسبنا مشتقه عند كل نقطة $x\in\mathbb{R}$.

نظرية (مشتق معكوس تابع)

ليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابع متباينا ومستمرا على مجال مفتوح I.
نفرض أن f تقبل الاشتقاق عند x_0. عندئذ يقبل التابع العكسي $f^{-1} : f(I) \to I$ الاشتقاق عند $y_0 = f(x_0)$ إذا وفقط إذا كان $f'(x_0) \neq 0$، ولدينا : $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

أمثلة

1) الدالة $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ المعرفة بـــ $f(x) = \sin x$ متباينة وقابلة للاشتقاق، ولذلك فالدالة المسماة قوس الجيب arcsin والمعرفة بـــ

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$\arcsin x = f^{-1}(x)$ قابلة للاشتقاق عند أية نقطة من المجال $]-1,1[$ ... ومشتقها هو :

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{f'(\arcsin x)}\\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

لاحظ أن قوس الجيب دالة لا تقبل الاشتقاق عند طرفي المجال 1 و -1 لأن الشرط اللازم والكافي $f'(x_0) \neq 0$ غير محقق عند 1 و -1 إذ أن $f'(1) = f'(-1) = 0$.

2) تطرّقنا إلى الدالة المعرفة بـــ $f(x)=x^n$ من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ و $n\in\mathbb{N}^*$، ونحن نعلم أن $f'(x)=nx^{n-1}$. نريد تعميم هذه القاعدة إلى الحالة التي لا ينتمي فيها n إلى $\mathbb{N}$.

من أجـــل ذلك نعـــرّف الدالة $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بـــ $g(x)=x^n$ عنـــدما يكون n فرديا. أما إن كـــان n زوجـــيا فنضع $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ حيث $h(x)=x^n$.

نعلم أن كـــلا من الدالـــتين g و h تقابـــل وأن $g^{-1}(x)=x^{\frac{1}{n}}$، وكذلك $h^{-1}(x)=x^{\frac{1}{n}}$، وأن مشتق كل منهما غير منعدم إذا استثنينا 0. ولذلك فالدالة العكسية لكل منهما تقبل الاشتقاق في مجال تعريفها باستثناء 0. ولدينا :

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) &= \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} \\ &= \frac{x^{\frac{1-n}{n}}}{n}. \end{aligned}$$

يمكن أن نكتب نتيجة مماثلة خاصة بالدالة h :

$$\begin{aligned} h^{-1}(x) &= \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} \\ &= \frac{x^{\frac{1-n}{n}}}{n}. \end{aligned}$$

وهكذا نكون قد وضحنا أن مشتق الدالة المعرفة بـــ $u(x)=x^{\alpha}$ يحسب عموما وفق القاعدة $u'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$. يمكن أن نواصل الاستدلال وإثبات أن الدالة $u:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ المعرفة بـــ $u(x)=x^{\alpha}$ تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها، وهذا مهما كان الأس $\alpha>0$، ولدينا : $u'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$. ونحصل على ذلك باستعمال كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$.

ننهي هذا المقطع بتقديم الجدولين التلخيصيين التاليين :

الجدول 1 : **من قواعد الاشتقاق**

f	f'
au (a ثابت)	au'
$u+v$	$u'+v'$
$u.v$	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^n	$nu^{n-1}u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$
$g(u)$	$u'g'(u)$

الجدول 2 : من المشتقات الشهيرة

$f(x)$	$f'(x)$
a (a ثابت)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

3. التحدب

من الخواص المهمة التي نصادفها في الدوال هي تلك المرتبطة بمفهوم التحدب وعلاقته بالاشتقاق. والهدف من هذا المقطع هو التطرق بإيجاز إلى بعض هذه النتائج.

تعريف (التحدب)

نقول عن دالة $f : I \to \mathbb{R}$ إنها محدبة (مقعرة، على التوالي) إذا تحققت الخاصية التالية:

من أجل كل نقطتين $M_1(x_1, f(x_1))$ و $M_2(x_2, f(x_2))$ من بيان f فإن كل نقطة $M(x, f(x))$ من البيان تقع تحت (فوق، على التوالي) القطعة المستقيمة $[M_1M_2]$ من أجل كل x ينتمي إلى المجال $[x_1, x_2]$.

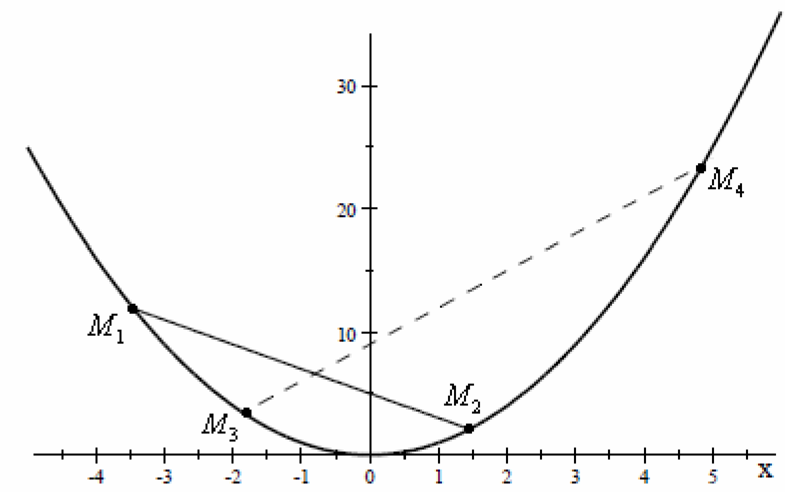
تعقيب

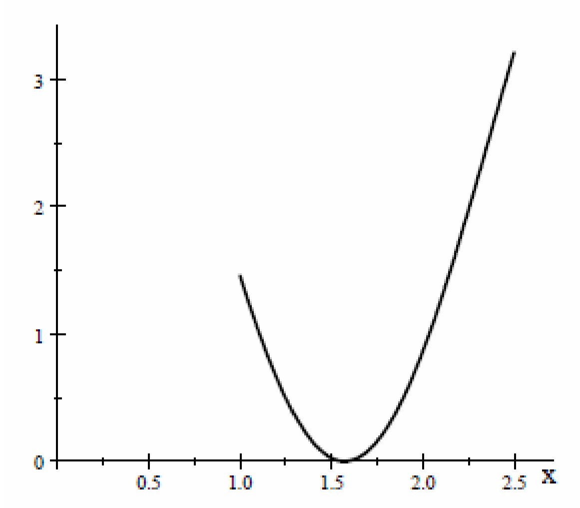
القول بأن الدالة f مقعرة يكافئ القول بأن $-f$ محدبة.

مثال

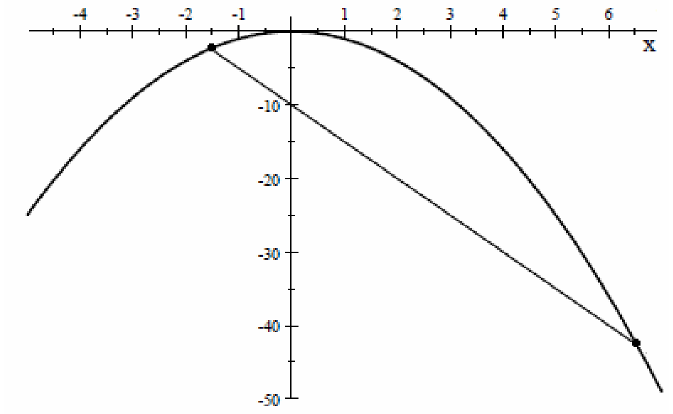
هذان بيانان لدالتين محدبتين. الأولى محدبة مثلا على المجال $[-4,5]$.

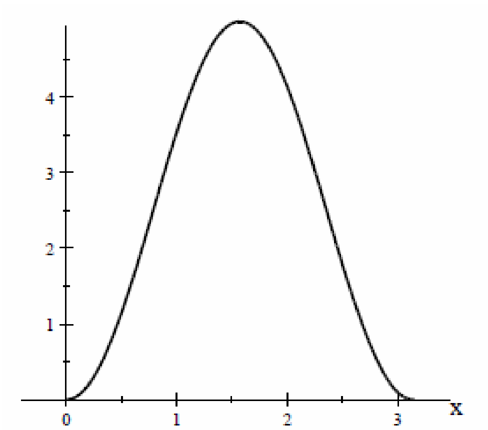
لاحظ بصفة خاصة وضعية $[M_1M_2]$ و $[M_3M_4]$.





وهذان بيانان لدالتين مقعرتين :





نظرية (شرط التحدب)

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ تابعا حقيقيا حيث I مجال. يكون f محدبا إذا :

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0,1] : f\left(tx_1 + (1-t)x_2\right) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) .$$

يمكن أيضا إثبات النتيجة التالية الخاصة بالدوال المحدبة والمستمرة :

نظرية (الاستمرار والتحدّب)

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية مستمرة على المجال I.
تكون f محدبة على I إذا وفقط إذا تحققت العلاقة :
$\forall x, y \in I: \quad f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right).$

أما النتيجة التالية فتربط بين التحدب والاستمرار والاشتقاق من اليمين ومن اليسار :

نظرية (التحدّب والاشتقاق من اليمين ومن اليسار)

إذا كانت دالة $f: I \to \mathbb{R}$ محدبة على مجال متراص فإنها مستمرة وتقبل عند كل نقطة مشتقا من اليمين ومشتقا من اليسار.

وهذه النظرية تقدم شرطا كافيا ولازما للتحدب بالاستناد إلى الاشتقاق.

نظرية (التحدب والاشتقاق والرتابة)

لتكن $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق. حتى تكون f محدبة يلزم ويكفي أن تكون الدالة المشتقة f' متزايدة.

تعقيب

إن كانت الدالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال وكانت مشتقتها الثانية دالة موجبة فإن الدالة محدبة. ذلك أن إيجابية f'' تؤدي إلى تزايد الدالة المشتقة f'. وفي هذه الحالة يأتي تحدب f من النظرية السابقة.

****

الفصل الخـــامس

نظرية التزايدات المنتهية

ودستور تايلور

العناوين

1. مقدمة

2. القيم القصوى

3. نظرية رول Rolle

4. نظرية التزايدات المنتهية

5. تطبيقات أولى لنظرية التزايدات المنتهية

6. تعميم نظرية التزايدات المنتهية (حالة الدوال العددية)

7. قاعدة لوبيتال L'Hôpital

8. تطبيقات حسابية

9. دستور تايلور

1. مقدمة

تعتبر نظرية التزايدات المنتهية (التي تسمى أيضا نظرية المتوسط) من أهم النظريات في التحليل الرياضي. فبالإضافة إلى كونها مهمة في حد ذاتها، كنتيجة رياضية، فإنها تسمح بالبرهان على العديد من النظريات الأساسية في التحليل. ومن تلك النظريات نذكر :

– نظرية شفارتز Schwarz : التي تضمن شروطها – عندما يتعلق الأمر بدالة متعددة المتغيرات قابلة للاشتقاق (أي المفاضلة) مرتين أو أكثر – بأن الدالة المحصل عليها بعد الاشتقاق مرتين أو أكثر هي نفس الدالة مهما كان ترتيب عمليات الاشتقاق التي نجريها بالنسبة للمتغيرات المعتبرة. وهي نتيجة من شأنها أن تسهل الكثير من الحسابات التي يقوم بها الرياضيون، منها الحسابات المتعلقة بدستور تايلور Taylor.

– نظرية الدوال الضمنية : التي تؤكد شروطها – إذا ما أعطيت لنا علاقة (مساواة) تربط متغيرين – بأن أحد المتغيرين يكتب كدالة للمتغير الآخر ... حتى وإن كانت هذه النظرية لا تعطي العبارة الصريحة لتلك الدالة (الضمنية).

– نظرية القلب (العكس) المحلي : التي تمكّن من استخدام أدوات تحليلية من أجل إثبات أن اقتصار دالة يمثل تقابلا عندما تتوفر شروط معينة، وهي نتيجة هامة تسمح بحل معادلات معقدة. كما تفيد نظرية التزايدات المنتهية في إيجاد قيم تقريبية كالجذور ونحوها.

نتناول فيما يلي هذه النظرية وملحقاتها، مثل نظرية رول Rolle والقيم القصوى، وقاعدة لوبيتال L'Hôpital ، ودستور تايلور. ومن المعلوم أن نظرية التزايدات المنتهية لها تعميمات تمس فضاءات مجردة غير عددية، لكننا سوف لن نتعرض إلى هذا النوع من التوسيع لأنه يتجاوز إطار هذا الفصل.

2. القيم القصوى

قبل تقديم نص نظرية رول Rolle يستحسن تعريف القيم القصوى.

تعريف (القيم القصوى)

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة ومستمرة على المجال مفتوح I.

1) نقول إن للدالة f قيمة عظمى محلية عند نقطة $c \in I$ إذا وجد جوار $J \subset I$ للنقطة c بحيث :

$$\forall x \in J, \quad f(x) \leq f(c).$$

وتسمى في هذه الحالة $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f.

2) نقول إن للدالة f قيمة صغرى محلية عند نقطة $c \in I$ إذا وجد جوار $J' \subset I$ للنقطة c بحيث :

$$\forall x \in J', \quad f(x) \geq f(c).$$

وتسمى في هذه الحالة $f(c)$ قيمة صغرى محلية للدالة f.

3) نقول إن للدالة f قيمة قصوى عند نقطة $c \in I$ إذا كانت $f(c)$ قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية.

4) نتحدث عن القيمة العظمى المطلقة إذا كان :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(c).$$

وعن القيمة الصغرى المطلقة إذا كان :

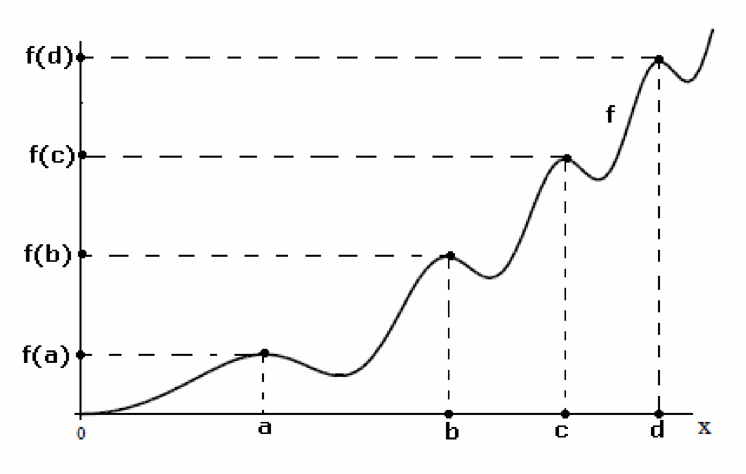
$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(c).$$

وعن القيمة القصوى المطلقة عند وجود قيم عظمى أو صغرى مطلقة.

تعقيب

لاحظ أن كل قيمة قصوى مطلقة هي بالضرورة قيمة قصوى محلية، لكن العكس غير صحيح.

إليك هذا الشكل الذي تظهر فيه قيم عظمى محلية عديدة ومختلفة (هي $f(a)$ ، $f(b)$ ، $f(c)$ ، $f(d)$)، كما أن له قيما صغرى من نفس القبيل :



أوجد مثالا مضادا آخر.

أمثلة

1) الدالة الثابتة المساوية لـــ 2 عند كل نقطة من المجال $I =]0,4[$ تدرك قيمة صغرى محلية وقيمة عظمى محلية عند كل نقطة من I.

2) الدالة f المعرفة بـــ $f(x) = x$ على المجال $]0,1[$ لا تقبل قيمة قصوى محلية.

3) الدالة f المعرفة بـــ $f(x)=\sin x$ على $]0,\pi[$ تقبل قيمة عظمى محلية عند $x=\frac{\pi}{2}$، ولا تقبل قيمة صغرى محلية.

4) الدالة f المعرفة بـــ $f(x)=\sin x$ على $\mathbb{R}$ تقبل قيمة صغرى محلية عند عدد غير منته من النقاط، كما تقبل قيمة عظمى محلية عند عدد غير منته من النقاط أيضا.

نظرية (شرط لازم لوجود قيمة قصوى)

> لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال المفتوح I.
> إذا قبلت f قيمة قصوى عند $c\in I$ وكانت قابلة للاشتقاق عند c فإن $f'(c)=0$.

تعريف (النقطة الحرجة)

> لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I.
> تسمى كل نقطة $c\in I$ تحقق $f'(c)=0$ نقطة حرجة.

تعقيب

يتّضح من هذا التعريف ومن النظرية السابقة أن كل نقطة $c\in I$ تدرك فيها الدالة $f:I\to\mathbb{R}$ قيمة قصوى محلية هي نقطة حرجة. وبالموازاة مع ذلك ينبغي أن نلاحظ أنه إذا كانت دالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ معرفة أيضا عند طرفي مجال، وأدركت قيمتها القصوى (المطلقة) عند أحد طرفي المجال، a مثلا، فهذا لا يستلزم أن $f'(a)=0$. مثال ذلك : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مع

$f(x) = x$. نلاحظ أن هذه الدالة تدرك قيمتها العظمى عند b، وقيمتها الصغرى عند a، مع أن $f'(a) = f'(b) = 1 \neq 0$.

ومن جهة أخرى، علينا أن نلاحظ بأن شرط النقطة الحرجة، أي $f'(c) = 0$، لا يضمن وجود قيمة قصوى عند c، بمعنى أن ذلك الشرط هو لازم وغير كاف لوجود قيمة قصوى محلية.

مثال ذلك : $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^3$. خذ $c = 0$ ولاحظ أن $f'(c) = 0$ على الرغم من أن القيمة $f(c) = 0$ لا تمثل قيمة قصوى محلية (إذ أن الدالة سالبة على يسار النقطة c وهي موجبة على يمينها).

3. نظرية رول

دعنا ننتقل الآن إلى نظرية رول. وقبل ذلك نتساءل : من هو رول؟ هو الرياضي الفرنسي ميشال رول Rolle (1652–1719)، الذي كان في البداية ناسخا (أي يخطّ بيده مؤلفات الآخرين نظرا لغياب المطابع). وقد ألف كتابا في الجبر سمّاه "Traité d'algèbre" عام 1690 تطرّق فيه إلى مسألة فصل جذور المعادلات، أي تحديد مجالات منفصلة يشمل كل منها جذرا واحدا من جذور المعادلة. ومن ثمّ جاءت النظرية التي تحمل اسمه في التحليل.

وفي الجبر حاول رول شرح قاعدة "$(+) \times (-) = -$" التي انتقدها ديكارت (1596–1650) سيما أن مفهوم العدد السالب لم يكن آنذاك مقبولا لدى عامة الرياضيين.

هذا ما كان في أوروبا، لكن من يقرأ كتاب الرياضي السَمَوْأل المغربي (524هـ/1130م-570هـ/1175م) "الباهر في الجبر" يكتشف أن الأوربيين لم يطلعوا على أعماله الباهرة في الحساب. لقد ولد السموأل بمدينة فاس المغربية خمسة قرون قبل ميشال رول وزميله ديكارت، وتوفي بمراغة (أذربيجان) وصنف العديد من المؤلفات وتفنن بوجه خاص في موضوع الأعداد السالبة والعمليات عليها.

فالسموأل يقول مثلا ": "إذا نقصنا عددا زائدا من عدد ناقص بقي مجموع العددين ناقصا، وإذا نقصنا عددا ناقصا من ناقص أكثر منه بقي تفاضلهما (أي الفرق بينهما) ناقصا، وإن كان الناقص أقل من المنقوص بقي تفاضلهما زائدا، وإذا نقصنا الناقص من الزائد بقي مجموعهما زائدا". وبخصوص عملية ضرب تلك الأعداد الموجبة والسالبة يقول السموأل إن "ضرب الناقص في الزائد ناقص وفي الناقص زائد". مضيفا بعد تقديم هذه القواعد : "قد أتينا على ما يحتاج إليه من حساب الأعداد المعلومة الصورة وبرهنا على ما ذكره المتقدمون وأوضحنا ما أغفله الأولون ...".

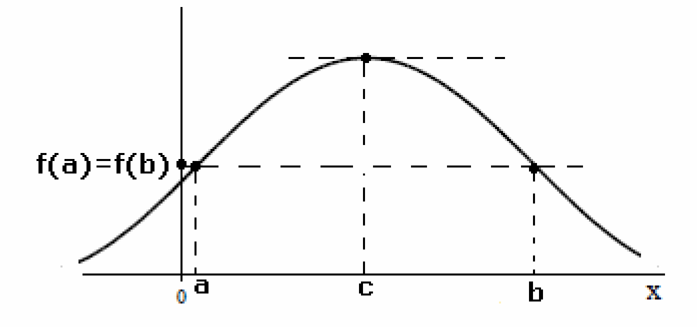
ونجد في كتاب "الباهر في الجبر" وصفا لقانون ثنائي الحد الذي تعيّن معاملاته المثلث المعروف لدى الغرب بمثلث باسكال Pascal (1623-1662)، لكن أمانة السموأل جعلته ينسب هذا المثلث إلى أبي بكر الكرجي (القرن العاشر الميلادي). ومن المعلوم أن نزاهة بعض المؤلفين الغربيين اليوم جعلتهم يذكرون الكرجي ويعترفون بفضله عند الإشارة إلى هذا المثلث.

نظرية (رول)

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال المتراص $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$ وتحقق $f(a)=f(b)$.

عندئذ يوجد عدد c من $]a,b[$ ينعدم عنده المشتق، أي :

$$f'(c)=0 .$$



شكل يوضح نظرية رول

تعقيبات

1) النص الأصلي لنظرية رول كما أورده صاحبه عام 1691 لا يتحدث سوى عن المعادلات الجبرية وجذورها.

2) شروط نظرية رول كافية وغير لازمة. مثال ذلك الدالة f المعرفة بــ $f(x)=x^3$ على المتراص $[-1,1]$: لدينا $f(-1)\neq f(1)$ ورغم ذلك $f'(0)=0$.

3) العدد c في نظرية رول ليس بالضرورة وحيدا. مثال ذلك : الدالة الجيبية المعرفة بـــ $f(x)=\sin x$ في المجال $]0,3\pi[$ هناك ثلاث نقاط ينعدم فيها المشتق.

4) كيف نحصل على النقطة c هندسيا : يكفي أن نرسم المماس لبيان الدالة المعتبرة الموازي لمحور الفواصل. إن فاصلة نقطة التماس هي العدد c المطلوب. يمكن اعتبار هذه الملاحظة تفسيرا هندسيا لنظرية رول.

5) إذا توفرت شروط نظرية رول فإن النقاط المرشحة لتكون نقاطا لقيم قصوى هي تلك النقاط c المشار إليها في النظرية.

مثال

تأمل في تطبيق نظرية رول على الدوال المعرفة كما يلي :

1) $f(x)=x$ في المجال $[0,1]$.

2) $f(x)=|x|$ في المجال $[-1,1]$.

3) $f(x)=\begin{cases}1-x : x\neq 0\\ 0 : x=0\end{cases}$ في المجال $[0,1]$.

يمكن أن نلاحظ، بعد التأمل، بأن هذه الدوال لا تحقق شروط نظرية رول في المجالات المشار إليها ذلك لأن:

– الدالة الأولى لا تحقق الشرط $f(0)=f(1)$.

– الدالة الثانية لا تحقق شرط الاشتقاق إذ أن الدالة لا تقبل الاشتقاق عند 0.

– الدالة الثالثة لا تحقق شرط الاستمرار على المجال $[0,1]$ إذ أنها غير مستمرة عند 0.

ورغم ذلك فنظرية رول توفّر شروطا كافية وليست لازمة لكي توجد نقطة c من $]a,b[$ ينعدم عندها المشتق، أي : $f'(c) = 0$.

يبيّن المثال التالي أن شروط رول ليست لازمة :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x \in]-1,1[\\ 0 & : \quad x = \pm 1 \end{cases}$$

فهذه الدالة ليست مستمرة عند طرفي المجال $[-1,1]$، ورغم ذلك لدينا $f'(0) = 0$.

4. نظرية التزايدات المنتهية

ماذا يحدث لو نسقط الشرط الأخير في نظرية رول القائل إن الدالة تأخذ نفس القيمة عند طرفي مجال تعريفها؟ من المؤكد أننا لن نحصل على نظرية رول ! لكننا نحصل على نظرية أخرى تسمى ... نظرية التزايدات المنتهية.

تنسب نظرية التزايدات المنتهية للرياضي لاغرانج Lagrange (1736–1813). فمن هو صاحب هذه النظرية؟ هو جوزيف لويس

لاغرانج الرياضي الفرنسي الذي ولد بمدينة تورينو الإيطالية، ودرّس الرياضيات بإحدى مدارسها العسكرية وعمره لم يتجاوز 19 سنة.

كان لاغرانج على صلة برياضيين كبار مثل أولر Euler (1707–1783) ودالمبير D'Alembrt (1717–1783). وقد شجعه هذا الأخير في أعماله الرياضية. وأقام ببرلين وترأس بها أكاديمية العلوم بعد أولر. وعاد إثر ذلك إلى باريس تلبية لدعوة الملك لويس السادس عشر ... كما قرّبه نابليون من حاشيته.

له إسهامات في الحساب والجبر (المعادلات الجبرية، سيما المعادلات من الدرجة الرابعة، والحلول التقريبية) والمعادلات التفاضلية العادية والجزئية والتكاملات الناقصية وحساب التغيرات ونظرية الدوال الحقيقية. كما اهتم بالميكانيك وعلم الفلك حيث كان له انشغال خاص بمدار القمر. وقد نال جائزة أكاديمية العلوم عام 1764.

نظرية (التزايدات المنتهية)

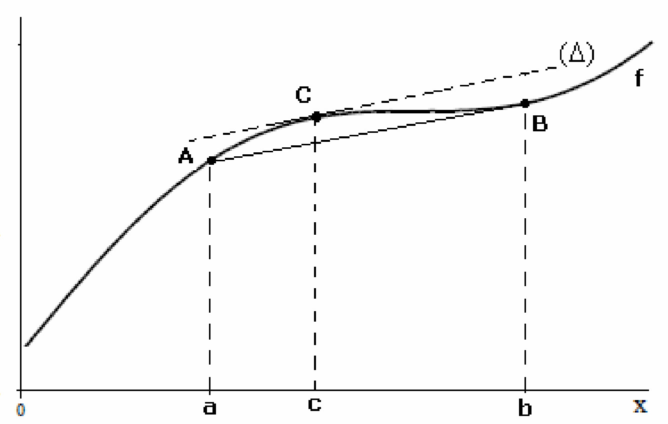
لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال المتراص $[\ddot{a},b]$ وقابلة للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$.

عندئذ يوجد عدد c من $]a,b[$ يحقق العلاقة :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

تعقيب

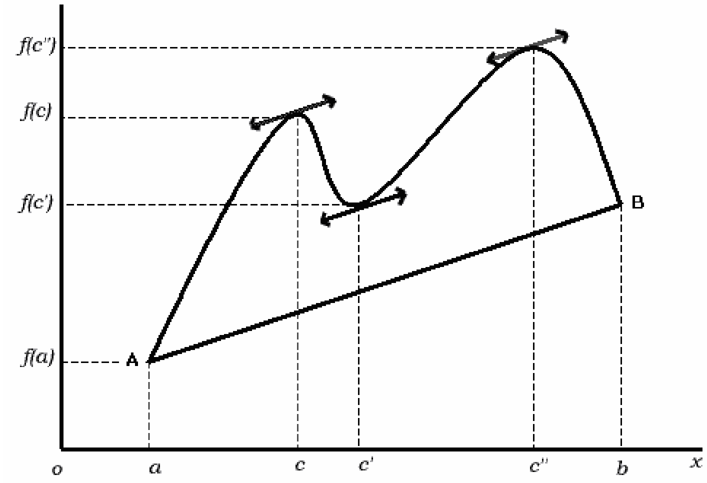
كيف نحصل هندسيا على النقطة c؟ أنظر الشكل :



نصل النقطتين ذات الإحداثيات $A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$. ثم نرسم المستقيم (Δ) المماس لبيان الدالة الموازي للمستقيم (AB). إن فاصلة نقطة تماس C للمستقيم (Δ) مع بيان الدالة هي النقطة c المطلوبة. ذلك أن ميل المستقيم (AB) هو $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. أما ميل المستقيم (Δ) فهو $f'(c)$. وتوازي المستقيمين المذكورين يعطي تساوي الميلين، أي :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) .$$

وهذه هي المساواة الواردة في نظرية التزايدات المنتهية. نلاحظ في الأخير أن النقطة c ليست عموما وحيدة لأنه بالإمكان أن يقبل بيان الدالة المعتبرة عدة مماسات توازي المستقيم (AB). أنظر مثلا البيان التالي :



مثال

يمكن أن نثبت بسهولة من خلال نظرية التزايدات المنتهية أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -x \leq \sin x \leq x .$$

يكفي أن نعتبر عنصرا كيفيا $x \in \mathbb{R}$ ونطبق النظرية على الدالة الجيبية sin في المجال المتراص الذي حداه هما x و 0 :

يوجد c ينتمي إلى هذا المجال بحيث :

$$\sin x - \sin 0 = (x - 0)\cos c .$$

ومنه ينتج (باعتبار أن $\sin 0 = 0$ و $|\cos c| \leq 1$):

$$\begin{aligned} |\sin x| &= |\sin x - \sin 0| \\ &= |(x-0)\cos c| \\ &= |(x-0)||\cos c| \\ &\leq |x|. \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

نعود إلى النظرية السابقة لنلاحظ أننا نستطيع أن نستنتج منها هذا التعميم :

نظرية (تعميم)

ليكن I مجالا كيفيا و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على I.
عندئذ من أجل كل عنصرين x و y من I يوجد عدد c من I (محصور بين x و y) يحقق العلاقة :

$$f(y) - f(x) = (y - x) f'(c) .$$

تعقيب

يمكن كتابة كل عدد c من $[x, y]$ على الشكل $c = tx + (1-t)y$ أو على الشكل $c = (1-t)x + ty$ حيث t عنصر من المجال $[0,1]$. كما يمكن كتابة كل عدد c من $]x, y[$ على الشكل $c = tx + (1-t)y$ أو على الشكل $c = (1-t)x + ty$ حيث t عنصر من المجال $]0,1[$. ذلك أنه يكفي أن نضع $t = \frac{c-y}{x-y}$ للحصول على $c = tx + (1-t)y$ و $t = \frac{c-x}{y-x}$ للحصول على $c = (1-t)x + ty$. وعليه نستطيع مثلا صياغة نظرية التزايدات المنتهية على الشكل التالي :

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال المتراص $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$. عندئذ يوجد عدد c من $]0,1[$ يحقق العلاقة :

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(ta + (1-t)b) .$$

5. تطبيقات أولى لنظرية التزايدات المنتهية

1) عندما تنعدم الدالة المشتقة

> ليكن I مجالا كيفيا و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على I.
> إذا كانت الدالة المشتقة f' منعدمة على I (أي $f'(x) = 0$ من أجل كل x من I) فإن f دالة ثابتة.

تعقيب

سؤال : إذا انعدم مشتق دالة f عند كل نقطة من مجموعة تعريفها فهل هذا يؤدي إلى أن الدالة f ثابتة؟

الجواب : هذا يتوقف على نوع مجموعة تعريف الدالة f.

– إذا كانت مجموعة التعريف مجالا فستكون f ثابتة.

– إذا كانت مجموعة التعريف ليست مجالا فقد تكون النتيجة خاطئة. مثال ذلك نفرض أن مجموعة التعريف هي اتحاد مجالين مفتوحين غير متقاطعين، فإذا عرفنا الدالة f على المجال الأول بأنها تساوي الثابت 1، وعلى المجال الثاني بأنها تساوي 2 فإننا نلاحظ بأن الدالة f ليست ثابتة في مجموعة تعريفها على الرغم من أن الدالة المشتقة منعدمة عند كل نقطة من هذه المجموعة.

نلاحظ أنه حتى نضمن قيام الاستلزام :

(الدالة المشتقة منعدمة)$\Leftarrow$ (الدالة ثابتة)

ينبغي أن تكون مجموعة تعريف الدالة مجموعة مترابطة، أي أنه يمكن ربط كل نقطتين من المجموعة بقوس (في مجموعة الأعداد الحقيقة القوس هو قطعة مستقيمة).

النتيجة التالية تأتي مباشرة مما سبق :

نظرية (المشتق والدوال الأصلية)

ليكن I مجالا مفتوحا و $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ و $g:I\longrightarrow\mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق على I. إذا كان :

$$\forall x\in I,\quad f'(x)=g'(x)$$

فإنه يوجد ثابت حقيقي α بحيث :

$$\forall x\in I,\quad f(x)=g(x)+\alpha .$$

تعقيب

نأخذ في هذه النظرية $g(x)=ax$ حيث a ثابت فنحصل على النتيجة التالية : إذا كانت مشتق $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ ثابتا في مجال تعريفها فإن f دالة تآلفية.

2) الرتابة

ليكن I مجالا كيفيا و $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على I.

إذا كانت دالتها المشتقة f' موجبة على I (أي $f'(x)\geq 0$ من أجل كل x من I) فإن الدالة f متزايدة.

إذا كانت دالتها المشتقة f' سالبة على I (أي $f'(x)\leq 0$ من أجل كل x من I) فإن الدالة f متناقصة.

لرؤية ذلك نطبق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة f في المجال $[x,y]\subset I$ فنحصل على عدد c يحقق العلاقة :

$$f(y)-f(x)=(y-x)f'(c)\geq 0$$

لأن $y\geq x$ و $f'(c)\geq 0$. ومنه يأتي تزايد الدالة f . وبالمثل نعالج التناقص.

3) متباينة التزايدات المنتهية

لدينا النتيجة التالية التي تأتي مباشرة من نظرية التزايدات المنتهية :

نظرية (متباينة)

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال المتراص $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$. نفرض وجود ثابتين موجبين m و M بحيث يكون :

$$\forall x\in]a,b[:\quad m\leq f'(x)\leq M\ .$$

عندئذ يكون : $m\leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq M$.

4) عندما لا ينعدم المشتق

لدينا النتيجة التالية الخاصة بحالة عدم انعدام المشتق :

نظرية (المشتق غير منعدم)

نفرض أن f دالة مستمرة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ والمشتق دالة مستمرة. إذا كان :

$$\forall x\in]a,b[: f'(x)\neq 0$$

فإن f دالة رتيبة تماما.

تعقيب

لنوضح أين نستخدم استمرار المشتق نقدم هذا البرهان على النظرية : نلاحظ أولا أن نظرية التزايدات المنتهية تؤدي إلى أن الدالة f متباينة. ذلك أنه من أجل كل نقطتين مختلفتين x و y من $]a,b[$ توجد نقطة c بحيث : $f(x)-f(y)=(x-y)f'(c)\neq 0$ ، وهذا لأن الدالة المشتقة f' لا تنعدم أبدا حسب الفرض.

إذا كانت الدالة المشتقة f' سالبة تماما على كامل المجال $]a,b[$ فإن الدالة f متناقصة تماما، وهو ما تنص عليه النظرية. نفس الملاحظة إن كانت الدالة المشتقة موجبة تماما. لنفرض بالخلف أن هناك نقطة c من $]a,b[$ بحيث $f'(c)>0$ ولتكن d أقرب نقطة من c يكون فيها $f'(d)<0$. نفترض مثلا أن $c<d$. وبالتالي فإن الدالة المشتقة موجبة في المجال $]c,d[$. ومن ثم نستنتج أن f متزايدة في هذا المجال. لكن الشرط $f'(d)<0$ يؤدي (بفضل استمرار المشتق) إلى وجود مجال J مركزه d تكون فيه الدالة المشتقة سالبة. ومن ثمّ فالدالة f متناقصة في هذا المجال. من الواضح أن التقاطع $]c,d[\cap J$ مجال غير خال. وهكذا يتبين أن الدالة f ستكون في آن واحد متناقصة ومتزايدة في المجال $]c,d[\cap J$. بمعنى أن الدالة ثابتة في هذا المجال. وهذا يناقض قولنا في بداية البرهان بأن الدالة متباينة.

نظرية (داربو Darboux)

إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ و $f'(a)\neq f'(b)$، وكان λ عددا محصورا تماما بين $f'(a)$ و $f'(b)$ (أي أن

$f'(a) < \lambda < f'(b)$ أو $(f'(b) < \lambda < f'(a)$ فإنه يوجد $c \in [a,b]$ بحيث $.f'(c) = \lambda$

تعقيب

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة.

- سؤال : هل يمكن تأكيد وجود دالة دالتها المشتقة هي f؟
- الجواب : نظرية داربو تجيب بـــ "لا" عموما.
- مثال مضاد : $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad 1 \geq x > 0 \\ 0 & : \quad -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

خذ مثلا $\lambda = \frac{1}{2}$، وعندئذ سيكون $-1 = f(-1) < \lambda < f(1) = 1$. فلو كان بالإمكان وجود دالة دالتها المشتقة هي f لوجد $c \in [-1,1]$ بحيث $.f(c) = \lambda = \frac{1}{2}$

وهذا خطأ كما هو واضح من تعريف f.

6. تعميم نظرية التزايدات المنتهية

(حالة الدوال العددية)

لتكن $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتين معرفتين ومـــستمرتين على المجال المتراص $[a,b]$ قابلتين للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$. نستنتج من نظرية التزايدات المنتهية أنه يوجد عددان c و d من المجال $]a,b[$ بحيث :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

$$g(b)-g(a)=(b-a)g'(d)\ .$$

وبالتالي : $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(d)}$.

سؤال : ليس من الضرورة أن يكون العـــددان c و d الـــواردان في العلاقة السابقة متساويين. ورغم ذلك نتساءل : هل بالإمكان إيجاد عـــدد α من $]a,b[$ بحيث : $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

عندما يكون المقامان (الواردان في هذه العلاقة) غير منعدمين؟

الجواب : نعم، يمكن ذلك! ... حسب النظرية التالية :

نظرية (التزايدات المنتهية المعممة)

لتكن $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ و $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ دالتين معرفتين ومستمرتين على المجال المتراص $[a,b]$ وقابلتين للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$. نفرض أن الدالة المشتقة g' لا تنعدم على $]a,b[$. عندئذ يوجد عدد α من المجال $]a,b[$ بحيث : $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$.

تعقيب

هل يمكن مواصلة تعميم نظرية المتوسط باعتبار مجموعـــة الوصـــول للدالة المعتبرة تختلف عن مجموعة الأعداد الحقيقية؟ نعم لكن الأمـــر لـــيس سهلا. تأمل في المثال التالي (السابق لأوانه لأنه يعتبر دالة ذات متغيرين) :

نعتبر الدالة : $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ المعرّف بـــ $f(x)=(\cos x,\sin x)$.

لاحظ أن الدالة f تحقق شروط الاستمرار والاشتقاق التي تتطلبها نظرية

التزايدات المنتهية. لنفرض أن هذه النظرية قابلة للتطبيق حتى إن كانت مجموعة الوصول تختلف عن $\mathbb{R}$. عندئذ يوجد عدد حقيقي c من $[0,\pi]$ بحيث : $f(\pi)-f(0)=(\pi-0)f'(c)$ ، أي :

$$(-1,0)-(1,0)=\pi(-\sin c,\cos c)$$

وبالتالي : $(-2,0)=(-\pi\sin c,\pi\cos c)$

ومن ثمّ :

$$\begin{cases} -2=-\pi\sin c, \\ 0=\pi\cos c. \end{cases}$$

وهذا مستحيل لأنه يؤدي مثلا إلى التناقض التالي (بتربيع أطراف المساواتين السابقتين وجمعهما) : $\pi^2=4$. لاحظ رغم ذلك أن المتباينة $4\le\pi^2$ صحيحة. وهكذا يتضح أنه لا يمكن عموما الحفاظ على صيغة نظرية التزايدات المنتهية على شكل مساواة، كما هي خلال التعميم. سيتبيّن أننا سنفقد في الحالة العامة المساواة، ولذا سنستبدلها بمتباينة.

7. قاعدة لوبيتال

من بين النتائج المهمة التي نستطيع استخلاصها من نظرية التزايدات المنتهية المعممة النظرية التالية التي تسهل حساب النهايات، وهي تعرف بـ "قاعدة لوبيتال L'Hôpital (1661–1704). من هو لوبيتال؟ هو غيوم دي لوبيتال الرياضي الفرنسي الذي تتلمذ على يدي الرياضي الشهير جوهان برنولي Bernoulli (1667–1748). وقد نشر باتفاق مع أستاذه

عام 1696 كتابا حول الحساب التفاضلي. ويذكر أن لوبيتال هو أول من استعمل مصطلح intégrale (تكامل) في اللغة الفرنسية حيث ورد ذكره في هذا الكتاب. والمصطلح أصله لاتيني integralis، واستخدمه برنولي في كتاباته. إليك قاعدة لوبيتال : نعلم أنه إذا كانت للدالتين f و g نهايتان $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ و $\lim_{x\to a} f(x)=\beta\neq 0$ فإن :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

ونحن لا نستطيع كتابة ذلك إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=\beta=0$ لأن هناك احتمالين :

– الاحتمال 1 : $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha\neq 0$. عندئذ النهاية $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة في $\mathbb{R}$.

– الاحتمال 2 : $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha=0$. عندئذ النهاية $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ قد تكون موجودة ... وقد لا تكون.

مثال ذلك $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ مع أن $\lim_{x\to a}\sin x=0$ و $\lim_{x\to a} x=0$.

وهذا مثال آخر : النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$ غير موجودة لأن :

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{|\sin x|}{x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{|\sin x|}{x}=-1،$$

ومنه نلاحظ أن النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين، وهو ما يثبت عدم وجود النهاية.

تفيدنا قاعدة لوبيتال في حال الاحتمال 2، أي عندما نريد حساب النهاية $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ مع $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$.

نظرية (قاعدة لوبيتال L'Hôpital)

لتكن $f:]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ و $g:]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $]a,b[$. وليكن α عنصرا من $]a,b[$.

نفرض أن النهاية $\lim\limits_{x\longrightarrow\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة.

عندئذ تكون النهاية

$$\lim_{x\longrightarrow\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$$

موجودة ولدينا :

$$\lim_{x\longrightarrow\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\lim_{x\longrightarrow\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

تعقيب

1) حالة خاصة من قاعدة لوبيتال: عندما يكون $f(\alpha)=g(\alpha)=0$.
عندئذ تنص نتيجة قاعدة لوبيتال على وجـــود $\lim\limits_{x\longrightarrow\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$ وعلـــى أن $\lim\limits_{x\longrightarrow\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\longrightarrow\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2) تظل قاعدة لوبيتال قائمة حتى لو كانت النهايـــة $\lim\limits_{x\longrightarrow\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}}$.

3) إن وجود النهاية $\lim\limits_{x\longrightarrow\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$ لا تلزم عموما وجود النهاية $\lim\limits_{x\longrightarrow\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. للتأكد من ذلك أدرس المثال المضاد التالي : $\alpha=0$، $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ لما $x\neq 0$ و $f(0)=0$ ، $g(x)=\sin x$.

مثال

تطبيق لقاعدة لوبيتال نكتب:

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin' x}{x'}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x}{1}\\ &=\cos 0\\ &=1.\end{aligned}$$

ومنه يأتي مثلا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x-1}{x^2} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x-\cos 0}{x^2-0}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos' x}{(x^2)'}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-\sin x}{2x}=\frac{-1}{2}.\end{aligned}$$

إليك نصين آخرين لقاعدة لوبيتال لهما علاقة باللانهاية :

نظرية (لوبيتال في اللانهاية)

لتكن $f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ و $g:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $]a,+\infty[$ و :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}g(x),$$

$$\forall x \in [a,+\infty[, \quad g'(x) \neq 0.$$

نفرض أن النهاية $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}}$. عندئذ :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

نظرية (لوبيتال من جديد)

لتكن $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ و $g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $]a,b[$ و :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty,$$

$$\forall x \in]a,b[, \quad g'(x) \neq 0.$$

نفرض أن النهاية $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}}$. عندئذ :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

تعقيب

يمكن استبدال a^+ بـــ b^- في النظرية السابقة.

مثال

يمكن تطبيق النظرية السابقة لحساب النهاية $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$ باعتبار $]a,b[=]0,+\infty[$. نجد عندئذ أن :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$$
$$= 0.$$

8. تطبيقات حسابية

لتكن الدالة $f(x)=\sqrt{a^2+x}$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ حيث $0<a$. لنطبق نظرية التزايدات المنتهية في مجال $[0,x]$.

إننا نجد عددا c من المجال $[0,x]$ يحقق المساواة $f(x)=f(0)+xf'(c)$، أي : $\sqrt{a^2+x}=a+\dfrac{x}{2\sqrt{a^2+c}}$.

ومنه نستنتج أن :

$$\sqrt{a^2+x}<a+\frac{x}{2a}.$$

ومن جهة أخرى، نلاحظ أن المتباينة $c<x$ تستلزم :

$$\sqrt{a^2+x}>a+\frac{x}{2\sqrt{a^2+x}}>a+\frac{x}{2(a+\frac{x}{2a})}.$$

نستخلص مما سبق أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+ : \quad a+\frac{ax}{2a^2+x}<\sqrt{a^2+x}<a+\frac{x}{2a}.$$

وبالتالي فإن اعتبار العدد $a+\dfrac{x}{2a}$ قيمة تقريبية يجعلنا نخطئ خطأ لا يتجاوز

$$\left|a+\frac{ax}{2a^2+x}-(a+\frac{x}{2a})\right|$$

أي $\dfrac{x^2}{2a(2a^2+x)}$.

مثال 1

نأخذ $a=100$ و $x=2$ فنحصل على قيمة تقريبية لـــ $\sqrt{102}$:

القيمة التقريبية هي $10.1=10+\dfrac{2}{2\times10}$ بخطأ لا يتجاوز $\dfrac{2^2}{2\times10(2\times100+2)}$.

نلاحظ أن : $\frac{2^2}{2\times 10(2\times 100+2)} = \frac{1}{1010} < \frac{1}{1000} = 0.001$

وأن $\sqrt{102} = 10.09950493836...$، وأن الفرق بين القيمة التقريبية والقيمة الدقيقة لا يتجاوز في الواقع 0.00049507.

مثال 2

نأخذ $a = 100$ و $x = 20$ فنحصل على قيمة تقريبية لـــ $\sqrt{10020}$ وهي 100.1 بخطأ لا يتجاوز 0.0001.

إننا نستفيد عموما من نظرية التزايدات المنتهية في التقريب الحسابي بالطريقة التالية : إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ وكان :

$$\exists M > 0 : \sup_{a<x<b} |f'(x)| \le M$$

فإن نظرية التزايدات المنتهية المطبقة عند النقطتين x و $x+h$ المنتميتين إلى المجال $[a,b]$ تؤدي إلى العلاقة :

$$|f(x+h) - f(x)| \le |h| \sup_{a<x<b} |f'(x)| \le M|h| .$$

وهذا يعني أن تقريب $f(x)$ بـــ $f(x+h)$ أو العكس يجعلنا نرتكب خطأ لا يتجاوز $M|h|$.

مثال 3

بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة sin نحصل مباشرة على العلاقة :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |\sin x - \sin y| \le |x - y| .$$

9. دستور تايلور

دعنا نبدأ بتقديم تعريف المشتقات من الرتب العليا التي من الواجب الإلمام بها سواء لاستيعاب هذا الدرس أو دروس أخرى موالية.

تعريف (المشتقات من الرتب العليا)

لتكن $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$.

1) نقول عن f إنها تقبل الاشتقاق مرتين عند نقطة $x_0\in]a,b[$ إذا قبلت الدالة المشتقة f' الاشتقاق عند النقطة $x_0\in]a,b[$، أي إذا كانت النهاية التالية موجودة :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

2) تسمى هذه النهاية عند وجودها المشتق الثاني لـــ f عند $x_0\in]a,b[$، ونرمز له بـــ $f''(x_0)$. إذا كانت $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ تقبل الاشتقاق مرتين عند كل نقطة من $]a,b[$ أصبحت الدالة $f'':]a,b[\to\mathbb{R}$ معرفة، وهو ما يمكّننا من تعريف المشتق الثالث عند $x_0\in]a,b[$ بأنه يساوي النهاية التالية (إن وجدت) :

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}.$$

3) وهكذا دواليك : نعرف المشتق من الرتبة $n\in\mathbb{N}^*$ بالتراجع بوضع :

$$f^{(n+1)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{x-x_0}$$

حيث يرمز $f^{(n)}(x)$ لمشتق f من الرتبة n عند النقطة $x\in]a,b[$.
4) الكتابة $f\in C^n(]a,b[)$ ، من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، تعني أن f يقبل الاشتقاق n مرة على $]a,b[$، وأن الدالة المشتقة $f^{(n)}:]a,b[\to\mathbb{R}$ مستمرة على $]a,b[$. نقول، تعبيرا عن الانتماء $f\in C^n(]a,b[)$، إن f من الصنف C^n على $]a,b[$.
5) الكتابة $f\in C^0(]a,b[)$ تعني أن f مستمر على $]a,b[$، وغالبا ما تكتب $f\in C(]a,b[)$. أما الكتابة $f\in C^\infty(]a,b[)$ فتعني أن المشتق $f^{(n)}$ موجود من أجل كل رتبة $n\in\mathbb{N}$. ويسمى الفضاء $C^\infty(]a,b[)$ فضاء الدوال القابلة للاشتقاق لانهائيا على $]a,b[$.

تعقيب

1) الفضاء $C^n(]a,b[)$ المؤلف من الدوال f القابلة للاشتقاق n مرة على المجال $]a,b[$ بحيث تكون الدوال المشتقة $f^{(n)}:]a,b[\to\mathbb{R}$ من الرتبة n مستمرة يمثل فضاء شعاعيا على $\mathbb{R}$ (وكذلك على $\mathbb{C}$).

2) لدينا الاحتواءات التالية من أجل كل $n\in\mathbb{N}$:

$$C^\infty(]a,b[)\subset C^{n+1}(]a,b[)\subset C^n(]a,b[)\subset C^0(]a,b[).$$

مثال

إليك مثالا لدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مع أن $f\notin C^1(]a,b[)$ (إن f' غير مستمرة عند الصفر ... تأكد من ذلك) :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0. \end{cases}$$

نعلم كيف نشتق جداء تابعين مرة واحدة. لكن كيف نشتق جداءً n مرة؟ النتيجة التالية تقدم لنا الجواب :

نظرية (دستور ليبنيتز Leibniz)

لتكن $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ و $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ دالتين تقبلان الاشتقاق n مرة عند نقطة $x_0 \in]a,b[$. لدينا العلاقة التالية :

$$(f.g)^{(n)}(x_0) = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} f^{(p)}(x_0) g^{(n-p)}(x_0) .$$

مثال

احسب مثلا المشتق $\left(x^9.\cos x\right)^{(7)}$ وستجد :

$$\left(x^9.\cos x\right)^{(7)} = (181440x^2 - 317520x^4 + 17640x^6 - 63x^8)\cos x + (-423360x^3 + 105840x^5 - 1512x^7 + x^9)\sin x.$$

نصل الآن إلى دستور تايلور. من أجل التمهيد إليه نعتبر دالة كثيرة الحدود بمتغير حقيقي :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n .$$

لاحظ أنه من السهل إثبات أن

$$\begin{cases} a_0 = f(0), \\ a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad \forall k = 1,\dots,n. \end{cases}$$

وتعميما لذلك إذا اعتبرنا الدالة :

$$g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

يتبيّن أن :

$$\begin{cases} a_0 = g(x_0), \\ a_k = \dfrac{g^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \forall k = 1,\dots,n. \end{cases}$$

وعليه يمكن استنتاج أن :

$$g(x) = g(x_0) + \dots + \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

ألم تلاحظ أننا استطعنا كتابة عبارة g بدلالة قيم مشتقات g عند x_0 ، $g^{(k)}(x_0)$ بدل المعاملات $(a_k)_{k=0,1,\dots,n}$؟

سؤال : تمكّنا من فعل ذلك من أجل دالة كثيرة حدود. فهل يمكن أن نقوم بشيء مماثل عندما نعتبر دالة ليست كثيرة حدود؟ بمعنى هل يمكن أن نكتب عبارتها على شكل كثير حدود معاملاته تساوي مشتقات الدالة المعطاة عند نقطة معينة؟ ذلك هو السؤال الذي يجيب عنه دستور تايلور الموالي :

نظرية (دستور تايلور Taylor بباقي لاغرانج)

لتكن $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ دالة من الصنف C^n على $]a,b[$ بحيث تقبل $f^{(n)}$ الاشتقاق على $]a,b[$.

عندئذ، من أجل كل نقطة x_0 من $]a,b[$، توجد نقطة c من $]a,b[$ بحيث :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

تسمى هذه العلاقة دستور تايلور.

* هناك من يسميها دستور ماك لوران Mac Laurin في الحالة $x_0 = 0$، أي أن دستور ماك لوران يكتب على الشكل

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

* يمثل $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ في دستور تـــايلور و $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ في دستور ماك لوران باقي لاغرانج ذا الرتبة n.

مثال

خذ الدالة الأسية $f(x) = e^x$. تطبيقا لدستور ماك لوران يتبيّن أنه توجد نقطة c :

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{c}\ .$$

كما أن الدالة $g(x)=\frac{1}{1-x}$ تعطي في المجال $]-1,1[$ دستور ماك لوران على الشكل :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+\ldots+x^{n}+R_{n}(x)\ .$$

حيث يمثل $R_n(x)$ الباقي من الرتبة n.

تعقيب

1) لاحظ أن دستور تايلور يعطي نظرية التزايدات المنتهية من أجل $n=1$.

2) نلاحظ أن شروط النظرية سمحت لنا بكتابة الدالة f على الشكل:

$$f(x)=p_{n}(x)+R_{n}(x)$$

حيث p_n كثير حدود درجته n و $R_n(x)$ باقي لاغرانج عندما يكتب على الشكل :

$$R_{n}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_{0})^{n+1}\ .$$

3) هناك شكل آخر للباقي، يسمى باقي كوشي Cauchy، يأخذ الصيغة التالية :

$$R_{n}(x)=\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-x_{0})(x-u)^{n}$$

حيث u عنصر محصور بين x و x_0. بمعنى أن شروط النظرية السابقة تؤدي إلى وجود عنصر u محصور بين x و x_0 يحقق :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-x_0)(x-u)^n.$$

وحتى نرى ذلك يكفي الرجوع إلى الدالة g المعرفة في برهان النظرية السابقة وأن نطبق عليها نظرية التزايدات المنتهية : نستنتج وجود عدد u من المجال I المحصور بين x و x_0 بحيث :

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(u) .$$

ومن ثمّ يأتي :

$$\frac{0-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$= g'(u)$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n .$$

إذن :

$$g(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-x_0)(x-u)^n$$

علما أن :

$$f(x) - p_n(x) = g(x_0)$$

حسب تعريف الدالة g وكثير الحدود p_n. وبالتعويض تأتي العلاقة المطلوبة.

4) أجمـــل ما في دســـتور تايلور هو أنه يمكّن من بـــلوغ قيمة تقريبية لدالة في شكل كثـــير حدود. لنـــــوضح ذلك :

عندما نكتب :

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

ويتضح لنا بأنه عندما يكبر n تتناقص قيمة $R_n(x)$ فإنه يجوز القول بأن الفرق بين $f(x)$ و $p_n(x)$ ليس كبيرا، أي أن $f(x)$ تساوي تقريبا كثير الحدود $p_n(x)$ (هناك من يكتب $f(x) \approx p_n(x)$). وعندئذ يمثّل $R_n(x)$ الخطأ المرتكب عند استبدال $f(x)$ بـــ $p_n(x)$.

مثال في التقريب

إذا أردنا تقريب الدالة $f(x) = \sqrt{1+x}$ بكثير حدود من الدرجة الثالثة نختار $n = 3$ و $x_0 = 0$ (أي دستور تايلور) فيكون (من أجل $x \in]-1, +\infty[$)

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 .$$

وعند حساب مشتقات f نحصل على :

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{x^3}{3!} .$$

أما الخطأ (وهو يساوي الباقي) المرتكب في هذا التقريب فهو (حيث c عدد محصور بين 0 و x) :

$$R_3(x) = -\frac{15}{16}\frac{(1+c)^{\frac{-7}{2}}}{4!}x^4 .$$

فعلى سبيل المثال نلاحظ أن الخطأ لا يتجاوز 0.0024 في حال $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

نظرية (دستور تايلور بباقي يونغ Young)

لتكن $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ دالة من الصنف C^n على $]a,b[$ بحيث $f^{(n)}$ تقبل الاشتقاق عند نقطة x_0 من $]a,b[$.

عندئذ، من أجل كل نقطة x من $]a,b[$، فإن :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$
$$+ \circ(x - x_0)^{n+1}$$

حيث يشير "$\circ$" لصفر لوندو Landau الصغير، أي أن :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\circ(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}} = 0 .$$

تعقيب

قدمنا في ما سبق صيغتين لدستور تايلور (بباقي لاغرانج وبباقي يونغ). وهناك أيضا صيغ أخرى لهذا الدستور، منها الدستور بالباقي التكاملي. نلاحظ أن من أكثر دساتير تايلور استخداما دستوره بباقي يونغ.

لنعد إلى القيم القصوى حتى نرى كيف يمكن الاستفادة من النظرية السابقة :

قضية (تايلور والقيم القصوى)

لتكن $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ دالة تقبل الاشتقاق n مرة على $]a,b[$. نفرض أن هناك نقطة $c\in]a,b[$ تحقق :

$$\begin{cases} f'(c)=f''(c)=\ldots=f^{(n-1)}(c)=0 \\ f^{(n)}(c)\neq 0. \end{cases}$$

1) حتى تكون $f(c)$ قيمة قصوى محلية يجب أن يكون n زوجيا.

2) إذا كان n زوجيا فإن :

$f(c)$ قيمة عظمى محلية إذا كانت $f^{(n)}(c)<0$،

$f(c)$ قيمة صغرى محلية إذا كانت $f^{(n)}(c)>0$.

الملاحظ أن الحالة الأكثر تطبيقا في القضية السابقة هي تلك التي يكون فيها $n=2$. صيغة هذه الحالة هي التالية :

حالة خاصة

لتكن $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ دالة تقبل الاشتقاق مرتين على $]a,b[$. نفرض وجود $c\in]a,b[$ تحقق $f'(c)=0$ (أي النقطة c حرجة) و $f''(c)\neq 0$.

1) إذا كان $f''(c)<0$ فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية.

2) إذا كان $f''(c)>0$ فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية.

****

الفصل السادس

النشر المحدود

العناوين

1. مقدمة
2. لامتناهي الصغر، لامتناهي الكبر
3. النشر المحدود
4. كيفية دراسة دالة

1. مقدمة

يعتبر النشر المحدود أداة فعالة في التحليل الرياضي والفيزياء. فهو يهمّ الرياضيين عندما يبحثون عن عبارات بسيطة تقريبية لقيمة دالة معطاة بجوار نقطة. تلك العبارة البسيطة هي كثيرات حدود. بمعنى أننا نبحث عموما عن كثير حدود يكون بجوار نقطة أقرب ما يمكن من قيمة دالة معطاة. فنكتب أن هذه الدالة تساوي كثير حدود إضافة إلى باق نسمح لأنفسنا بإهماله.

بل إن الفيزيائيين لا يتوانون في كتاب المساواة بين دالة وقيمتها التقريبية (كثير حدود) وكأن الباقي منعدم بدل اعتباره مهملا (وليس معدوما).

كما يسمح النشر المحدود عموما بإيجاد النهايات بكل يسر. ومن ثمّ حساب النهايات أحيانا، وتحديد موقع المماسات بالنسبة للمنحنيات. ومن المعلوم أن التعمق في النشر المحدود يؤدي إلى السلاسل : السلاسل الصحيحة وسلاسل فوريي التي ستكون موضوع دراسة في مقررات الموالية.

2. لامتناهي الصغر، لامتناهي الكبر

لنبدأ بتقديم بعض التعاريف دون الغوص في الكثير من التفاصيل.

تعريف (اللامتناهي)

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ و $g: I \to \mathbb{R}$ دالتين حقيقيتين معرفتين على مجال $I \subset \overline{\mathbb{R}}$. ولتكن نقطة x_0 من I.

1) نقول إن g لامتناهية الصغر (أو مهملة) بالنسبة لـــ f (أو أمام f) بجوار النقطة x_0 إذا :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 .$$

نكتب تعبيرا عن ذلك في حالة $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |g(x)| \le \varepsilon |f(x)| .$$

وباستعمال رمز لوندو Landau يمكن كتابة هذا التعريف على الشكل التالي :

$$g(x) = \circ(f(x))$$

أو على الشكل :

$$g = \circ(f) .$$

2) إذا كان $f = 1$، أي إذا كان $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ ، قلنا إن g لامتناهي الصغر عندما يؤول x إلى x_0.

3) إذا كان $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$ ، قلنا إن g لامتناهي الكبر عندما يؤول x إلى x_0.

أمثلة

1) $g(x)=x^2$: $g=\circ(x)$ بجوار 0. وكذا g لامتناهي الكبر بجوار اللانهاية ($+\infty$ أو $-\infty$).

2) $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$: g لامتناهي الصغر بجوار اللانهايـــة ($+\infty$ أو $-\infty$).

3) $g(x)=\ln(x+1)$: g لامتناهي الكـــبر بجـــوار $+\infty$، وهـــو لامتناهي الصغر عندما يؤول x إلى 0.

تعريف (تكافؤ دالتين)

لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ و $g:I\to\mathbb{R}$ دالتين حقيقيتين معرفتين على مجال $I\subset\overline{\mathbb{R}}$. ولتكن نقطة x_0 من I. نقول إن f و g متكافئتان بجوار النقطة x_0 إذا : $$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=1.$$ نكتب تعبيرا عن ذلك : $$g(x)\overset{x\to x_0}{\sim}f(x).$$

تكافؤ بعض التوابع بجوار الصفر

$\arcsin x \overset{x\to 0}{\sim} x$	$\sin x \overset{x\to 0}{\sim} x$
$\arctan x \overset{x\to 0}{\sim} x$	$\tan x \overset{x\to 0}{\sim} x$
$\text{argsh}x \overset{x\to 0}{\sim} x$	$\text{sh}x \overset{x\to 0}{\sim} x$
$\text{argth}x \overset{x\to 0}{\sim} x$	$\text{th}x \overset{x\to 0}{\sim} x$
$e^x - 1 \overset{x\to 0}{\sim} x$	$\ln(x+1) \overset{x\to 0}{\sim} x$
$1-\cos^2 x \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	$\text{argch}(x+1) \overset{x\to 0}{\sim} \sqrt{2x}$
$(1+x)^a \overset{x\to 0}{\sim} 1+ax$	$\text{ch}x - 1 \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

من خواص رمز لوندو ورمز التكافؤ

1. لتكن f و g و h ثلاثة دوال حقيقية. لدينا الخواص التالية :

$$\circ(f) + \circ(f) = \circ(f)$$

$$\circ(f) \times \circ(g) = \circ(f.g)$$

$$\circ\big(\circ(f)\big) = \circ(f)$$

2. عندما تكون g محدودة فإن $g \times \circ(f) = \circ(f)$.

3. علاقة $\sim$ المعرفة آنفا علاقة تكافؤ بمعنى أن :

$$\begin{cases} f \sim f, \\ f \sim g \Rightarrow g \sim f, \\ g \sim f \ \wedge f \sim h \Rightarrow g \sim h, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2, \end{cases} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}, \qquad \begin{cases} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2, \end{cases} \Rightarrow f_1 \times f_2 \sim g_1 \times g_2 .$$

تعقيب

احذر فإن الاستلزام التالي خاطئ :

$$\begin{cases} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2, \end{cases} \Rightarrow f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$$

مثال ذلك : خذ مثلا $f_2 = -f_1$.

3. النشر المحدود

تعريف (النشر المحدود)

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$. ولتكن نقطة x_0 من I.

1) نقول إن f تقبل نشرا محدودا حتى الرتبة n إذا وجد كثير حدود P درجته أصغر من n أو يساويه بحيث

$$\forall x \in I, \quad f(x) = P(x - x_0) + \circ\left((x - x_0)^n\right).$$

2) في حالة $x_0 = +\infty$ (أو $x_0 = -\infty$) فإننا نقول إن دالة f تقبل نشرا محدودا حتى الرتبة n إذا وجد كثير حدود P من الدرجة أصغر من n أو يساويه بحيث نستطيع، من أجل x كبير، كتابة

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + \circ\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

تعقيب

1) النشر وحيد، أي كثير الحدود P إن وجد فهو وحيد.

2) نستطيع عندئذ كتابة النشر بجوار x_0 :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + \circ\left((x-x_0)^n\right)$$

أما بجوار لانهاية فالنشر يكتب :

$$f(x) = a_0 + a_1\frac{1}{x} + a_2\frac{1}{x^2} + ... + a_n\frac{1}{x^n} + \circ\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

3) نقوم في أغلب الأحوال بالبحث عن النشر المحدود بجوار الصفر، ويكفي أن نجري تبديلا للمتغير ونضع $x = x_0 + h$ إذا ما أردنا نشرا بجوار x_0 و $h = \frac{1}{x}$ إذا ما أردنا نشرا بجوار اللانهاية، باعتبار h يؤول إلى الصفر.

نذكّر بنظرية تايلور الواردة في الفصل السابق، وهي تـوفر نـشرا محدودا من الرتبة n لدالة $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ من الصنف C^n علـى $]a,b[$ إذا ما قبلت $f^{(n)}$ الاشتقاق عند نقطة x_0 من $]a,b[$.

نظرية تايلور (باقي يونغ Young)

لتكن $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ دالة من الصنف C^n على $]a,b[$ بحيث $f^{(n)}$ تقبل الاشتقاق عند نقطة x_0 من $]a,b[$.

عندئذ، من أجل كل نقطة x من $]a,b[$، فإن :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \circ(x-x_0)^{n+1}.$$

تعقيب

يمكن أن تقبل دالة نشرا محدودا حتى الرتبة n دون أن تكون قابلة للاشتقاق حتى الرتبة n. ذلك حال مثلا الدالة :

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

التي لا تقبل مشتقا ثانيا عند الصفر، ورغم ذلك فهي تكتب على الشكل (لاحظ أن الدالة 0 كثير حدود) :

$$f(x)=0+\circ(x^2)$$

الذي يمثل نشر الدالة المعطاة من الرتبة الثانية بجوار الصفر.

بعض خواص النشر المحدود

1) مقارنة العلاقتين (النشرين) والمطابقة بينهما :

$$\forall x\in I,\quad f(x)=P(x-x_0)+\circ\left((x-x_0)^n\right)$$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\circ(x-x_0)^n.$$

يبين أن المعاملات $(a_i)_{i=0,\dots,n}$ لكثير الحدود P تكتب على الشكل :

$$\forall i\leq n,\quad \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}=a_i\ .$$

وبذلك نرى كيف يتم نشر دالة في الحالة العامة : يكفي أن نحسب المشتقات المتوالية $f^{(i)}(x_0)$ عند النقطة x_0 حتى الرتبة المطلوبة n، ثمّ نعوض قيمها في العلاقة :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \circ(x - x_0)^n.$$

2) إن المعاملات الفردية في نشر دالة زوجية كلها منعدمة، كما أن المعاملات الزوجية لدالة فردية كلها منعدمة.

3) لتكن f و g دالتين حقيقيتين تقبلان نشرين محدودين بجوار الصفر حتى الرتبة n.

نشر $f+g$ هو مجموع النشرين، أي أن :

$$f(x) = P(x - x_0) + \circ\left((x - x_0)^n\right)$$
$$g(x) = Q(x - x_0) + \circ\left((x - x_0)^n\right)$$

يؤدي إلى :

$$\left(f + g\right)(x) = \left(P + Q\right)(x - x_0) + \circ\left((x - x_0)^n\right)$$

4) قبول دالة لنشر من رتبة n يؤدي إلى قبولها نشرا من أية رتبة أقل من n. معنى ذلك أنه إذا كان $m \le n$ و :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \circ(x - x_0)^n.$$

فإن

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...$$
$$+\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+\circ(x-x_0)^m.$$

5) يمكن الحصول على جداء نشرين محدودين :

لتكن f و g دالتين حقيقيتين تقبلان نشرين محدودين بجوار الصفر حتى الرتبة n.

نشر $f\times g$ هو جداء النشرين، أي أن :

$$f(x)=P(x-x_0)+\circ\left((x-x_0)^n\right)$$
$$g(x)=Q(x-x_0)+\circ\left((x-x_0)^n\right)$$

يؤدي إلى :

$$\left(f.g\right)(x)=R(x-x_0)+\circ\left((x-x_0)^n\right)$$

حيث $R=\left(P.Q\right)_n$ كثير حدود من الدرجة n حدوده هي حدود جداء كثيري الحدود $P.Q$ التي لا تتجاوز درجاتها n.

نوضح ذلك من خلال المثال التالي. نعلم أن :

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)$ و $\cos x=1+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)$.

بتطبيق القاعدة السابقة نحسب جداء النشرين $(1+\frac{x^2}{2})(x-\frac{x^3}{6})$، ونحتفظ فقط بالحدود ذات الأس الأصغر من 3. نجد حينئذ كثير الحدود $1+\frac{x^3}{3}$.

وبالتالي : $\sin x\times\cos x=1+\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)$. لاحظ أنه يمكن التأكد من ذلك بنشر الدالة $\sin x\times\cos x$ نشرا مباشرا حيث أنها تساوي $\frac{1}{2}\sin 2x$.

النشر المحدود بجوار الصفر لبعض الدوال المتداولة

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+\ldots+x^{n}+\circ(x)^{n}.$
$\frac{1}{1+x}=1-x+x^{2}+\ldots+(-1)^{n}x^{n}+\circ(x)^{n}.$
$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\circ(x^{2n+2}).$
$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\circ(x^{2n+1}).$
$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+\circ(x^{n}).$
$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+\circ(x^{n}).$
$\ln(1-x)=-x-\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{3}+\ldots-\frac{x^{n}}{n}+\circ(x^{n}).$
$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\circ(x^{n}).$
$\arcsin x=x+\frac{x^{3}}{6}+\frac{3}{8}\frac{x^{5}}{5}-\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\circ(x^{2n+2}).$
$\tan x=x+\frac{x^{3}}{3}+\frac{2x^{5}}{15}+\frac{17x^{7}}{315}+\circ(x^{8}).$
$\arctan x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\circ(x^{2n+2}).$
$\sinh x=x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\circ(x^{2n+2}).$
$\cosh x=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\circ(x^{2n+1}).$
$\tanh x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{2x^{5}}{15}-\frac{17x^{7}}{315}+\circ(x^{8}).$
$\sinh^{-1}x=x-\frac{x^{3}}{6}+\frac{3}{8}\frac{x^{5}}{5}-\ldots+(-1)^{n}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\circ(x^{2n+2}).$

تعقيب

تأمل في النشرين :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1}).$$

إننا نحصل على نشر دالة جيب التمام باشتقاق دالة الجيب حدا حدا. تلك قاعدة تكاد تكون عامة بين نشر دالة دالتها المشتقة يمكن دوما تطبيقها.

مثال

انشر حتى الرتبة 3 الدالة $f(x) = \sqrt{1+x}$ بجوار الصفر.

يمكن استخدام العلاقة التالية مباشرة باعتبار $n = 3$ و $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n).$$

أو حساب مشتقات f عند 0 حتى الرتبة 3 والتعويض في عبارة النشر فنحصل في كلتي الحالتين على:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \circ(x^3).$$

تعقيب

يسمح النشر المحدود برفع عدم التعيين في العبارات التي نجدها مثلا في دراسة الدوال أو البحث عن النهايات. إليك مثالا توضيحيا في هذا الموضوع :

احسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

يكفي أن نكتب حسب نشر الدالة الجيبية

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x+\circ(x)}{x}\\ &= 1+\lim_{x\to 0}\frac{\circ(x)}{x}\\ &= 1.\end{aligned}$$

4. كيفية دراسة دالة

لما كان هذا الموضوع قد درس في المرحلة الثانوية فسنكتفي هنا بأمرين : التذكير بمخطط دراسة دالة وبموضوع دراسة وضعية مماس عند نقطة بالنسبة لبيان الدالة.

1. مخطط دراسة دالة

أ) تحديد مجموعة التعريف

يوصى بالتأكد من هذه المجموعة حتى إن كانت معطاة، فهذا يساعد على مواصلة الدراسة. وعموما ينبغي التأكد من عدة قضايا،

منها عدم انعدام أي مقام، وإيجابية العبارات الواقعة تحت الجذر أو أمام اللوغاريتم، الخ.

ب) الدورية والزوجية

من المهم التأكد مما إذا كانت الدالة زوجية أو دورية لتبسيط الدراسة حيث نكتفي عندئذ بدراسة الدالة في جزء فقط من مجموعة تعريفها.

جـ) تقاطع البيان مع المحورين

ينبغي البحث عن نقاط تقاطع المحورين مع البيان وتحديد إحداثياتها، علما أن كل الحالات ممكنة : يمكن ألا يكون هناك أي تقاطع، كما يمكن أن يقع تقاطع مع محور دون الآخر، وأخير قد تكون هناك عدة تقاطعات مع نفس المحور.

من الواجب ألا نخلط بين المحورين (محور الفواصل ومحور التراتيب).

د) النهايات

يتوقف وجود النهايات على مجموعة التعريف والدالة، فلا بد من البحث عن هذه النهايات في أطراف المجال أو المجالات التي تتضمنها مجموعة التعريف، علما أن هذه الأطراف تكون أحيانا $+\infty$

أو $-\infty$. إننا نحتاج في كثير من الأحيان إلى النشر المحدود بجوار بعض النقاط.

هـ) الاستمرار والاشتقاق

ينبغي التعرف على مجموعة نقاط مجموعة التعريف التي تكون فيها الدالة مستمرة، وكذا مجموعة نقاط مجموعة التعريف التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق.

ثم يتعيّن حساب المشتق في نقاط المجموعة الأخيرة. والملاحظ أننا نلجأ أحيانا إلى الاستفادة من تعريف المشتق (بدل القواعد والنظريات) لتحديده. بعد ذلك من المفيد تحديد إشارة المشتق ونقاط انعدامه.

لاحظ أنه قد ينعدم المشتق دون تغيير إشارته عند نقطة الاشتقاق. كما يمكن الاستفادة من المشتق الثاني عند اللزوم لتحديد بعض النقاط الخاصة كنقاط الانعطاف، والقيم القصوى، ...

و) جدول التغيرات

الفائدة من جدول التغيرات أنه يحَوْصِل جملة خواص الدالة، فلا تتردد في تضمينه كل معلومة تحتاج إليها أثناء رسم بيان الدالة. وتأمل بعد إقامة الجدول في نتائجه لعلك تكتشف تناقضات تبيّن أنك ارتكبت خطأ في حساب مشتق أو نهاية أو تحديد إشارة...

ز) الخطوط المقاربة

ينبغي تحديد كافة الخطوط المقاربة للبيان. ولا تنس أن هناك الخطوط المقاربة الأفقية والشاقولية والمائلة، علما أن كل الاحتمالات واردة في قضية وجودها : يمكن أن تكون كلها أو بعضها موجودة.

ح) المماسات ووضعية البيان

يستحسن تحديد بعض المماسات في نقاط متميّزة ودراسة وضعيتها بالنسبة للبيان.

ط) رسم البيان

نختار معلما وسلّما مناسبين (إذا لم يُفرضَا علينا) ونرسم البيان في ذلك المعلم معتمدين على جدول التغيرات ونقاط تقاطع المحورين مع البيان، وكذا الخطوط المقاربة التي ينبغي رسمها أيضا (يمكن الاكتفاء برسمها بجوار النقاط المعنية).

ومن المهم أيضا أن نحدد بعض النقاط المتميزة التي يمر بها البيان قبل رسمه، وتحديد المماسات عندها ووضعية البيان بالنسبة لتلك المماسات، وهذا حتى يكون التمثيل أكثر دقة.

2. وضع منحنى بالنسبة للمماسات والخطوط المقاربة

أ) الوضع بالنسبة للماس عند نقطة x_0

نفرض أن لدينا النشر

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\circ(x-x_0)^n.$$

يمكن بسهولة التأكد من الحالات التالية إذا ما تذكرنا أن معادلة المماس عند x_0 تكتب على الشكل

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

هناك حالتان عندما يكون $f^{(n)}(x_0)\neq 0$

أولا : n زوجي : عندئذ يكون المنحنى

- فوق المماس لما $f^{(n)}(x_0)>0$.
- تحت المماس لما $f^{(n)}(x_0)<0$.

ثانيا: n فردي : عندئذ يقطع المماس المنحنى ويكون الوضع على لنحو الذي يوضحه الجدول :

الحالة	$x>x_0$	$x<x_0$
$f^{(n)}(x_0)>0$	المنحنى فوق المماس	المنحنى تحت المماس
$f^{(n)}(x_0)<0$	المنحنى تحت المماس	المنحنى فوق المماس

ب) وضع المنحنى بالنسبة لخط مقارب أفقي

نفرض أن لدينا النشر التالي (حيث a و a_n معاملان) بجوار اللانهاية :

$$f(x) = a + \frac{a_n}{x^n} + \circ\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

هناك حالتان هما :

أولا : n زوجيا : عندئذ يكون المنحنى

– فوق الخط المقارب $y = a$ لما $a_n > 0$.

– تحت الخط المقارب $y = a$ لما $a_n < 0$.

ثانيا : n فرديا : عندئذ يكون الوضع كالتالي :

الحالة	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
$a_n > 0$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = a$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = a$
$a_n < 0$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = a$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = a$

جـ) وضع المنحنى بالنسبة لخط مقارب مائل

نفرض أن لدينا النشر التالي (حيث a و b و a_n معاملات) بجوار اللانهاية :

$$f(x) = ax + b + \frac{a_n}{x^n} + \circ\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

هناك حالتان هما :

أولا : n زوجيا : عندئذ يكون المنحنى

– فوق الخط المقارب $y = ax + b$ لما $a_n > 0$.

- تحت الخط المقارب $y = ax + b$ لما $a_n < 0$.

ثانيا : n فرديا : عندئذ يكون الوضع كالتالي :

الحالة	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
$a_n > 0$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = ax + b$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = ax + b$
$a_n < 0$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = ax + b$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = ax + b$

****

الفصل السابع

الدوال المألوفة

العناوين

1. مقدمة
2. الدالة الأسيّة
3. الدالة اللوغاريتمية
4. دوال أسية ولوغاريتمية أخرى
5. دوال القوى
6. الدوال المثلثية
7. الدوال المثلثية العكسية
8. الدوال الزائدية
9. الدوال الزائدية العكسية

1. مقدمة

نهتم هنا بالدوال المألوفة، منها ما عرف منذ المرحلة المتوسطة كالدوال المثلثية (الجيب وجيب التمام والظل وظل التمام)، ومنها ما عرف في المرحلة الثانوية كدوال القوى (بأس صحيح) والدوال الأسّية واللوغاريتمية. كما أن هناك دوال لم يسبق التعرض إليها من ذي قبل مثل دوال القوى ذات الأس الحقيقي والدوال العكسية للدوال المثلثية والدوال الزائدية ودوالها العكسية.

ومن المعلوم أن هناك عدة أساليب لتقديم هذه الدوال، ويمكن أن نبدأ باستعراض إحداها والتعرف على خواصها، ثم نستخلص الأخرى منها. وعلى سبيل المثال فإنه بمقدورنا البدء بتعريف الدالة اللوغاريتمية ثم استنتاج الدالة الأسّية منها بوصفها دالتها العكسية. كما يمكن القيام بالعملية العكسية : تقديم الدالة الأسّية، ثمّ الدالة اللوغاريتمية بوصفها الدالة العكسية لها.

وقد فضلنا الطريقة التالية في استعراض هذه الدوال لأن تسلسلها المنطقي أكثر متانة من حيث البناء الرياضي، وهي تعتمد على الدالة الأسّية التي تمّ إنشاؤها في الفصل الثاني (الجزء الأول) بواسطة المتتاليات :

- نعرّف الدالة الأسّية من خلال المتتاليات وخواصها (انظر الفصل 2، الجزء 1).
- نعرّف الدالة اللوغاريتمية بوصفها الدالة العكسية للدالة الأسّية.
- نعرّف دالة القوى كتركيب للدالتين الأسّية واللوغاريتمية.

- نعرّف الدوال المثلثية من خلال المتتاليات، ومن ثمّ دوالها العكسية، وكل ذلك انطلاقا من الدالة الأسيّة.
- نعرّف الدوالة الزائدية باستخدام الدالة الأسيّة، ومن ثمّ دوالها العكسية.

وقد حاولنا في كل مرة التعرّف بقدر الإمكان على هذه الدوال من خلال بياناتها ملاحظين أن هناك خواص كثيرة أخرى لا يسع المكان بذكرها.

2. الدالة الأسّية

نقدم هنا تعريفا للدالة الأسّية مبنيًا على المتتاليات التي سبق أن درسناها في الفصل الثاني (الجزء الأول). وبعد ذلك سننتقل إلى تعريف الدالة اللوغاريتيمة، علما أن العمل بالطريقة المعاكسة أيضا جائز حيث نستطيع البدء بتعريف الدالة اللوغاريتمية (باستخدام مثلا مفهوم المساحة أو الدالة الأصلية) ثم الانتقال إلى الدالة الأسّية. ونحن هنا نفضل الطريقة الأولى لأنها تستخدم مفهوم المتتاليات بدل مفاهيم أخرى، كالتكامل، الذي لم يُدرَس بعد. وقد لاحظ القارئ (في الفصل الثاني) صعوبة التدرّج بين خواص الدالة الأسّية لنقص الأدوات التي تيسّر لنا ذلك.

نذكّر بالنتيجة التالية التي تؤدي إلى تعريف الدالة الأسّية.

نظرية–تعريف (الدالة الأسّية)

ليكن $x \in \mathbb{R}^+$ مثبتا. إن المتتالية $(v_n(x))$ المعرفة بـــ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$$

متقاربة.

نعرّف الدالة الأسّية :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$$

بـــ :

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n .$$

تعقيب

1) يمكن إثبات أن النهاية $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{ix}{n})^n$ موجودة عندما يكون x حقيقيا وذلك بكتابة المتتالية العقدية $(1+\frac{ix}{n})^n$ (مرورا بقانون ثنائي الحد) على شكل مجموع متتاليتين a_n+ib_n حيث (a_n) و (b_n) متتاليتان حقيقيتان متقاربتان. ثم نرمز (كما هو متوقّع) لهذه النهاية بـــ : $e^{ix}=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{ix}{n})^n$.

2) نثبت أن النهاية $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x+iy}{n})^n$ موجودة بكتابة ما يلي :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{iy}{n}\right)\right]^n$$

$$=\left(1+\frac{x+iy}{n}+\frac{ixy}{n^2}\right)^n$$

$$=\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n+\sum_{p=1}^{n}C_n^p\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^{n-p}\left(\frac{ixy}{n}\right)^p\frac{1}{n^p}.$$

وبالتالي :

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n\right|\le\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}C_n^p\left|1+\frac{x+iy}{n}\right|^{n-p}\left|\frac{xy}{n}\right|^p$$

$$\le\frac{1}{n}\left(1+\frac{|x+iy|+|xy|}{n}\right)^n$$

علما أن المتتالية $\left(1+\frac{|x+iy|+|xy|}{n}\right)^n$ محدودة.

ومنه فالمتتالية $\frac{1}{n}\left(1+\frac{|x+iy|+|xy|}{n}\right)^n$ تؤول إلى الصفر. إذن المتتالية

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n$$

متقاربة نحو الصفر، ونحن نعلم أن المتتاليتين : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ و $\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n$ متقاربتان أيضا (نحو e^x و e^{iy} على التوالي). وبالتالي فإن المتتالية $\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n$ متقاربة، ولدينا :

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n-\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n\\
&= e^x.e^{iy}-\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n .
\end{aligned}$$

ومن ثمّ يأتي :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n=e^x.e^{iy} .$$

نرمز لهذه النهاية بـــ :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n=e^{x+iy} .$$

وهكذا نحصل على العلاقة $e^{x+iy}=e^xe^{iy}$.

يمكن تعميم النتائج السابقة كالتالي :

نظرية (مجموع أسّين)

لدينا العلاقة التالية، حيث يشير $\mathbb{C}$ إلى مجموعة الأعداد المركبة :

$$\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C},\qquad e^{z_1+z_2}=e^{z_2}\times e^{z_2}.$$

تعقيب

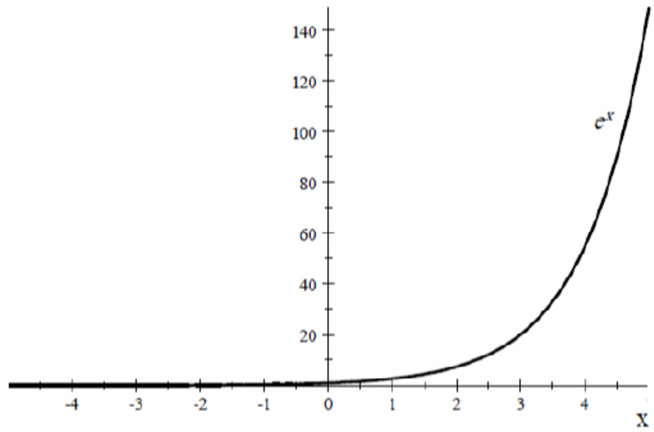
1) نعلم أن $e^x = \lim_n \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. وبالتالي $0 \le e^x$ لأن $0 \le \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ عندما يكون n كبيرا. وإذا تذكّرنا بأن $1 = e^x . e^{-x}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ أدركنا بأن $e^x \ne 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ (نرى ذلك بالخلف). وهكذا تنتج الخاصية:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0.$$

2) الدالة الأسيّة متزايدة على مجموعة الأعداد الحقيقية. يمكن إثبات ذلك من التعريف أو من خلال المشتق حيث أن $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$. وبالتالي فالخاصية السابقة تثبت التزايد. ومن جهة أخرى، لدينا :

$$0 \le \lim_{x\to 0}\left|e^x - 1\right| \le \lim_{x\to 0} xe^x = 0 \,.$$

وعليه : $\lim_{x\to 0} e^x = 1$. كما يمكن إثبات أن $\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim x^m e^x = 0$. أما بيان الدالة الأسيّة فهو كالتالي :



بيان الدالة الأسيّة

3. الدالة اللوغاريتمية

نعلم أن الدالة الأسيّة ذات الأساس النبيري مستمرة ومتزايدة تماما من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_*^+$. ولهذا فهي تقبل دالة عكسية مستمرة ومتزايدة تماما من $\mathbb{R}_*^+$ نحو $\mathbb{R}$.

إليك التعريف التالي :

تعريف (الدالة اللوغاريتيمة)

تسمى الدالة العكسية للدالة الأسيّة الدالة اللوغاريتمية النبيرية. نرمز لهذه الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_*^+$ بـــ $x \mapsto \ln x$. وهناك من يرمز لها بـــ : $x \mapsto \mathrm{Log}x$.

تعقيب

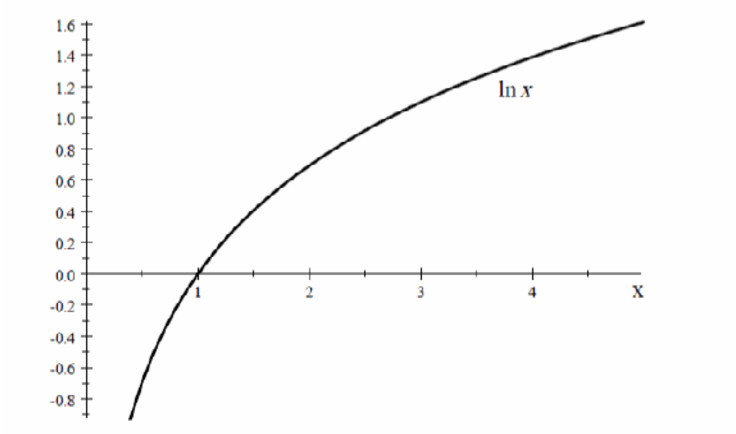
نستخلص من هذا التعريف أن الدالة اللوغاريتمية تقابل من $\mathbb{R}_*^+$ نحو $\mathbb{R}$ وأن مشتقها معطى بـــ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. كما يمكننا تحديد بعض النهايات مثل :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^m}{x} = 0, \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x\,(\ln x)^m = 0. \end{cases}$$

ذلك أن :

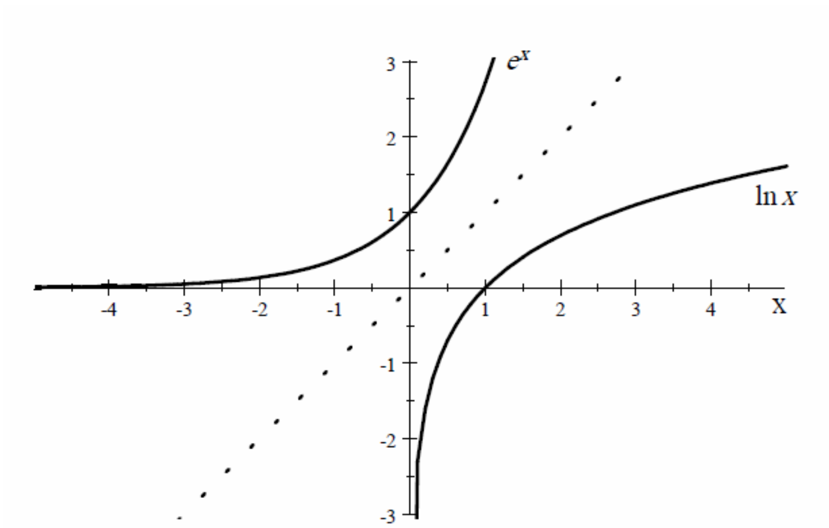
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^m}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{(\ln e^y)^m}{e^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{(y)^m}{e^y} = 0 .$$

وعنــدما نــستبدل x بــــ $\frac{1}{x}$ في $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^m}{x}=0$ فإننــا نحــصل علــى $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\ln x)^m=0$. أما بيانها فهو من الشكل :



بيان الدالة اللوغاريتمية النبيرية

إليك بياني الدالتين الأسّية واللوغاريتمية في نفس المعلم :



بيانا الدالتين الأسّية واللوغاريتمية في نفس المعلم

تعقيب

يمكننا أيضا استنتاج خواص أخرى للدالة اللوغاريتمية انطلاقا من خواص الدالة الأسيّة، ومن بينها :

1) لوغاريتم جداء : $\ln x$

$$\forall x > 0,\ \forall y > 0 \quad : \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

2) لوغاريتم كسر :

$$\forall x > 0, \forall \mathrm{y} > 0 \quad : \quad \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y.$$

3) لوغاريتم 1 : $\ln 1 = 0$.

4. دوال أسية ولوغاريتمية أخرى

الدوال الأسيّة : يمكن استبدال العدد e في الدالة الأسيّة بأي عدد $a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$ واعتبار الدالة $f(x) = a^x$ التي تسمى دالة أسية بالأساس a. وتُعرَّف انطلاقا من الدالتين الأسيّة اللوغاريتم النبيري كالتالي

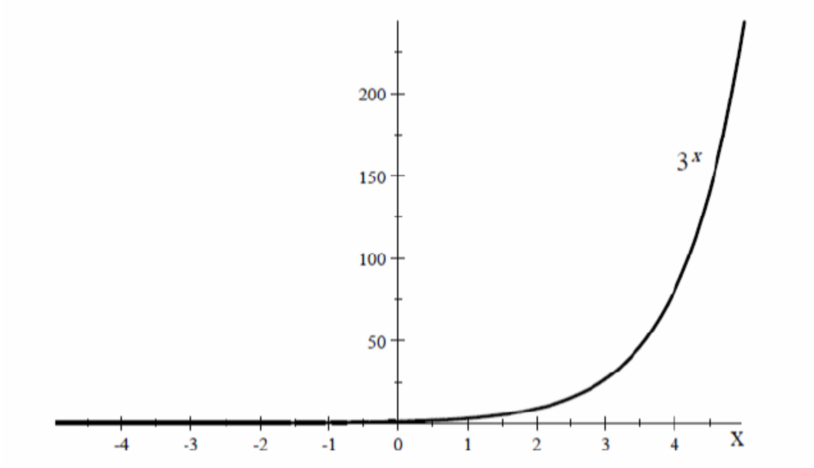
$$a^x = e^{x \ln a}.$$

تُدرَس هذه الدوال بطريقة مشابهة للسابقة، وهي تتمتع بخواص مماثلة. وعلى سبيل المثال فهي تأخذ قيما موجبة ومشتقها هو :

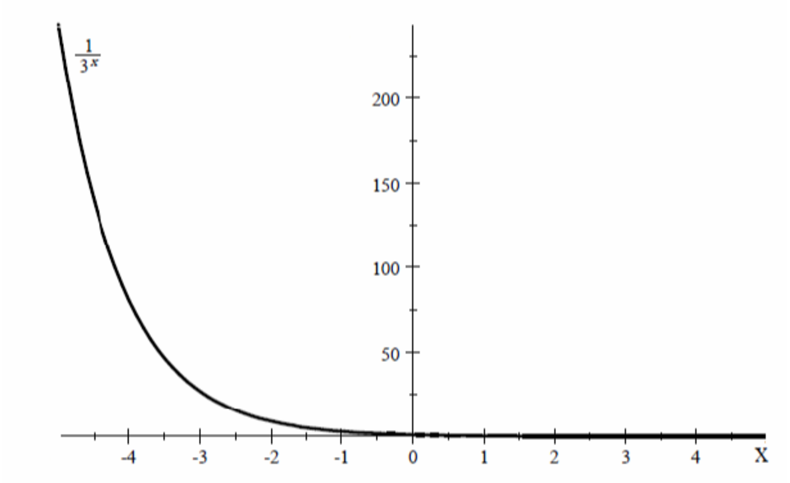
$$\left(a^{x}\right)' = \ln a . e^{x \ln a} = a^{x} \ln a .$$

وبالتالي فهي رتيبة (متزايدة إن كان $a>1$ و $1>a$).

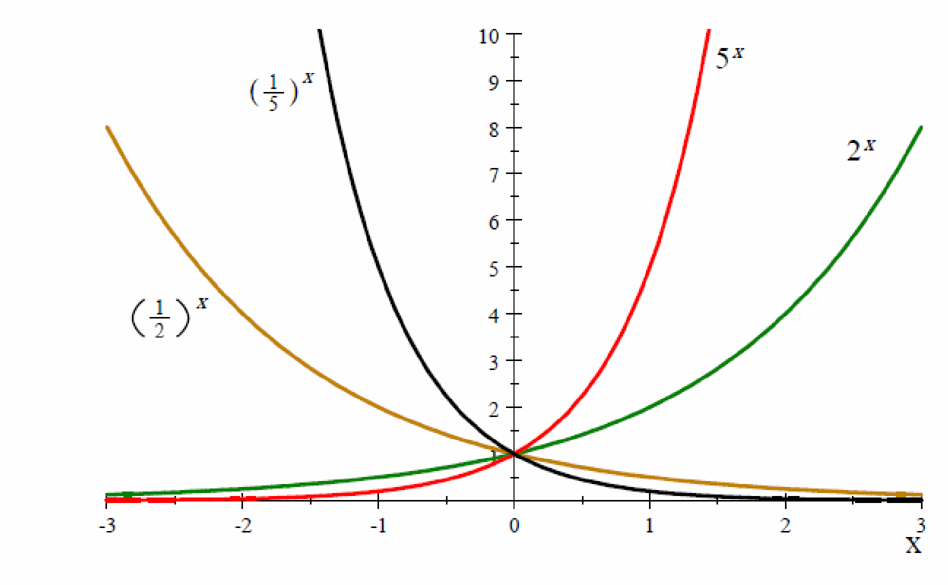
إليك بعض بيانات هذه الدوال :



بيان الدالة $f(x) = 3^{x}$



بيان الدالة $f(x) = \dfrac{1}{3^{3}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$



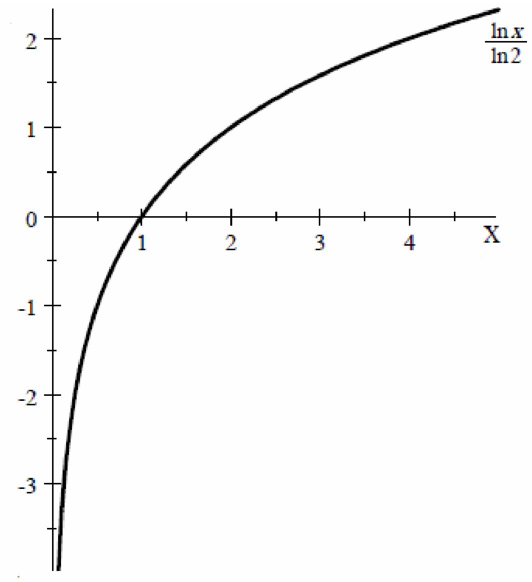
بيان الدالة $f(x)=a^x$ **حسب بعض قيم العدد** a

الدوال اللوغاريتمية : يلجأ الرياضيون أحيانا إلى استخدام دوال لوغاريتمية ليست مبنية على الأساس النبيري، فهم يعرفون الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a (الذي يؤخذ عموما أكبر تماما من 1) بـ :

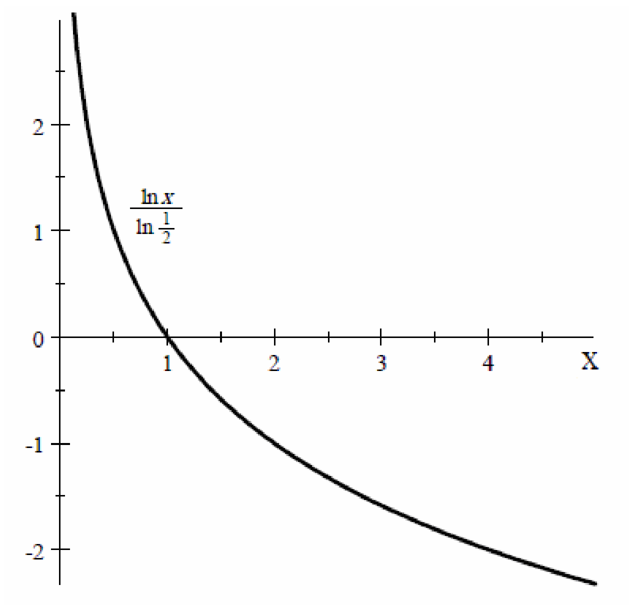
$$f(x)=\ln_a x=\frac{\ln x}{\ln a}.$$

فهذه الدالة إذن هي الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس النبيري مضروبة في ثابت موجب.

إليك بيانين لمثل هذه الدوال:



بيان الدالة $f(x) = \ln_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.



بيان الدالة $f(x) = \ln_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{\ln x}{\ln \frac{1}{2}}$.

5. دوال القـــوى

تعريف (دالة القوى)

نسمى دالة قوى كل دالة من الشكل :

$$f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^a$$

حيث a عدد حقيقي معلوم.

وهي تعرَّف بالدالتين الأسيّة واللوغاريتمية من خلال العلاقة:

$$\forall x > 0, \quad f(x) = e^{a \ln x} .$$

تعقيب

1) تتميّز دوال القوى بخواص كثيرة، منها أن كل دالة قوى دالة مستمرة، وهي :

* متزايدة لما $a > 0$،
* متناقصة لما $a < 0$،
* ثابتة لما $a = 0$.

ويتضح هذا من مشتقها على $]0, +\infty[$:

$$\forall x > 0, \quad \left(e^{a \ln x}\right)' = \frac{a}{x} x^a .$$

من بين دوال القوى الكثيرة الاستعمال نذكر الحالات التالية :

أ) الحالة التي يكون فيها a طبيعيا ($a \in \mathbb{N}$)، وهي دالة بأس طبيعي :

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^a = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{\text{a مــــرة}} .$$

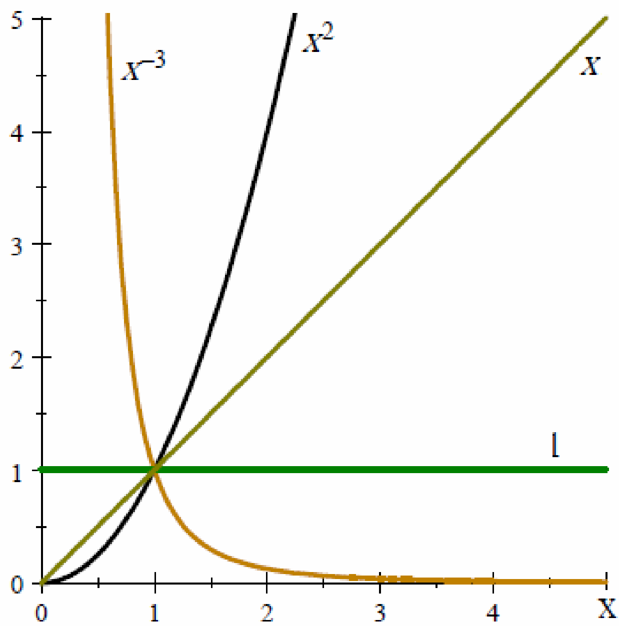
ب) الحالة التي يكون فيها a صحيحا ($a \in \mathbb{Z}$) :

$$f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^a = \underbrace{x^{-1} \times x^{-1} \times \ldots \times x^{-1}}_{a \text{ مــــرة}}.$$

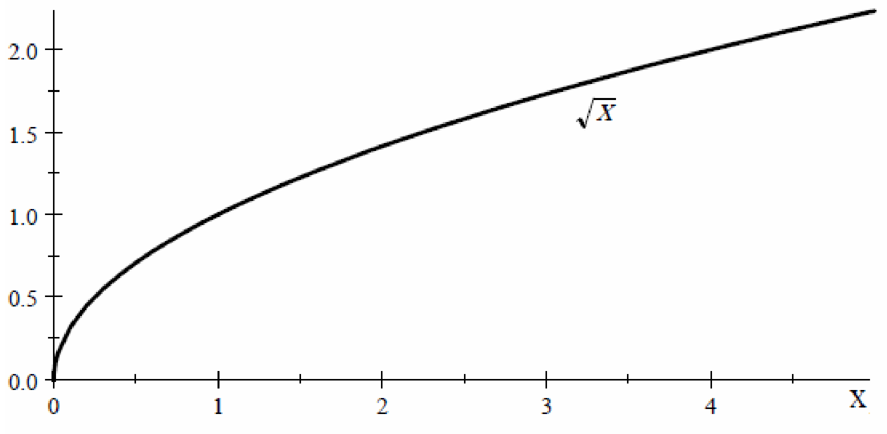
جـــ) الحالة التي يكون n طبيعيا ($n \in \mathbb{N}^*$) والأس $\frac{1}{n}$ فنحصل على الدالة الجذرية : $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

* الحالة التي يكون فيها n طبيعيا ($n \in \mathbb{N}^*$) والأس $-\frac{1}{n}$ فنحصل على الدالة الجذرية : $f(x) = x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$.

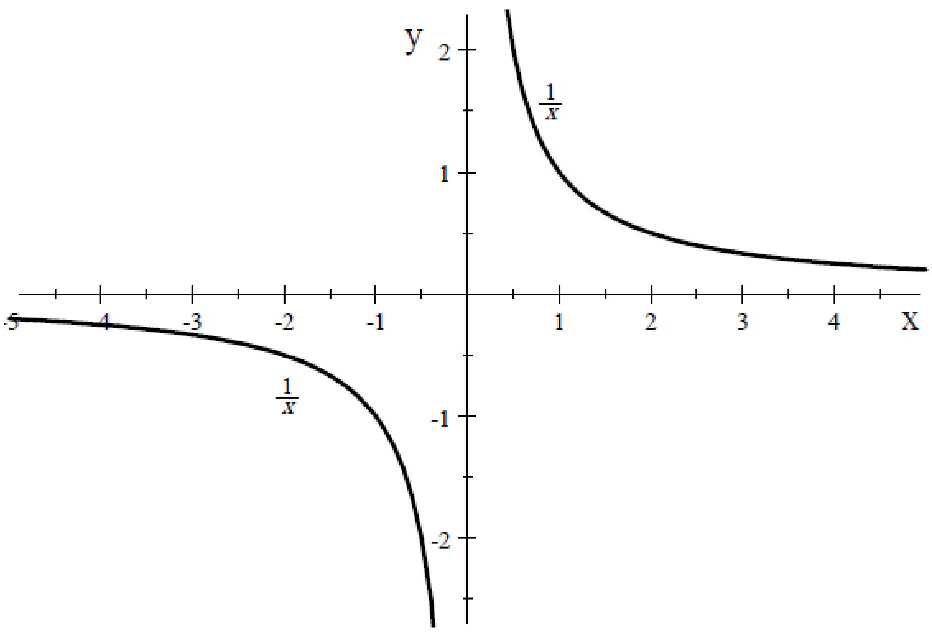
يمكن تعميم هذا المفهوم إلى دوال قوى أخرى تمسّ الأعداد السالبة.



بيان الدالة $f(x) = x^m$ **حسب بعض قيم العدد الحقيقي** m



بيان الدالة $f(x)=\sqrt{x}$



بيان الدالة $f(x)=x^{-1}$

6. الدوال المثلثية

نأتي الآن إلى تعريف الدوال المثلثية التي سبق التعرض إليها في الفصل الثاني (الجزء الأول). هناك عدة أساليب لتقديم هذه الدوال، منها ما يتطلب مدخلا لمفهوم السلاسل. وبما أننا عرّفنا الأس العقدي فإننا سنستغله ونتبنّاه في تعريفنا الموالي :

تعريف (الدوال المثلثية)

ليكن $x \in \mathbb{R}$. نعرّف الدالتين جب sin و تجب cos عند x بوضـــع : $\cos x=\mathrm{Re}(e^{ix})$ و $\sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})$ حيث يرمز Re و Im للجزء الحقيقي والتخيلي، على الترتيب.

نعرّف الظل tan بـــ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ في النقاط التي لا ينعدم فيها جيب التمام، أي تلك التي تكتب على الشكل $x = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ حيث $n \in \mathbb{Z}$.

ونعرّف ظل التمام cot بـــ $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ في النقاط التي لا ينعدم فيها الجيب، أي تلك التي تكتب على الشكل $x = n\pi$ حيث $n \in \mathbb{Z}$.

تعقيب

1) نستنتج من هذا التعريف أن

$$e^{ix}=\cos x+i.\sin x\ .$$

كما نلاحظ أن هذه الدوال دورية وتقبل الاشتقاق على مجموعات تعريفها وأن : $(\cos x)' = -\sin x$ و $(\sin x)' = \cos x$ و $(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2$ و $(\cot x)' = -1 + (\cot x)^2$.

2) لدينا :

$$e^{ix} = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{ix}{n})^n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} .$$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$. وهذا ذو علاقة بالدوال المثلثية حيث أن :

$$\cos x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

3) من الواضح حسب التعقيب أن جيب التمام زوجي وأن الجيب فردي.

4) من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا :

$$\left|e^{ix}\right| = 1 \quad \wedge \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 .$$

ذلك أن خواص الأعداد العقدية وزوجية الجيب وجيب التمام المشار إليها آنفا تعطي :

$$\begin{aligned} \left|e^{ix}\right|^2 &= (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos(-x) - i \sin(-x)) \\ &= e^{ix} e^{i(-x)} = e^{ix - ix} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 = \left|e^{ix}\right|^2 &= (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x . \end{aligned}$$

ومنه تأتي العلاقتان.

5) من أجل كل $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b,$$

$$\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b.$$

ذلك أن :

$$e^{i(a+b)}=\cos(a+b)+i\sin(a+b),$$

كما أن :

$$\begin{aligned}e^{ia}\times e^{ib}&=(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)\\&=\left(\cos a.\cos b-\sin a.\sin b\right)+i\left(\sin a.\cos b+\cos a.\sin b\right).\end{aligned}$$

ولما كان $e^{i(a+b)}=e^{ia}\times e^{ib}$ فإن مقارنة العلاقات الواردة أعلاه تؤدي إلى النتيجة المطلوبة.

6) لدينا :

$$\left|\sin x-x\right|\le\left|x\right|^2e^{|x|},$$

$$\left|\cos x-1\right|\le\left|x\right|^2e^{|x|}.$$

لرؤية ذلك نضع $u_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ونلاحظ أن :

$$\begin{aligned}\left|u_n(x)-x\right|&=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|\\&=x^2\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^kx^{2k-1}}{(2k+1)!}\right|\\&\le x^2\sum_{k=2}^{n}\frac{\left|x\right|^{2k-1}}{(2k-1)!}\\&\le\left|x\right|^2e^{|x|}.\end{aligned}$$

نجعل الآن n يؤول إلى لانهاية فنحصل على المتباينة الأولى المطلوبة لأننا نعلم أن $\sin x = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)$.

ومن جهة أخرى :

$$\begin{aligned}
|\cos x-1| &= \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \\
&\le x^2\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-2}}{(2k)!} \\
&\le x^2\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} \\
&\le x^2e^{|x|}.
\end{aligned}$$

ومنـــه تأتي العـــلاقة $|\cos x-1|\le x^2e^{|x|}$. وهذا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، إذ أن نظرية سابقة تؤكد بأن $\cos x = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$.

7) لما كان :

$$|\sin x - x|\le x^2e^{|x|}$$

فإن :

$$0\le \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|\le \lim_{x\to 0}|x|e^{|x|}=0$$

ومنه :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 .$$

8) بما أن :

$$|\cos x-1|\le x^2e^{|x|}$$

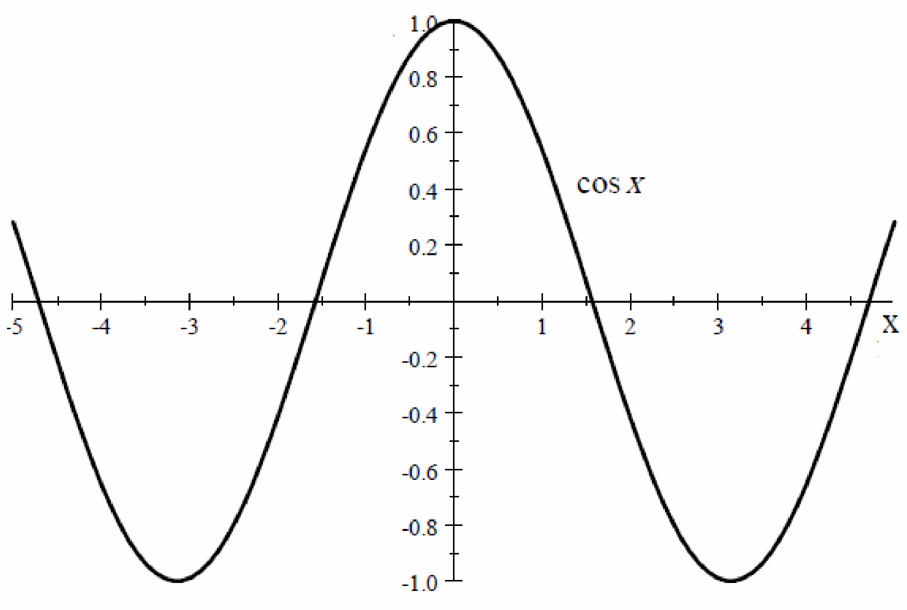
فإن :

$$0 \leq \left|\frac{\cos x - 1}{x}\right| \leq \lim_{x\to 0}|x|e^{|x|} = 0$$

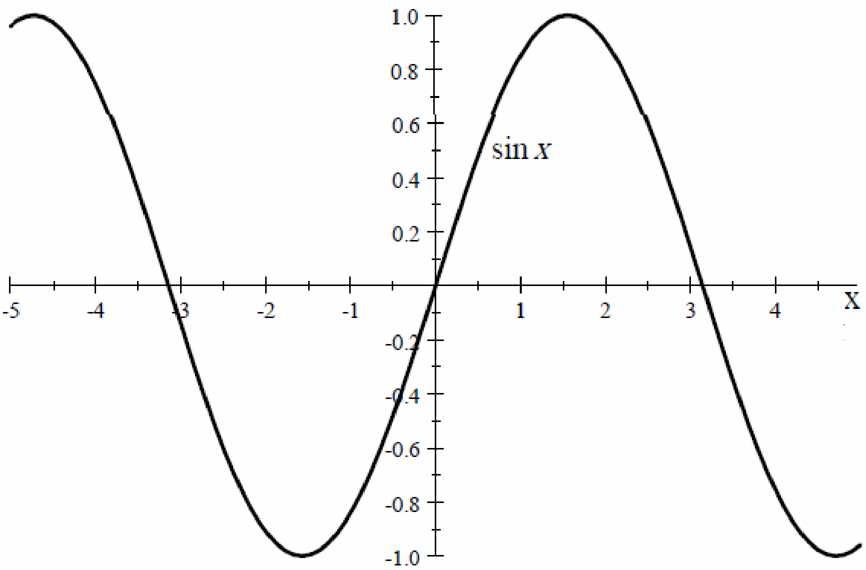
وبالتالي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0 .$$

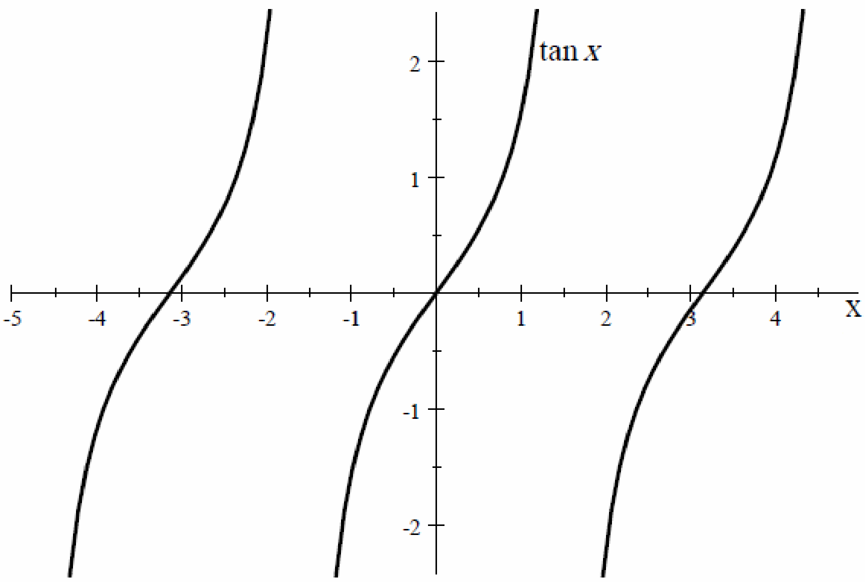
9) بيانات هذه الدوال المثلثية الأربع ترسم على النحو التالي :



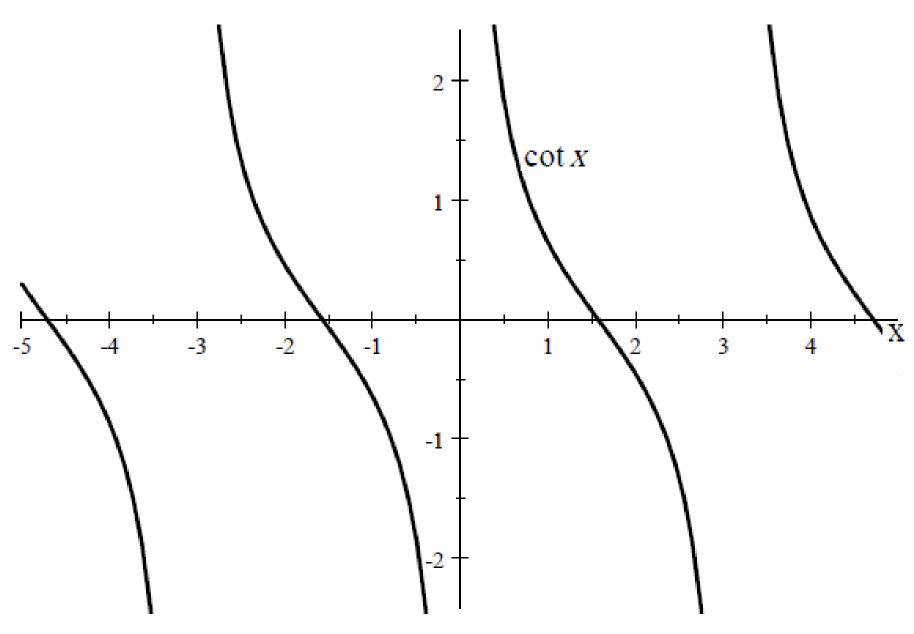
بيان الدالة $f(x) = \cos x$



بيان الدالة $f(x) = \sin x$



بيان الدالة $f(x) = \tan x$



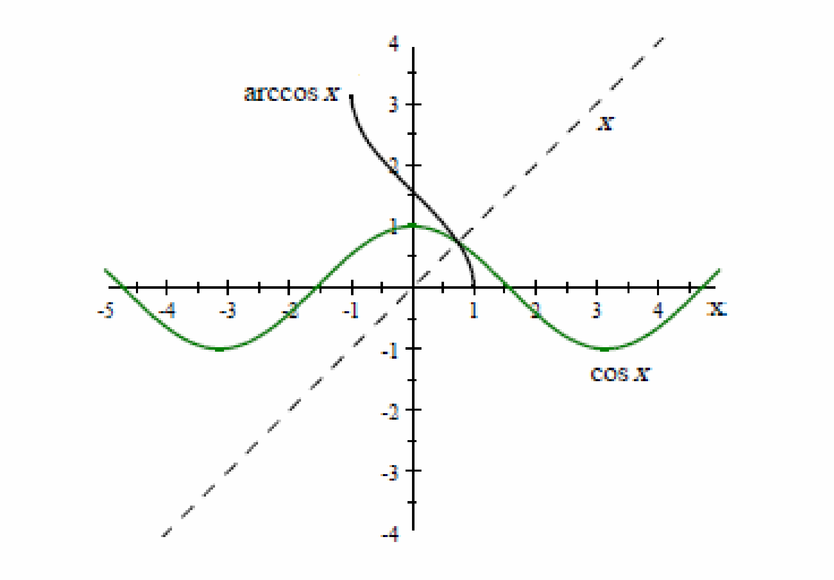
بيان الدالة $f(x) = \cot x$

7. الدوال المثلثية العكسية

نقدم فيما يلي بإيجاز تعاريف الدوال المثلثية العكسية وبياناتها، علما أن خواص هذه الدوال العكسية تستخلص من الخواص التي تربط دالة بدالتها العكسية (إن وجدت) مثل مجموعة التعريف والرتابة والاستمرار، وقابلية الاشتقاق، الخ.

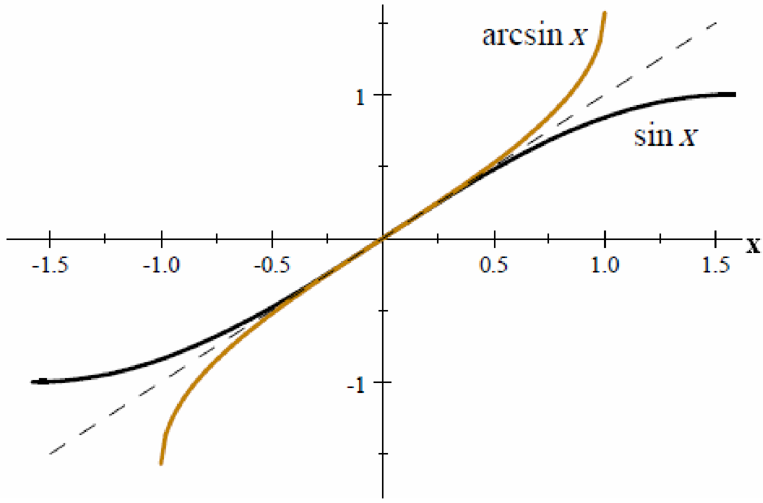
1) دالة قوس جيب التمام arccos

هي الدالة العكسية لدالة جيب التمام. مجموعة تعريفها : $[-1,1]$، مجموعة وصولها : $[0,\pi]$، وهي مستمرة ومتناقصة، وتقبل الاشتقاق ومشتقها هو : $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، وبيانها كالتالي (مع بيان دالة جيب التمام) :

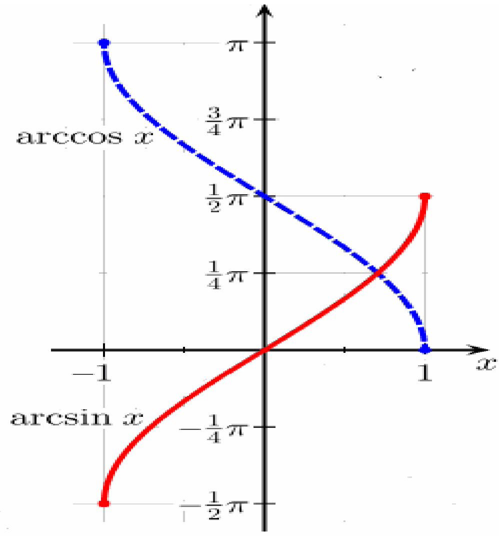


2) دالة قوس الجيب arcsin

هي الدالة العكسية لدالة الجيب. مجموعة تعريفها : $[-1,1]$، مجموعة وصولها : $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$، وهي مستمرة ومتزايدة، وتقبل الاشتقاق، ومشتقها هو : $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، وبيانها كالتالي (مع بيان دالة الجيب) :



وهذا بيانًا قوس الجيب وقوس جيب التمام في نفس المعلم :

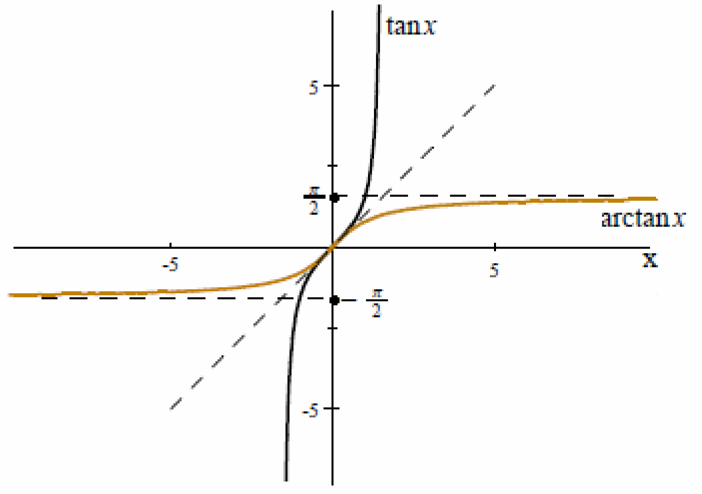


3) دالة قوس الظل arctan

هي الدالة العكسية لدالة الظل. نعتبر مجموعة تعريف دالة الظل مقتصرة على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. ومن ثمّ تكون تقابلا من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$. ولذا

فمجموعة تعريف دالتها العكسية هي $\mathbb{R}$، ومجموعة وصولها $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

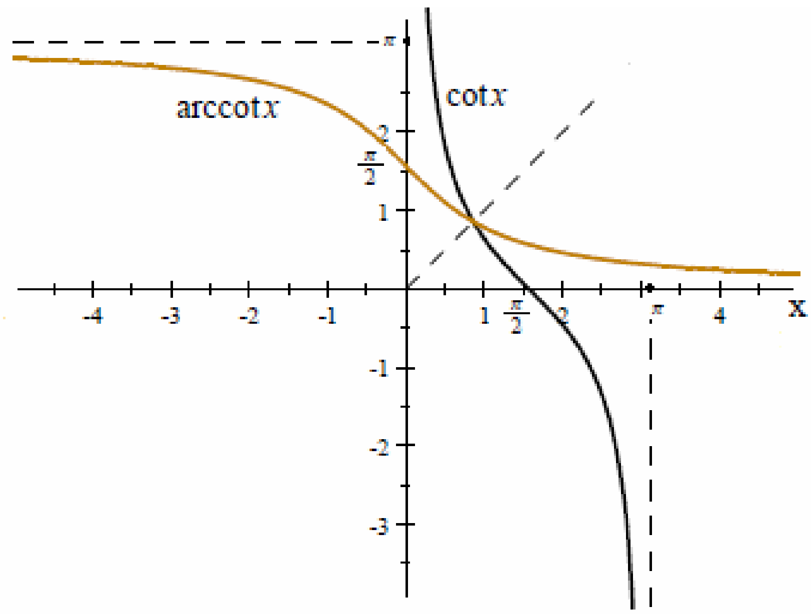
الدالة قوس الظل مستمرة ومتزايدة، وتقبل الاشتقاق ومشتقها هو : $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$. أما بيانها فهو كالتالي (مع بيان دالة الظل) :



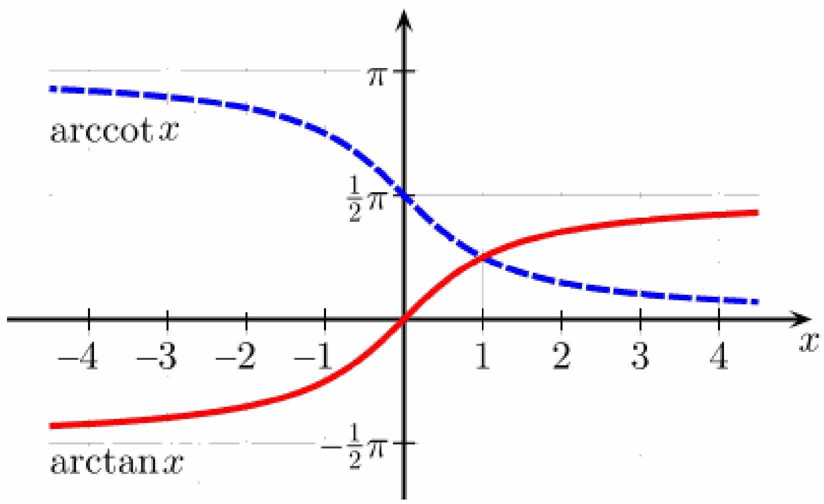
4) دالة قوس ظل التمام arccot

هي الدالة العكسية لدالة ظل التمام cot. نعتبر أن مجموعة تعريف الدالة cot هي $]0,\pi[$، ومنه فمجموعة وصولها $\mathbb{R}$. ولذلك فمجموعة دالة قوس ظل التمام $\operatorname{arc}\cot x$ هي $\mathbb{R}$، ومجموعة وصولها $]0,\pi[$. الدالة قوس ظل التمام مستمرة ومتناقصة، وقابلة للاشتقاق ومشتقها $(\mathrm{arccot}x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

أما بيانها فهو (مع بيان دالة ظل التمام) :



وهذا بيانا قوس الظل وقوس ظل التمام في نفس المعلم :



8. الدوال الزائدية

تعرَّف الدوال الزائدية بواسطة الدوال الأسيّة على النحو التالي :

تعريف (الدوال الزائدية)

1) جيب التمام الزائدي cosh هو التابع :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}.$$

2) الجيب الزائدي sinh هو التابع :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

3) الظل الزائدي tanh هو التابع :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}.$$

4) ظل التمام الزائدي ctanh هو التابع :

$$\mathbb{R}^{*} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \operatorname{ctanh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}.$$

تعقيب

1) من السهل حساب مشتقات هذه الدوال والتأكد من العلاقات التالية، بعضها شبيه بالعلاقات المعروفة بين الجيب وجيب التمام :

$$\cosh x = \cosh(-x).$$

$$\sinh x = -\sinh(-x).$$

$$\tanh x = -\tanh(-x)\ .$$

$$\cosh x > 0\ .$$

$$1\text{-}\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}\ .$$

$$e^x = \cosh x + \sinh x\ .$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x\ .$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\ .$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a.\cosh b + \sinh a.\sinh b\ .$$

$$\sinh(a+b) = \cosh a.\sinh b + \sinh a.\cosh b\ .$$

$$\cosh(a-b) = \cosh a.\cosh b - \sinh a.\sinh b\ .$$

$$\sinh(a-b) = \sinh a.\cosh b - \cosh a.\sinh b\ .$$

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \times \tanh b}\ .$$

$$\tanh(a-b) = \frac{\tanh a - \tanh b}{1 - \tanh a \times \tanh b}\ .$$

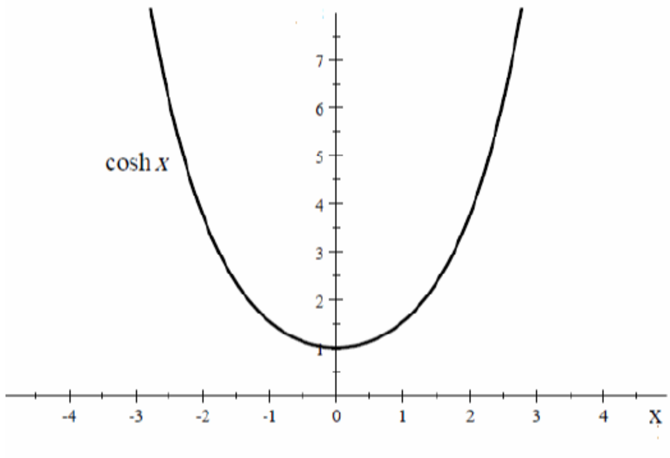
2) باعتبار $a = b$ في بعض العلاقات السابقة نحصل مثلا على :

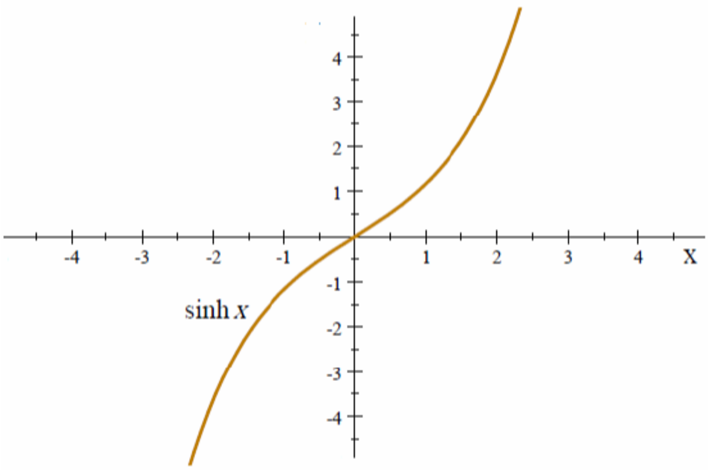
$$\cosh(2a) = \cosh^2 a + \sinh^2 a\ .$$

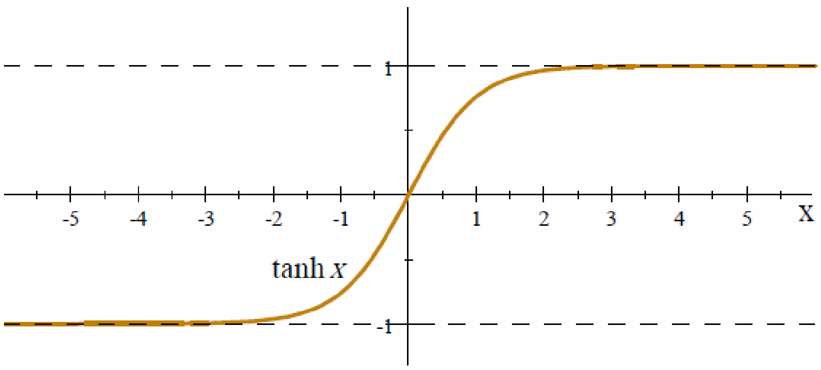
$$\sinh(2a) = 2\cosh a.\sinh a\ .$$

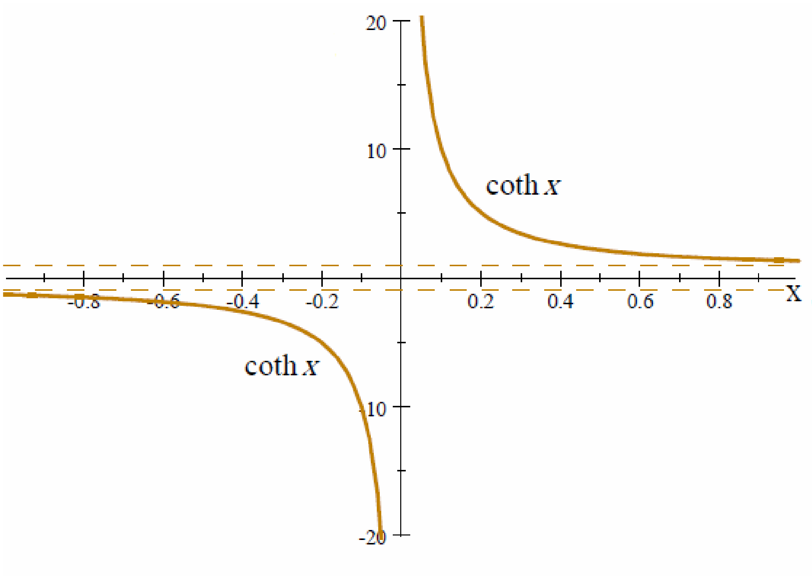
$$\tanh(2a) = \frac{2\tanh a}{1 + \tanh^2 a}\ .$$

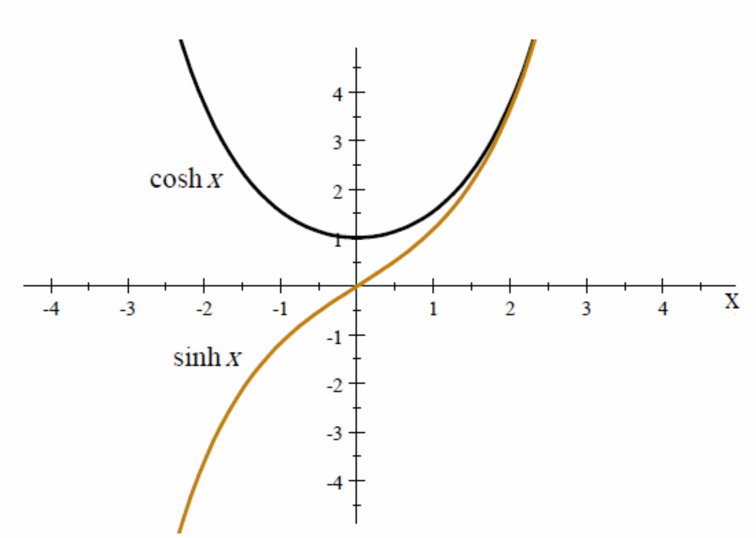
بيانات هذه الدوال الأربع هي على التوالي :


cosh x
7
6
5
4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
X

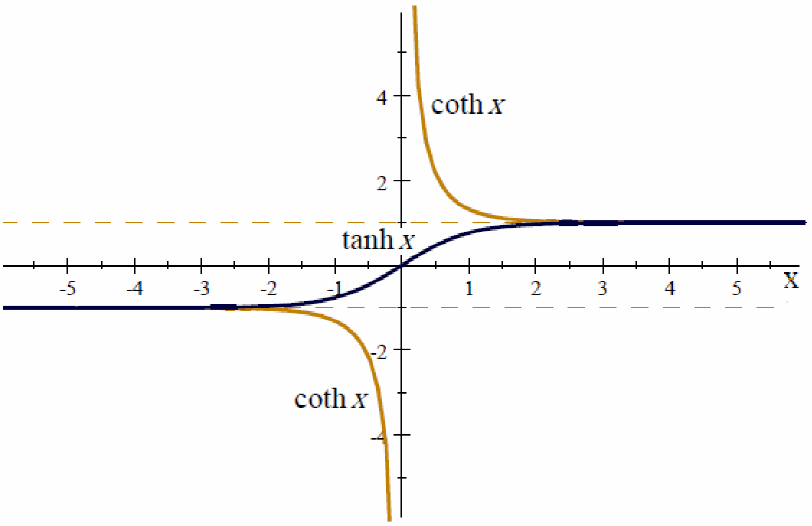

4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
X
-1
sinh x
-2
-3
-4


1
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
X
tanh x
-1





الدالتان جيب التمام الزائدي والجيب الزائدي في نفس المعلم



الدالتان الظل الزائدي وظل التمام الزائدي في نفس المعلم

9. الدوال الزائدية العكسية

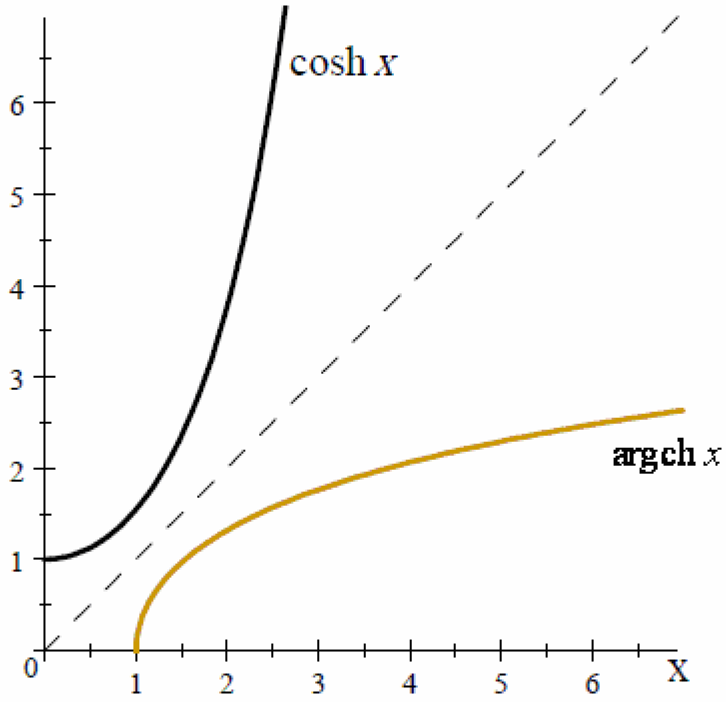
يمكن تعريف الدوال العكسية للدوال الزائدية كما يلي :

1) الدالة العكسية لجيب التمام الزائدي الذي نرمز لها بـــ argch أو $\cosh^{-1}$ معرفة بـــ :

$$\begin{cases} y = \operatorname{argch} x, \\ x \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cosh y, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

ولدينا :

$$\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$



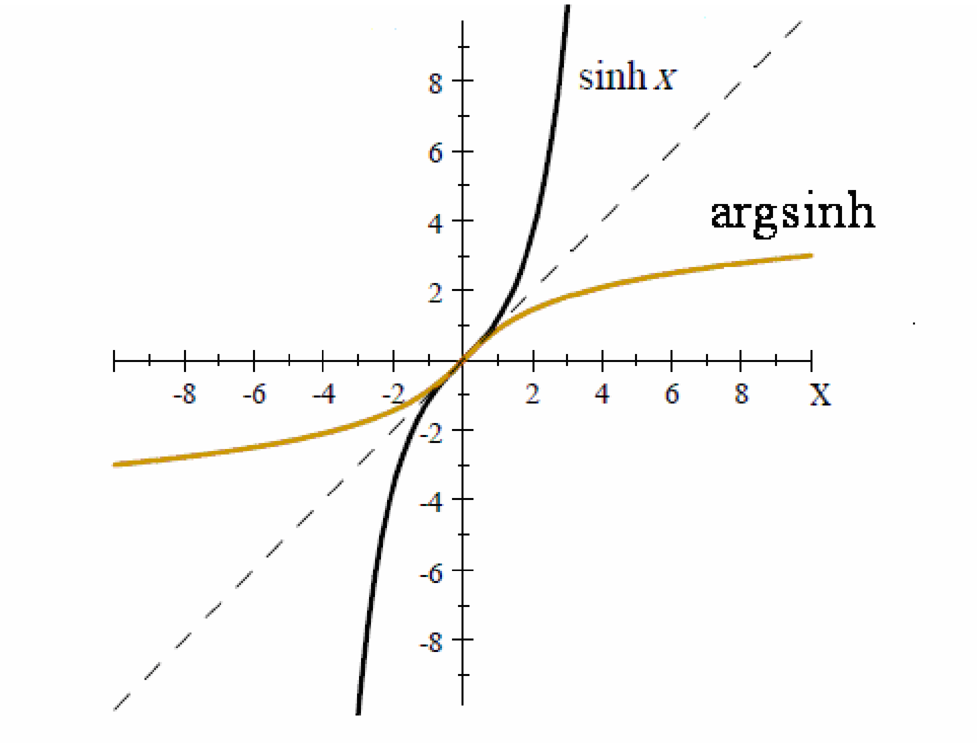
بيانا cosh و argch **في نفس المعلم**

2) الدالة العكسية للجيب الزائدي التي نـــرمز لها بـــ argsinh معرفة بـــ :

$$\begin{cases} y = \operatorname{argsinh} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sinh y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ولدينا :

$$\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$



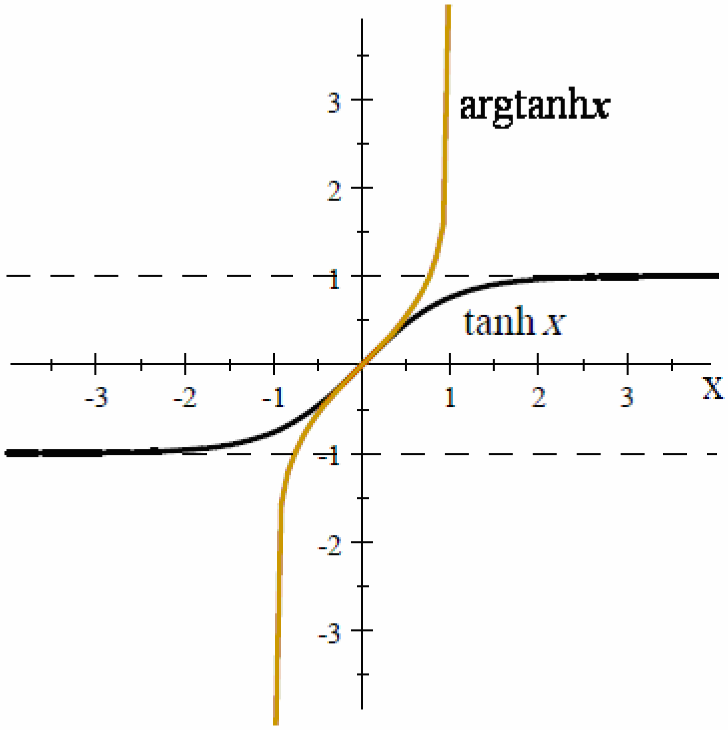
بيانا sinh و argsinh **في نفس المعلم**

3) الدالة العكسية للظل الزائدي الذي نرمز لها بـــ argtanh أو بـــ $\tanh^{-1}$ معرفة بـــ

$$\begin{cases} y = \text{argtanh}x, \\ -1 < x < 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tanh y, \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ولدينا :

$$\text{argtanh}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$



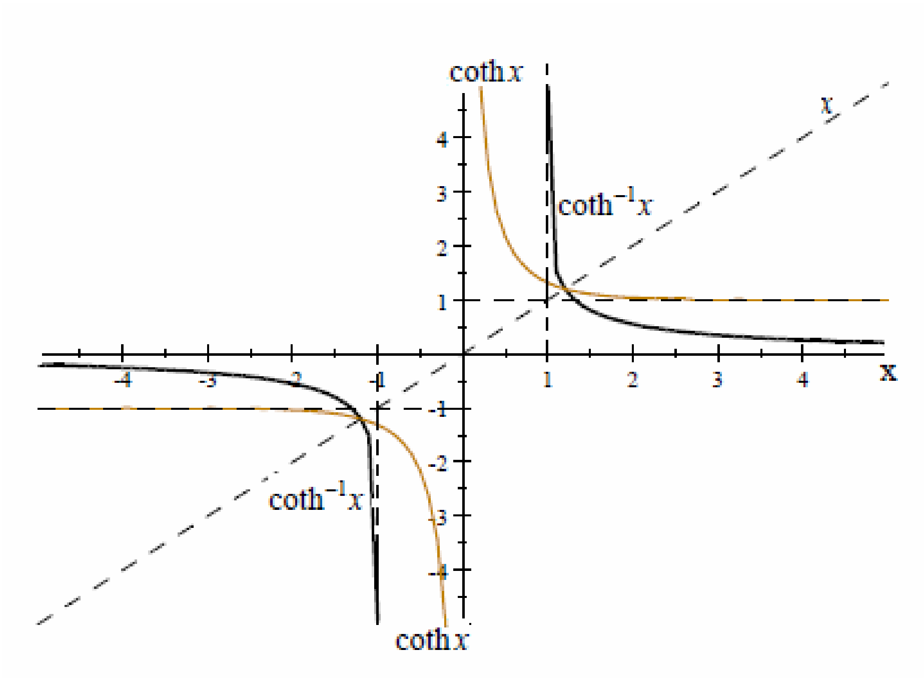
بيانا tanh و argtanh **في نفس المعلم**

4) الدالة العكسية لظل التمام الزائدي الذي نرمز لها بـــ $\coth^{-1}$
معرفة بـــ :

$$\begin{cases} y = \coth^{-1} x, \\ -1 < x < 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \coth \mathrm{y}. \\ y \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

ولدينا :

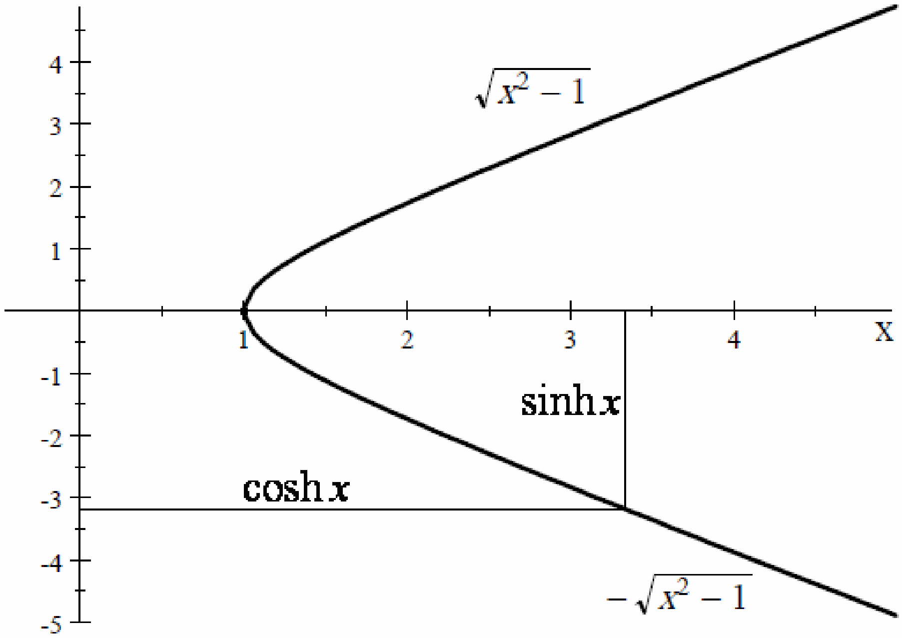
$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$



بيانا coth **و** coth^{-1} **في نفس المعلم**

تعقيب

مصطلح "الزائدي" في "الدوال الزائدية" مرتبط بالقطع الزائدي. لماذا؟ لاحظ مثلا أننا نعلم بأن النقطة $(\cos t, \sin t)$ ترسم دائرة الوحدة عندما يمسح المتغير t المجال $[0,2\pi]$. يمكن أن نثبت أن النقطة $(\cosh x, \sinh x)$ ترسم جزء القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ $(x > 1)$ عندما يمسح t المتغير $[-\infty, +\infty]$.



4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
1
2
3
4
X
$\sqrt{x^2 - 1}$
$\sinh x$
$\cosh x$
$-\sqrt{x^2 - 1}$

****

نصوص التمارين

الفصل الرابع

الاشتـــقاق

نصوص التمارين

تمرين 1

ليكن x من $\mathbb{R}^*$. لدينا العلاقة :

$$x^2 = x + x + ... + x + x \quad (\text{مرة } x)$$

نشتق بالطريقة العادية فنجد :

$$2x = 1 + 1 + ... + 1 + 1 \quad (\text{مرة } x)$$

أي $2x = x$. ومنه $2 = 1$.

السؤال : أين الخطأ؟

تمرين 2

أوجد مشتقات الدوال التالية حيثما كانت موجودة :

1) $f(x) = \sqrt{|x|}$.

2) $f(x) = x.|x|$.

3) $f(x) = |x^2 - 1|$.

4) $f(x)=\tan x$.

5) $f(x)=[x]$ حيث يرمز $[x]$ للجزء الصحيح لــ x.

تمرين 3

لتكن الدالة :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : x\in\mathbb{Q} \\ 0 & : x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

أثبت أن f تقبل الاشتقاق عند 0، واحسب هذا المشتق.

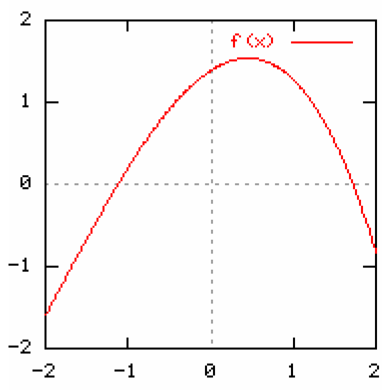
تمرين 4

لتكن f دالة حقيقية تحقق العلاقة $|f(x)|\le|x|^{\alpha}$.

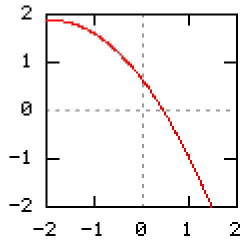
أثبت أن f تقبل الاشتقاق عند 0 لما $\alpha>1$. عيّن هذا المشتق.

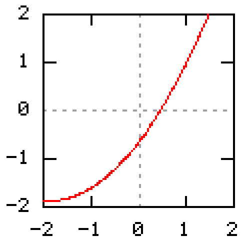
تمرين 5

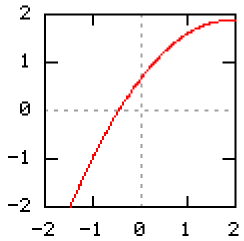
هذا بيان الدالة f :



ما هو بيان دالتها المشتقة من بين البيانات (1) أو (2) أو (3) ؟

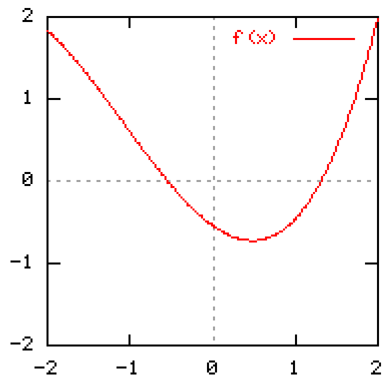

(1)


(2)

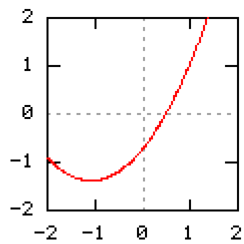

(3)

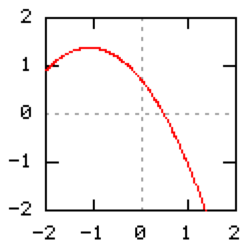
تمرين 6

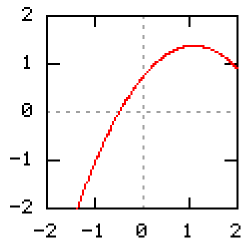
هذا بيان الدالة f :



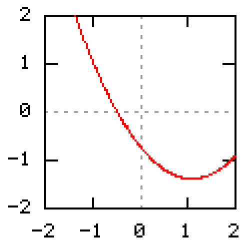
تعرّفْ على كل بيان من البيانات التالية واربطها بالمشتق f' :


(1)


(2)



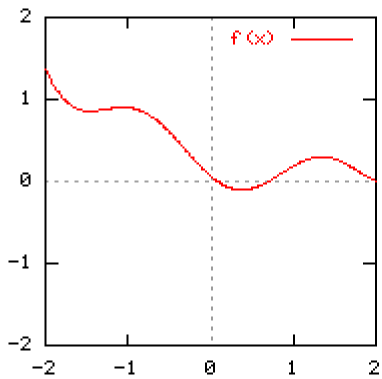
(3)



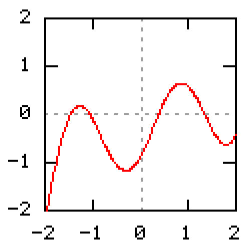
(4)

تمرين 7

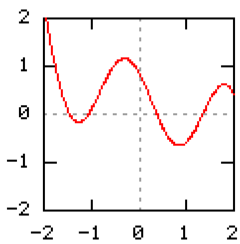
هذا بيان الدالة f :



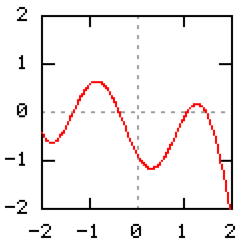
تعرّفْ على كل بيان من البيانات التالية واربطها بالمشتق f' :



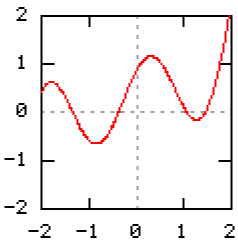
(1)



(2)



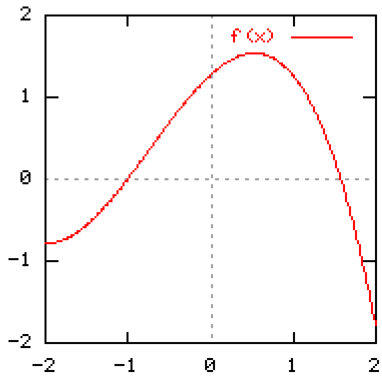
(3)



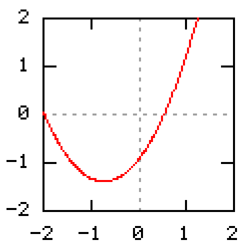
(4)

التمرين 8

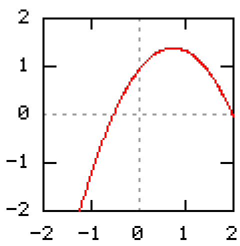
هذا بيان الدالة f :



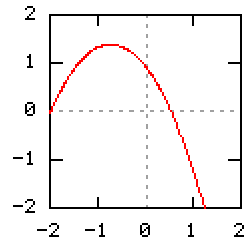
هل يمكن ربط كل بيان من البيانات التالية بالمشتق f' :



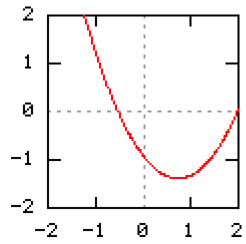
(1)



(2)



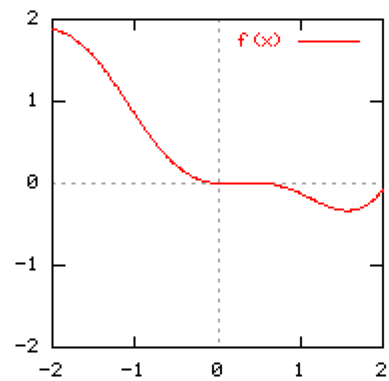
(3)



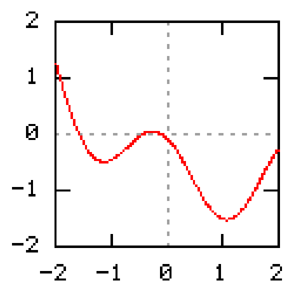
(4)

التمرين 9

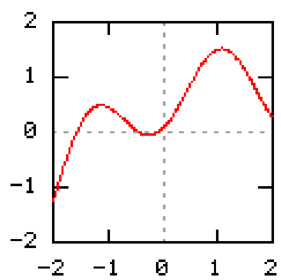
هذا بيان الدالة f :



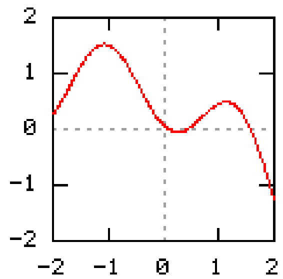
هل يمكن ربط كل بيان من البيانات التالية بالمشتق f' :



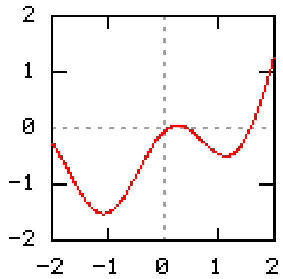
(1)



(2)



(4)



(3)

التمرين 10

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على مجال مفتوح I. أثبت أنه إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند نقطة x_0 من I فإنها مستمرة عند هذه النقطة.

التمرين 11

لتكن الدالة المعرفة بـــ $f(0) = 0$ و $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ لما $x \neq 0$.

1) أثبت أنها قابلة للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية وأحسب مشتقها وارسم بيانها.

2) هل هي مستمرة على $\mathbb{R}$؟ أرسم بيان الدالة المشتقة.

التمرين 12

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ و $g: I \to \mathbb{R}$ دالتين حقيقيتين معرفتين على مجال مفتوح I وقابلتين للاشتقاق عند نقطة x_0 من I. برهن على القاعدتين التاليتين :

1) الجداء $f.g$ يقبل الاشتقاق عند x_0 ولدينا :

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0).$$

2) إذا كان $g(x_0) \neq 0$ فإن الكسر $\frac{f}{g}$ يقبل الاشتقاق ولدينا :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

التمرين 13

لتكن f دالة حقيقية.

1) نفرض أن f تقبل الاشتقاق عند نقطة x_0. أثبت العلاقة :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0).$$

2) هل وجود النهاية $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ يؤدي إلى قابلية الاشتقاق عند x_0؟

التمرين 14

لتكن f دالة حقيقية تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

1) أثبت أنه إذا كانت f زوجية فإن الدالة المشتقة f' فردية.

2) أثبت أنه إذا كانت f فردية فإن الدالة المشتقة f' زوجية.

التمرين 15

نفرض أن f تقبل الاشتقاق عند x_0.

أثبت أن التابع العكسي $f^{-1}: f(I) \to I$ يقبل الاشتقاق عند $y_0 = f(x_0)$ فقط إذا كان $f'(x_0) \neq 0$، ولدينا : $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

التمرين 16

نذكّر بالنتيجة الواردة في الدرس :

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية مستمرة على المجال I.

تكون f محدبة على I إذا وفقط إذا تحققت العلاقة :

$$\forall x, y \in I: \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right).$$

أثبت أن العلاقة الواردة في هذه النظرية تكافئ القضية التالية:

من أجل كل أعداد x_1 ، x_2 ، ... ، x_n وكل أعداد t_1 ، t_2 ، ... ، t_n محصورة بين 0 و 1 بحيث :

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$$

فإن :

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \ldots + t_n f(x_n).$$

التمرين 17

1) أثبت العلاقة :

$$\forall x, y \in]0,+\infty[, \quad \forall t \in]0,1[: \qquad x^t y^{1-t} \le tx + (1-t)y.$$

2) نفرض أن الدالة $\ln f$ محدبة. ما رأيك في تحدب الدالة f.

التمرين 18

ليكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة محدبة. هل الدالة $f^+ : I \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ $f^+(x) = \max(f(x),0)$ محدبة.

التمرين 19

ليكن p عددا أكبر من 1 أو يساويه. نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = (1-\sqrt[p]{x})^p$ على المجال $[0,1]$.

1) تأكد من أن الدالة f' موجودة ومتزايدة على $[0,1]$. ما قولك في إشارة المشتقة الثانية؟ ماذا تستنتج بخصوص الدالة f؟

2) نعتبر أعدادا موجبة $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ و $(b_i)_{i=1,\dots,n}$ تحقق من أجل كل i العلاقة $a_i + b_i \neq 0$. إرشاد : طبق متباينة التحدّب على f باعتبار الأعداد $\alpha_i = \dfrac{(a_i+b_i)^p}{\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p}$ و العناصر $x_i = \dfrac{a_i^{\,p}}{(a_i+b_i)^p}$.

واستنتج من ذلك المتباينة (المسماة متباينة مينكوفسكي (Minkosvki :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

****

الفصل الخـــامس

نظرية التزايدات المنتهية ودستور تايلور

نصوص التمارين

التمرين 1

أوجد القيم القصوى للدوال التالية :

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=3x-4x^2$.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=x\left|x^2-1\right|$.

التمرين 2

قدم مثالا يبيّن أن انعدام المشتق الثاني عند نقطة حرجة لا يؤكد وجود أو عدم وجود قيمة قصوى عند النقطة الحرجة.

وعند وجود قيمة قصوى عند نقطة حرجة فإن انعدام المشتق الثاني عند النقطة الحرجة لا يحدّد نوع القيمة القصوى (صغرى أم عظمى).

التمرين 3

احسب القيمتين العظمى والصغرى المطلقتين للدالة f الحقيقية المعرفة على $[-1,1]$ بـــ $f(x)=6x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}$.

التمرين 4

طبق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة اللوغاريتمية $\ln$ في المجـــال $[x,x+1]$ حيث $0<x$. واستنتج حصرا للعبارة $\ln\frac{x+1}{x}$.

التمرين 5

طبق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $f(x)=x^{3}$ ، وعيّن النقطة (أو النقاط) المتوسطة.

التمرين 6

بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة f المعرفة بـــ :

$$f(x)=ax^{2}+bx+c$$

في مجال $[\alpha,\beta]$ عين النقطة γ التي تحقق العلاقة :

$$f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(\gamma).$$

التمرين 7

قدم مثالا لدالة يوضح أن عدم قابلية تلك الدالة للاشتقاق عند نقطة داخل المجال المفتوح يخلّ بنظرية التزايدات المنتهية.

التمرين 8

نعتبر دالتين $f:I\to\mathbb{R}$ و $g:I\to\mathbb{R}$ قابلتين للاشتقاق على المجال I. نفرض أن :

$$\forall x\in I,\qquad f'(x)\le g'(x).$$

أثبت أنه من أجل كل عنصرين x و y من I بحيث $x\ge y$ فإن:

$$f(x)-f(y)\le g(x)-g(y).$$

التمرين 9

اثبت باستخدام نظرية رول أن المعادلة $x^n+ax=b$ (حيث a و b عددان حقيقيان و n عدد طبيعي) لا تقبل أكثر من 3 حلول حقيقية مختلفة.

التمرين 10

لتكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ و $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ دالتين معرفتين ومستمرتين على المجال المتراص $[a,b]$ وقابلتين للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$.

بيّن الاستلزامين التاليين :

1) $\left(f'\leq g' \quad \wedge \quad f(a)\leq g(a)\right) \;\Rightarrow\; f\leq g$

2) $\left(f'\geq g' \quad \wedge \quad f(a)\geq g(a)\right) \;\Rightarrow\; f\geq g$.

التمرين 11

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـــ $u_0=1$ و $u_{n+1}=\cos u_n$ عندما يكون n طبيعي غير منعدم.

1) أثبت وجود عدد α من المجال $]0,1[$ يحقق $\cos\alpha=\alpha$.

2) تأكد من أن $0<u_n<1$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1.

3) باستخدام نظرية التزايدات المنتهية على الدالة f المعرفة بـــ $f(x)=\cos x$ على المتراص $[0,1]$، أثبت أن :

$$\forall (x,y)\in[0,1]^2, x\neq y:\; 0<|f(y)-f(x)|<(\sin 1)|y-x|\,.$$

4) تأكد بالتراجع من أن $|u_n-\alpha|\leq(\sin 1)^n|1-\alpha|$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n. ثم استنتج تقارب المتتالية المعطاة نحو α.

التمرين 12

هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة التالية: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ المعرّفة بـ $f(x)=(x^2,x^3)$ على المجال $[a,b]=[0,1]$ (كما أشرنا في الدرس فهذا النمط من التمارين سابق لأوانه رغم أنه يسير الحل).

التمرين 13

باستخدام قاعدة لوبيتال، احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin x - x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{\sin x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4}{e^x}$.

التمرين 14

اكتب نشر ماك لوران للدالة الجيبية $f(x)=\sin x$ حتى الرتبة n. ثم أثبت أن باقي النشر يؤول إلى الصفر عندما يؤول n إلى لانهاية.

التمرين 15

اكتب نشر ماك لوران للدالة اللوغاريتمية $f(x) = \ln(1+x)$ بجوار 0 حتى الرتبة n.

****

الفصل الخـــامس

النشر المحدود

نصوص التمارين

تمرين 1

نفرض أن التابع الحقيقي f يحقق $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. أثبت أن التوابـــع الثلاثة التالية متكافئة : f و $\ln(1+f)$ و $e^f - 1$.

تمرين 2

1) أوجد كثير حدود يكافئ بجوار 0 التابع :

$$\frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}.$$

2) نفس السؤال باعتبار التابع :

$$\frac{\tan(x - x\cos x)}{\sin x + \cos x - 1}.$$

3) أوجد كثير حدود يكافئ بجوار $+\infty$ التابع :

$$\frac{\sqrt{1+x^2}\ln(\frac{x}{1+x})}{\sin\frac{1}{x}}.$$

تمرين 3

نفرض أن التابع f يقبل نهاية عند نقطة a وأن التـــابعين f و g متكافئان. أثبت أن التابعين $\ln f$ و $\ln g$ متكافئان بجوار a.

تمرين 4

أوجد كثير حدود مقلوبه يكافئ بجوار $+\infty$ التابع :

$$f(x)=\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}-x\sqrt{2}.$$

تمرين 5

انشر حتى الرتبة 3 الدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ بجوار الصفر.

تمرين 6

انشر حتى الرتبة 3 الدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ بجوار الصفر.

تمرين 7

انشر حتى الرتبة 4 الدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ بجوار الصفر.

تمرين 8

انشر حتى الرتبة 2 الدالة $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ بجوار الصفر.

تمرين 9

انشر حتى الرتبة 5 الدالة $f(x)=\frac{1+x^3}{1+x^2}$ بجوار الصفر.

تمرين 10

انشر الدالة $f(x)=\ln(\cos x)$ حتى الرتبة الرابعة بجوار الصفر.

تمرين 11

انشر الدالة $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ حتى الرتبة الثانية بجوار $+\infty$.

تمرين 12

احسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}$.

تمرين 13

احسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^2(1-\cos x)}$.

تمرين 14

احسب النهاية $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

تمرين 15

انشر نشرا محـــدودا حتى الرتبة الثانيـــة الدالـــة $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3$ بجـــوار 0 .

تمرين 16

1) انشر نشرا محـــدودا حتى الرتبة الثالثة الدالـــة $f(x)=\dfrac{\ln\cos x}{x}$ بجوار 0 .

2) استنتج نشر التابع $h(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ حتى الرتبة الرابعة بجـــوار الصفر.

تمرين 17

احسب بطريقتين النشر المحدود للدالة $f(x)=\dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$ من الرتبـــة الرابعة بجوار الصفر.

تمرين 18

أوجد كثير حدود مكافئ للدالة $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ بجوار الصفر.

تمرين 19

ادرس تغيرات الدالة f المعرفة بـــ : $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^3-x}$ على $\mathbb{R}$، وارسم بيانها.

****

الفصل السابع

الدوال المألوفة

نصوص التمارين

تمرين 1

ليكن p عددا طبيعيا غير معدوم مثبتا.

1) أثبت أن :

$$\frac{1}{p!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{p-1}{n})=\frac{1}{n^p}C_n{}^p$$

حيث $C_n{}^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

2) أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ $u_n=\frac{1}{n^p}C_n{}^p$ متزايدة ومتقاربة ونهايتها $\frac{1}{p!}$.

تمرين 2

احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to e}\frac{x^e-e^x}{x-e}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\ln(1+x)}-\sqrt{\ln x}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\left(3^x-2^x\right)$.

تمرين 3

اختصر العبارة التالية في المجال $[-1,0[\cup]0,1]$: $\arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

تمرين 4

اختصر العبارة التالية : $\arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

تمرين 5

اكتب كلا من العبارات :

$\sin\arccos x$ ، $\cos\arcsin x$ ، $\sin\arctan x$ ، $\sin 2\arctan x$ ، $\sin 3\arctan x$

بدون أن تظهر فيها دوال مثلثية.

تمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة بـــ : $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}+\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

عيّن مجموعة النقاط التي تكون فيها هذه الدالة ثابتة.

تمرين 7

اثبت أن :

$$\forall x\in\mathbb{R} : arc\cot x=\frac{\pi}{2}-\arctan x\ .$$

تمرين 8

المطلوب حل المعادلة : $\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}$.

تمرين 9

المطلوب حل المعادلة عدديا ثم تأكد من الحل بيانيا:

$$\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

تمرين 10

المطلوب حل المعادلة عدديا ثم تأكد من الحل بيانيا:

$$\arcsin 2x - \arcsin\sqrt{3}x = \arcsin x \ .$$

تمرين 11

حل المعادلة التالية : $\arctan x + \arctan\sqrt{3}x = \frac{7\pi}{12}$.

تمرين 12

اثبت المتباينات التالية :

$$\forall x \in \left]-1,0\right[\qquad \arcsin x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\forall x \in \left]0,1\right[\qquad \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\qquad \arcsin x > \frac{x}{1+x^2}.$$

تمرين 13

عيّن في كل حالة من الحالات التالية عدد الدوال f الـــتي تحقـــق العلاقة المعطاة :

1) $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ و $f(\cosh x)=e^x$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

2) $f:\mathbb{R}_*^+\to\mathbb{R}$ و $f(e^x)=\cosh x$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

3) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ و $f(e^x)=\cosh x$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

تمرين 14

احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cosh^3 x-\sinh^3 x\right)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln\cosh x\right)$.

تمرين 15

أثبت العلاقات التالية :

1) $\operatorname{argch} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

2) $\operatorname{argsh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

3) $\operatorname{argth} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

(نذكّر أن الرموز argch و argsh و argth تعني علـــى التـــوالي $\cosh^{-1}$ و $\sinh^{-1}$ و $\tanh^{-1}$ أي الدوال العكسية للدوال جيب التمام الزائدي، الجيب الزائدي، الظل الزائدي).

****

حلول التمارين

الفصل الرابع

الاشتــقاق

حلول التمارين

حل التمرين 1

يأتي الخطأ من كون المساواة

$$x^2 = x + x + ... + x + x \quad (x \text{ مرة})$$

لا تحمل معنى دقيقا إلا إذا كان x طبيعيا. وعندما نشتق عند نقطة فلا بد أن نعتبر جوارا لهذه النقطة (مثل مجال مفتوح مركزه تلك النقطة). وهذا المجال لا يمكنه أن يحوي سوى الأعداد الطبيعية. يؤكد هذا التمرين على أن مشتق دالة لا يتعلق بقيمتها عند نقطة بل يتعلق بسلوكها بجوار نقطة الاشتقاق.

حل التمرين 2

1) الدالة $f(x) = \sqrt{|x|}$.

أ) من أجل $0 < x$: $f(x) = \sqrt{x}$. ومنه $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ب) من أجل $x < 0$: $f(x) = \sqrt{-x}$. ومنه $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}$.

جـ) من أجل $x = 0$: نحسب النهاية التالية التي تمثل المشتق من اليمين عند الصفر (إن وجد) :

$$\begin{aligned}\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} &= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sqrt{x}}{x}\\ &= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{\sqrt{x}}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

هذه النهاية غير موجودة. وبالتالي فإن f لا يقبل الاشتقاق عند الصفر.

خلاصة القول إن الدالة المعطاة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

2) الدالة $f(x) = x.|x|$

أ) من أجل $x > 0$: $f(x) = x^2$. ومنه $f'(x) = 2x$.

ب) من أجل $x < 0$: $f(x) = -x^2$. ومنه $f'(x) = -2x$.

جـ) من أجل $x = 0$: نحسب النهاية التالية

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{h|h|}{h}\\ &= \lim_{h \to 0} |h|\\ &= 0.\end{aligned}$$

خلاصة القول إن الدالة المعطاة تقبل الاشتقاق في كل مكان. ويمكن كتابة مشتقها في كل نقطة $x \in \mathbb{R}$ على الشكل

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2|x|.$$

3) الدالة $f(x) = |x^2 - 1|$.

أ) من أجل $|x| > 1$: $f(x) = x^2 - 1$. ومنه $f'(x) = 2x$.

ب) من أجل $|x| < 1$: $f(x) = 1 - x^2$. ومنه $f'(x) = -2x$.

جـ) من أجل $|x| = 1$: يكفي دراسة الاشتقاق عند النقطة $x = 1$ بسبب زوجية الدالة. نحسب النهاية التالية التي تمثل المشتق من اليمين :

$$\begin{aligned}
\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{\left|(1+h)^2 - 1\right|}{h} \\
&= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{\left|2h + h^2\right|}{h} \\
&= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{2h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} (2+h) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

لاحظ أننا استفدنا من كون $2h + h^2 > 0$ في حالة $h > 0$. وهكــذا تبــيّن أن f يقبل الاشتقاق من اليمين عند 1 وهذا المشتق يساوي 2.

ثم نحسب النهاية التالية التي تمثل المشتق من اليسار :

$$\begin{aligned}
\lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{\left|(1+h)^2 - 1\right|}{h} \\
&= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{\left|2h + h^2\right|}{h} \\
&= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{-(2h + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} -(2+h) \\
&= -2.
\end{aligned}$$

لاحظ أننا استفدنا من كون $2h + h^2 < 0$ في الحالة التي يكون فيها h سالبا ومجاورا للصفر. إذن يقبل f الاشتقاق من اليسار عند 1 وهذا المشتق يساوي -2.

ومن ثمّ يتضح أن المشتق من اليمين والمشتق من اليسار موجودان عند 1 لكنهما غير متساويين. ولذا فالدالة لا تقبل الاشتقاق عند هذه النقطة. وكذلك الأمر في النقطة -1. خلاصة القول : إن f يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ باستثناء النقطتين 1 و -1.

4) الدالة $f(x) = \tan x$.

لدينا من أجل كل x في مجموعة تعريف دالة الظل (أي مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء النقاط من الشكل $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ حيث $n \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\tan x)' \\
&= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\cos x)^2 - (\sin x)\times(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{1}{(\cos x)^2}.
\end{aligned}$$

كما يمكن ملاحظة أن نفس المشتق يساوي :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} \\
&= 1 + (\tan x)^2.
\end{aligned}$$

5) الدالة $f(x) = [x]$.

إذا كان $x \in]n, +n+1[$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ فإن $f(x) = n$. ومن ثم فإن f ثابت بجوار النقطة x. وعليه $f'(x) = 0$. ومن جهة أخرى نلاحظ عند نقطة من الشكل $x = n \in \mathbb{Z}$ أن الدالة غير مستمرة لأن على يسار هذه

النقطة الدالة تساوي $n-1$. أما على يمينها فهي تساوي n. ولذلك فالدالة لا تقبل الاشتقاق عند النقاط من الشكل $x = n \in \mathbb{Z}$ ... وتقبل الاشـــتقاق في ما عدا ذلك.

حل التمرين 3

لاحظ أن العلاقة $0 \le |f(x)| \le x^2$ محققة من أجل كل $x \in \mathbb{R}$. ومنه ليس من الصعب التأكد من صحة العلاقة :

$$0 = \lim_{x \to 0} 0 \le \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \le \lim_{x \to 0} \left| \frac{x^2}{x} \right| = \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

وبالتالي : $\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = 0$. وهذا يكافئ $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$، أي أن f يقبل الاشتقاق، ولدينا : $f'(0) = 0$.

حل التمرين 4

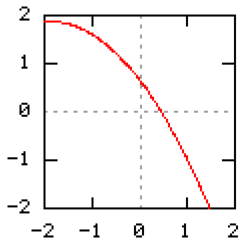
لاحظ أن العلاقة $|f(x)| \le |x|^{\alpha}$ تؤدي عنـــدما يكـــون $\alpha > 1$ إلى $f(0) = 0$ لأن $0 \le |f(0)| \le |0|^{\alpha} = 0$. ويمكن التأكد بسهولة مـــن العلاقـــة الموالية :

$$0 = \lim_{x \to 0} 0 \le \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \le \lim_{x \to 0} \left| \frac{x^{\alpha}}{x} \right| = \lim_{x \to 0} \left| x^{\alpha - 1} \right| = 0 .$$

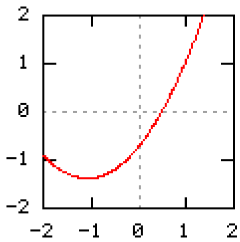
ومنه يأتي أن f يقبل الاشتقاق عند 0 ولدينا : $f'(0) = 0$.

حل التمرين 5

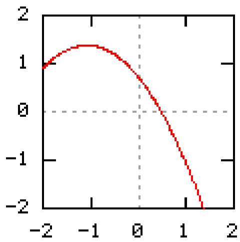
الإجابة : (1)



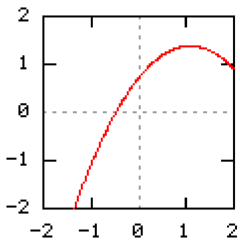
حل التمرين 6



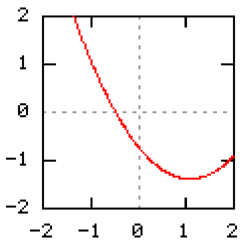
(1)



(2)



(3)



(4)

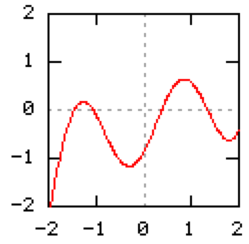
(1) بيان $f'(x)$ ،

(2) بيان $-f'(x)$ ،

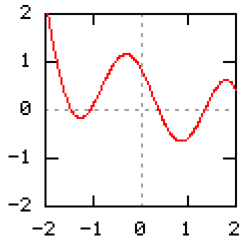
(3) بيان $-f'(-x)$ ،

(4) بيان $f'(-x)$.

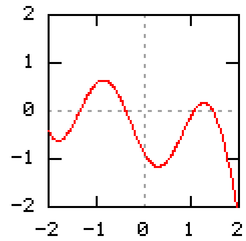
حل التمرين 7



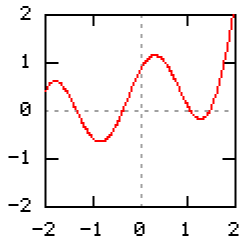
(1)



(2)



(3)



(4)

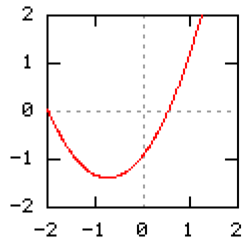
(1) بيان $f'(x)$ ،

(2) بيان $-f'(x)$ ،

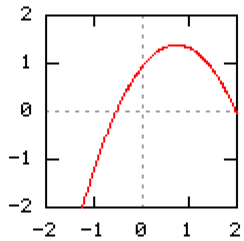
(3) بيان $f'(-x)$ ،

(4) بيان $-f'(-x)$.

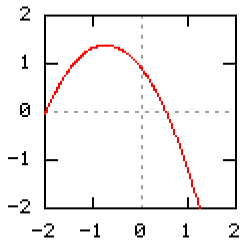
حل التمرين 8



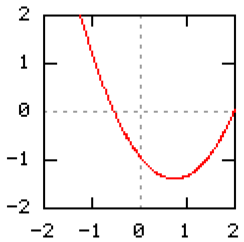
(1)



(2)



(3)



(4)

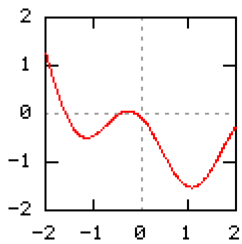
(1) بيان $-f'(x)$ ،

(2) بيان $f'(-x)$ ،

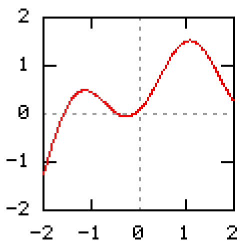
(3) بيان $f'(x)$ ،

(4) بيان $-f'(-x)$.

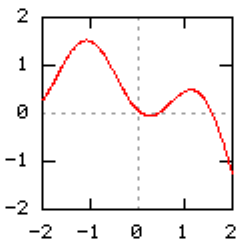
حل التمرين 9



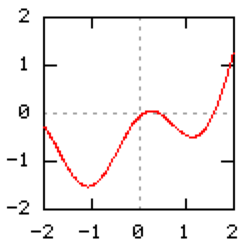
(1)



(2)



(4)



(3)

(1) بيان $f'(-x)$ ،

(2) بيان $-f'(-x)$ ،

(3) بيان $f'(x)$ ،

(4) بيان $-f'(x)$.

حل التمرين 10

نلاحظ أن استمرار f عند x_0 يعني $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0$. لدينا المساويات التالية :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\times(x-x_0)\\ &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\times\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f'(x_0)\times 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

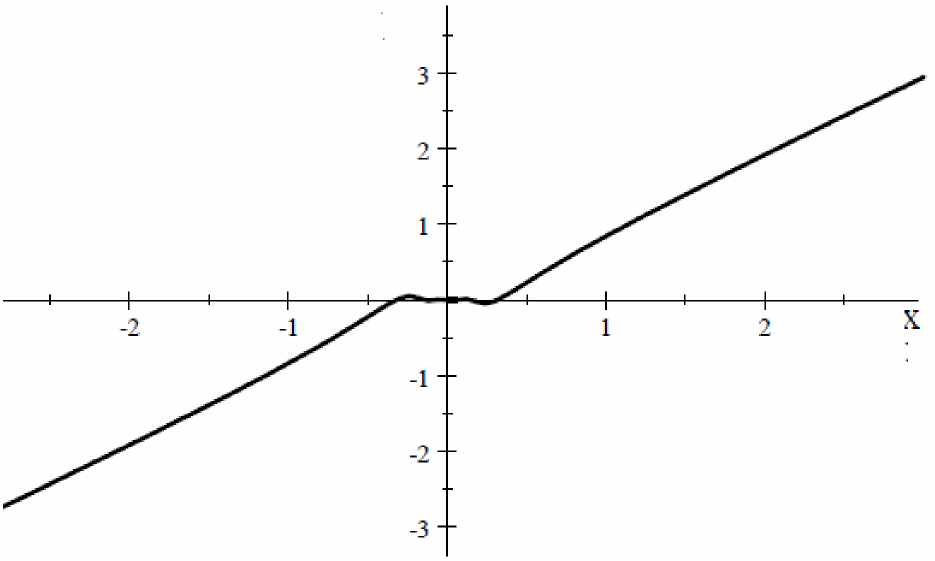
ومنه يأتي استمرار f عند x_0.

حل التمرين 11

1) لدينا :

$$f'(0) = 0$$
$$f'(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)'$$
$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

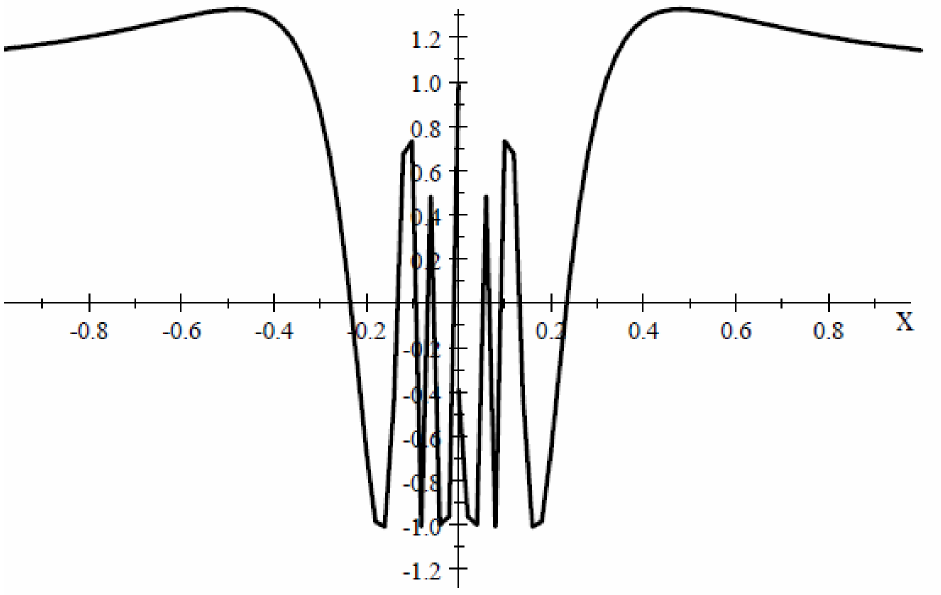
لاحظ أن الحد الأول المعبّر عن المشتق يؤول إلى 0، أما $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ فلا يؤول إلى 0.



بيان الدالة

2) لا: عند الصفر.

بيان الدالة المشتقة هو :



حل التمرين 12

1) باعتبار $x \neq x_0$ يمكن أن نكتب :

$$\frac{f.g(x) - f.g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \frac{f(x).g(x) - f(x_0).g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \frac{f(x).g(x) - f(x_0).g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

ومنه (لاحظ أننا سنستعمل استمرار g الذي يأتي من قابليته للاشـــتقاق، وكذلك توزيع النهايات عندما نعلم مسبقا بأنها موجودة) :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f.g(x)-f.g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0).$$

2) من المعلوم أنه إذا كان g مستمرا عند x_0 (وهو كذلك لأنه قابل للاشتقاق) وكان $g(x_0)\neq 0$ فإنه يوجد جوار V لـــ x_0 بحيث :

$$\forall x\in V,\qquad g(x)\neq 0.$$

لنعتبر $x\in V$ ونكتب :

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{\left(x-x_0\right).g(x).g(x_0)}$$
$$=\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0).g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{\left(x-x_0\right).g(x).g(x_0)}$$
$$=\frac{1}{g(x).g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].$$

وبالتالي :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\left(\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x).g(x_0)}\right)\times\left[\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)g(x_0)-f(x_0)\left(\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{g(x_0).g(x_0)}\times\left[f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)\right]$$
$$=\frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

ومنه المطلوب.

حل التمرين 13

1) لدينا :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)+\left(f(x_0)-f(x_0-h)\right)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$
$$=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}\lim_{-h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$
$$=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$$
$$=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)$$
$$=f'(x_0).$$

لاحظ أننا وزعنا النهاية في السطر الثاني في العلاقات السابقة لأننـــا نعلـــم مسبقا أن النهايتين موجودتان بفضل قابلية f للاشتقاق عند x_0.

2) وجود النهاية $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ لا يؤدي بالضرورة إلى قابلية الاشتقاق عند x_0.

مثال مضاد : $f(x) = |x|$ و $x_0 = 0$. نجد في هذه الحالة أن :

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} &= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0-h|}{2h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} \\ &= 0.\end{aligned}$$

وهكذا نلاحظ وجود تلك النهاية مع العلم أن الدالة $f(x) = |x|$ لا تقبل الاشتقاق عند 0.

حل التمرين 14

1) نفرض أن f زوجية وتقبل الاشتقاق بوجه خاص عند x و $-x$. نلاحظ أن

$$\begin{aligned}
f'(-x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(-[x-h])-f(-x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= -f'(x).
\end{aligned}$$

وهكذا يأتي أن $f'(-x)=-f'(x)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

2) نفرض الآن أن f فردية. لدينا

$$\begin{aligned}
f'(-x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(-[x-h])-f(-x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-f(x-h)+f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= f'(x).
\end{aligned}$$

وهكذا يأتي أن $f'(-x)=f'(x)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

حل التمرين 15

* نفرض في البداية أن $f^{-1}:f(I)\to I$ تقبل الاشتقاق عند $y_0=f(x_0)$. هل $f'(x_0)\neq 0$ ؟ لرؤية ذلك نكتب :

$$f^{-1} \circ f(x) = x$$

ونشتق التركيب عند x_0 لأن شروط النظرية السابقة محققة :

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \times f'(x_0) = 1 \text{ ،} \quad \left(f^{-1}\right)'(y_0) \times f'(x_0) = 1 .$$

تثبت هذه العلاقة أن $f'(x_0) \neq 0$ ولولاه لانعدم الطرف الثاني في المساواة السابقة.

* نفرض الآن أن $f'(x_0) \neq 0$. هل الدالة العكسية تقبل الاشتقاق عند $y_0 = f(x_0)$؟ لندرس النهاية :

$$\lim_{y = f(x) \to y_0 = f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} .$$

لاحظ أننا استفدنا من الخاصية التالية في المساواة السابقة : استمرار f وتباينها يؤديان إلى استمرار الدالة العكسية. ولذلك فإن التكافؤ التالي صحيح :

$$f(x) = y \to f(x_0) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad x \to x_0 .$$

من جهة أخرى نعلم أن النهاية $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجودة، ولدينا $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. ومنه فإن الشرط $f'(x_0) \neq 0$ يؤدي إلى العلاقة :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

وعليه نستطيع تأكيد وجود النهاية :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

وتحديد قيمتها والحصول على المطلوب :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

حل التمرين 16

بالتراجع. العلاقة صحيحة من أجل $n = 2$. نفرض صحتها من أجل رتبة n، ونثبتها من أجل الرتبة الموالية $n+1$. إليك طريقة المرور من الحالة $n = 2$ إلى الحالة $n = 3$ باعتبار أن $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ وبملاحظة أن $\frac{t_2}{t_2 + t_3} + \frac{t_3}{t_2 + t_3} = 1$:

$$\begin{aligned}
f(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3) &= f\left(t_1x_1 + (t_2 + t_3)\frac{t_2x_2 + t_3x_3}{t_2 + t_3}\right) \\
&\le t_1 f(x_1) + (t_2 + t_3) f\left(\frac{t_2x_2 + t_3x_3}{t_2 + t_3}\right) \\
&\le t_1 f(x_1) + (t_2 + t_3) f\left(\frac{t_2x_2}{t_2 + t_3} + \frac{t_3x_3}{t_2 + t_3}\right) \\
&\le t_1 f(x_1) + (t_2 + t_3)\left\{\frac{t_2}{t_2 + t_3} f(x_2) + \frac{t_3}{t_2 + t_3} f(x_3)\right\} \\
&= t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + t_3 f(x_3).
\end{aligned}$$

باتباع نفس المنوال قدّم إثبات الحالة العامة.

حل التمرين 17

1) باستخدام خواص الدالة اللوغاريتمية نلاحظ أن العلاقة المطلوب إثباتها تكافئ :

$$\forall x, y \in]0,+\infty[, \quad \forall t \in]0,1[: \qquad \ln\left(x^t y^{1-t}\right) \le \ln\left(tx + (1-t)y\right),$$

أي :

$$\forall x, y \in]0,+\infty[, \quad \forall t \in]0,1[: \qquad t.\ln x + (1-t)\ln y \le \ln\left(tx + (1-t)y\right).$$

وهذا صحيح لأن الدالة اللوغاريتمية دالة مقعرة. لنثبت ذلك :

إن المتباينة $(x-y)^2 \ge 0$ المحققة بوجه خاص من أجل كـــل x و y من $]0,+\infty[$ تؤدي إلى :

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy} \; .$$

ومن ثمّ :

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \ge \ln\sqrt{xy}$$

أي :

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \ge \frac{\ln x + \ln y}{2} \; .$$

تعني هذه العلاقة أن الدالة اللوغاريتمية دالة مقعرة لأنها مستمرة.

2) نكتب معنى تحدّب الدالة f :

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0,1]: f\left(tx + (1-t)y\right) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

ومعنى تحدب الدالة $\ln f$:

$$\forall x, y \in]0,+\infty[I, \forall t \in [0,1]: \ \ln\left(f(tx + (1-t)y\right) \le t\ln f(x) + (1-t)\ln f(y)$$

أي :

$$\forall x, y \in]0,+\infty[I, \forall t \in [0,1]: \ \ln\left(f(tx + (1-t)y)\right) \le \ln\left(f^t(x).f^{1-t}(y)\right)$$

ومنه :

$$\forall x,y\in]0,+\infty[I,\forall t\in[0,1]: f(tx+(1-t)y)\le f^{t}(x).f^{1-t}(y)$$

ومن السؤال الأول نستنتج :

$$\forall x,y\in]0,+\infty[I,\quad \forall t\in[0,1]:$$

$$f(tx+(1-t)y)\le f^{t}(x).f^{1-t}(y)\le tf(x)+(1-t)f(y).$$

وبالتالي فإن تحدب الدالة $\ln f$ يؤدي إلى تحدب f .

حل التمرين 18

طريقة الحل : تأكد أولا من أن :

$$\max(a+b,0)\le \max(a,0)+\max(b,0)$$

من أجل كل عددين حقيقيين. والبقية هي نتيجة من هذه الخاصية.

حل التمرين 19

1) الدالة قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ والدالة المشتقة هي :

$$f'(x)=-x^{\frac{1}{p}-1}(1-x^{\frac{1}{p}})^{p-1}.$$

يبيّن حساب المشتقة الثانية أنها موجبة. وبالتالي f' متزايدة. إذن f محدبة.

2) لما كانت f محدبة والأعداد α_i محصورة بين 0 و 1 و $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ و العناصر x_i تنتمي إلى مجال تعريف f فإن :

$$f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.x_i)\le \sum_{i=1}^{n}\alpha_i.f(x_i).$$

وبالتعويض نحصل على :

$$\left(1-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.x_i\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \le \sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i+b_i)^p}{\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p}.f\left(\frac{a_i^{\,p}}{(a_i+b_i)^p}\right),$$

أي :

$$\left(1-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i+b_i)^p}{\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p}.\frac{a_i^{\,p}}{(a_i+b_i)^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \le \sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i+b_i)^p}{\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p}.\left(1-\frac{a_i}{a_i+b_i}\right)^p$$

ومنه :

$$\left(1-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\,p}}{\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p}.b_i^{\,p}$$

وبالتالي :

$$\left(1-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p \le \frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,p}}{\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p}$$

وبالتجذير نحصل على :

$$\left(1-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)\le\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

إذن :

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p\right)^{\frac{1}{p}}}\le\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^p\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

ومن ثمّ نستنتج متباينة مينكوفسكي :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

****

الفصل الخـــامس

نظرية التزايدات المنتهية

ودستور تايلور

حلول التمارين

حل التمرين 1

1) الجواب : هناك نقطة حرجة واحدة هي $x = \frac{3}{8}$. وفي هذه النقطة نجد أن المشتق الثاني سالب تماما. وبالتالي فإن $f(\frac{3}{8})$ قيمة صغرى محلية.

2) لدينا :

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

ومنه فإن هناك نقطتين حرجتين هما $x = 1$ و $x = -1$.

وبخصوص المشتق الثاني نجد :

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+3)}{(x^2+1)}.$$

ومنه نحسب المشتق الثاني عند كل نقطة من النقطتين الحرجتين :

* عند $x=1$: $f''(1) = -4 < 0$. إذن هناك قيمة عظمى محلية عند $x=1$ هي $f(1) = \frac{1}{2}$.

* عند $x=-1$: $f''(1) = 4 > 0$. إذن هناك قيمة صغرى محلية عند $x=-1$، هي $f(1) = -\frac{1}{2}$.

3) لدينا :

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2-1 & : |x|>1 \\ -3x^2+1 & : |x|<1 \end{cases}$$

علما أنه من السهل إثبات أن f لا يقبل الاشتقاق عند النقطتين $x=1$ و $x=-1$. ومن ثمّ يتبيّن أن النقاط الحرجة في المجموعة $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ هي $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

عند الانتقال إلى المشتق الثاني :

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & : |x|>1 \\ -6x & : |x|<1 \end{cases}$$

نلاحظ أن $f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0$ و $f''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} < 0$. وعليه فإن : $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ قيمة صغرى محلية و $f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ قيمة عظمى محلية.

بقيت دراسة القيمتين $f(1)$ و $f(-1)$. إننا لا نستطيع الاستفادة من نتائج الاشتقاق لأن الدالة لا تقبل الاشتقاق عند النقطتين $x = 1$ و $x = -1$. وبالتالي لا بد أن نسلك طريقة أخرى.

لنلاحظ أولا أن $f(1) = 0$ ، ولنمعن النظر في إشارة $f(x)$ عندما يكون x مجاورا لـ 1. سندرك أن الدالة f تحافظ على إشارة موجبة في هذا الجوار (يمكن أخذ الجوار مساويا لـ $]0,+\infty[$). ولذلك يمكن القول إن

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) \geq 0 = f(1).$$

إذن $f(1)$ قيمة صغرى محلية.

بنفس الطريقة يتبيّن أن :

$$\forall x \in]-\infty,0[, \quad f(x) \leq 0 = f(-1).$$

ولذا فإن $f(-1)$ قيمة عظمى محلية.

خلاصة القول إن هناك 4 قيم قصوى محلية، إثنان عظميان (تدركان عند $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $x = -1$) وإثنان صغريان (تدركان عند $x = 1$ و $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$).

حل التمرين 2

1) خذ الدالة المعرّفة بالعبارة $f(x) = x^5 - 4x^3$. لاحظ أن $f'(0) = f''(0) = 0$، ورغم ذلك فإن $f(x) = x^3(x^2 - 4)$. وهذا يبيّن أن

إشارة f تتغيّر بجوار 0 علما أن $f(0) = 0$. ولذلك فإن f لا تدرك قيمة قصوى عند النقطة الحرجة $x = 0$ مع أن المشتق الثاني ينعدم عند النقطة الحرجة.

2) خذ الدالة المعّرفة بـ $f(x) = x^4$. إن لها قيمة صغرى عند $x = 0$ مع أن :

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 .$$

3) خذ الدالة المعرفة بـ $f(x) = -x^4$. إن لها قيمة عظمى عند $x = 0$ مع أن :

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 .$$

سؤال : ما رأيك في الدالة المعرّفة بـ $f(x) = x^3$ ... هل يمكن أن نتخذها مثالا للحالة الأولى عوض $f(x) = x^5 - 4x^3$؟

حل التمرين 3

نلاحظ أن الدالة مستمرة على المجال المتراص المعطى، ولذا فنحن نعلم أنها تدرك حديْها الأعلى والأدنى. والحد الأعلى يساوي هنا القيمة العظمى المطلقة، كما أن الحد الأدنى يمثل القيمة الصغرى المطلقة للدالة المعطاة.

أين تدرك الدالة القيمتين العظمى والصغرى؟ تدركهما عند طرفي المجال $[-1,1]$ أو داخل المجال المفتوح $]-1,1[$. وأين يمكن أن تدرك القيمتان

داخل المجال $]-1,1[$؟ إن النقاط الحرجة هي الوحيدة التي يمكن أن تدرك فيها الدالة قيمها القصوى.

لنحـــدد النقاط الحرجة للدالة في المجـــال $]-1,1[$. لدينا من أجل $x \neq 0$:

$$f'(x) = 8x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{-2}{3}}$$
$$= \frac{8x-1}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

ومنه $x = \frac{1}{8}$ نقطة حرجة. أما من أجل $x = 0$ فالدالة لا تقبل الاشتقاق (تأكد من ذلك باستخدام التعريف).

خلاصة القول إن النقاط التي يمكن أن تدرك عندها الدالة المعطاة قيمتيها العظمى والصغرى هي عناصر المجموعة $E = \left\{-1,\ 0,\ \frac{1}{8},\ 1\right\}$.

إن حساب قيم الدالة عند عناصر المجموعة E يمكّننا من تحديد القيم القصوى. لدينا : $f(-1) = 9$ ، $f(0) = 0$ ، $f(\frac{1}{8}) = -\frac{9}{8}$ ، $f(1) = 3$. من مقارنة هذه القيم يتبيّن أن :

- القيمة العظمى المطلقة على المجال $[-1,1]$ هي 9، وتدرك عند $x = -1$.

- القيمة الصغرى المطلقة على المجال $[-1,1]$ هي $-\frac{9}{8}$ ، وتدرك عند $x = \frac{1}{8}$.

حل التمرين 4

بما أن شروط نظرية التزايدات المنتهية محققة في المجال $[x, x+1]$ فإننا نستنتج وجود عدد c محصور بين x و $x+1$ بحيث :

$$\ln(x+1) - \ln x = (x+1-x)\frac{1}{c},$$

أي $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$. ولما كان $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{x}$ فمن أجل كل $0 < x$:

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln\frac{x+1}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

حل التمرين 5

الدالة تحقق (أكثر من) شروط نظرية التزايدات المنتهية. ولذلك توجد (على الأقل) نقطة c تحقق :

$$f(1) - f(-1) = \big(1-(-1)\big)f'(c).$$

وهذا يعني أن $2 = 2f'(c)$، أي $f'(c) = 1$. ونحن نعلم أن $f'(c) = 3c^2$. ولذلك فالمعادلة $f'(c) = 1$ تكتب على الشكل $3c^2 = 1$، ونلاحظ أن لها حلين هما $c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. وهو المطلوب.

حل التمرين 6

يتبيّن من الحساب المباشر أن العلاقة $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta-\alpha)f'(\gamma)$ تكتب على الشكل :

$$f(\beta)-f(\alpha)=a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)=(\beta-\alpha)(2a\gamma+b).$$

ومنه نستخلص أن $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$.

حل التمرين 7

إليك مثالا من هذا القبيل : نعرّف الدالة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=\begin{cases} x & : \quad 0\le x\le \frac{1}{2}, \\ -x+1 & : \quad \frac{1}{2}\le x\le 1. \end{cases}$$

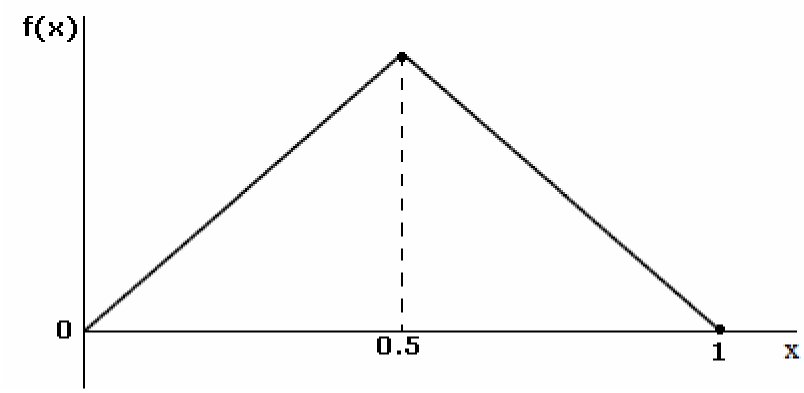
إنها تحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية ما عدا شرط الاشتقاق داخل المجال المفتوح $]0,1[$ حيث إنها لا تقبل الاشتقاق عند $x=\frac{1}{2}$.

لو نطبق نظرية التزايدات المنتهية لقلنا إنه توجـــد نقطـــة $c\in]0,1[$ بحيث : $f(1)-f(0)=(1-0)f'(c)$، أي $f'(c)=0$. بمعنى أن المشتق ينعدم في نقطة داخل المجال المفتوح $]0,1[$. إلا أننا نلاحظ، كما أسلفنا، أن f يقبل الاشتقاق عند كل نقطة من المجال المفتوح $]0,1[$ باستثناء $x=\frac{1}{2}$ علما أن :

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & : \quad 0< x< \frac{1}{2}, \\ -1 & : \quad \frac{1}{2}< x< 1, \end{cases}$$

وهو ما يبيّن أن المشتق لا ينعدم. ومنه لا يمكن تطبيق نظريـــة التزايـــدات المنتهية.

يمكن أن ندرك ذلك بشكل أفضل بالنظر إلى بيان الدالة f حيث لا نجد فيه نقطة يكون المماس عندها موازيا لمحور الفواصل (انظر الشكل أدناه، مثلا، حيث بيان الدالة يتشكل من القطعتين المستقيمتين الواقعتين فوق محور الفواصل) :



حل التمرين 8

نطبق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f-g$ في المجال $[y,x]$:
توجد نقطة $c\in[y,x]\subset I$ بحيث :

$$(f-g)(x)-(f-g)(y)=(x-y)(f-g)'(c).$$

عندما نستفيد من الفرض القائل إن $f'(c)-g'(c)\leq 0$ من أجل كل $c\in I$ وإن $x-y\geq 0$ فإننا نستنتج من المساواة السابقة :

$$\left(f(x)-f(y)\right)-\left(g(x)-g(y)\right)=(x-y)\left(f'(c)-g(c)\right)\leq 0,$$

أي $f(x)-f(y)\leq g(x)-g(y)$. وهو المطلوب.

حل التمرين 9

إذا كان n أصغر من 3 أو يساويه فالقضية واضحة.

لنفرض وجود 4 حلول $(x_i)_{i=1,2,3,4}$ بحيث $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. ولنضع $f(x) = x^n + ax - b$. إن الدالة f تحقق شروط نظرية رول في المجال $[x_1, x_2]$ وكذلك في المجالين $[x_2, x_3]$ و $[x_3, x_4]$ لأن $f(x_1) = f(x_2) = 0$ و $f(x_2) = f(x_3) = 0$ و $f(x_3) = f(x_4) = 0$.

وبالتالي توجد 3 أعداد $(y_i)_{i=1,2,3}$ تنتمي، على التوالي، إلى المجالات $[x_1, x_2]$ و $[x_2, x_3]$ و $[x_3, x_4]$ بحيث $f'(y_1) = f'(y_2) = f'(y_3) = 0$.

وعليه يمكننا أن نطبق من جديد نظرية رول على الدالة f' في المجالين $[y_1, y_2]$ و $[y_2, y_3]$. ومن ثمّ نحصل على عددين مختلفين z_1 و z_2 ينتميان، على التوالي، إلى المجالين $[y_1, y_2]$ و $[y_2, y_3]$ بحيث $f''(z_1) = f''(z_2) = 0$، أي أن المعادلة $n(n-1)z^{n-2} = 0$ تقبل حلين مختلفين (هما z_1 و z_2). وهذا غير صحيح (تذكّر أن n أكبر من 3).

حل التمرين 10

1) نفرض أن $f' \leq g'$ وأن $f(a) \leq g(a)$ ونطبق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f - g$ في المجال $[a, x]$ حيث $a \leq x \leq b$ فنجد نقطة c من المجال $[a, x]$ تحقق العلاقة :

$$(f - g)(x) - (f - g)(a) = (x - a)(f - g)'(c) .$$

ومنه يأتي :

$$f(x)-g(x)=f(a)-g(a)+(x-a)\big(f'(c)-g'(c)\big)\le 0+0=0$$

لأن $f(a)-g(a)\le 0$ و $x-a\le 0$ و $f'(c)-g'(c)\le 0$.

2) هذه الحالة مماثلة للحالة السابقة.

حل التمرين 11

1) نلاحظ أن الدالة g المعرفة بـــ $g(x)=x-\cos x$ متزايدة (لأن مشتقها موجب) على المجال $[0,1]$ وأن $g(0)\times g(1)<0$. وبالتالي يوجد عدد α من $]0,1[$ يحقق $g(\alpha)=0$ ، أي $\cos\alpha=\alpha$.

2) نثبت ذلك بالتراجع : لدينا $u_1=\cos u_0=\cos 1$. ومنه $0<u_1<1$. نفرض الآن أن $0<u_n<1$. بما أن الدالة جيب التمام متناقصة في المجال $[0,1]$ فإن العلاقة $0<u_n<1$ تؤدي إلى $\cos 1<\cos u_n<\cos 0$. ومنه نستخلص أن : $0<u_{n+1}<1$.

3) بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة f في المتراص $[x,y]\subset[0,1]$ نحصل على عدد c من $]0,1[$ بحيث :

$$0<\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\sin c<\sin 1$$

لأن دالة الجيب متزايدة وموجبة تماما في المجال $]0,1[$. ومنه تأتي العلاقة :

$$|f(y)-f(x)|<(\sin 1)|y-x| .$$

4) نلاحظ أن العلاقة المطلوب إثباتها محققة من أجل $n=0$. لنفرض صحتها من أجل الرتبة n ونثبت صحتها من أجل الرتبة $n+1$. لدينا :

$$|u_{n+1}-\alpha| = |f(u_n)-f(\alpha)| < (\sin 1)|u_n-\alpha|$$

وباستخدام فرض التراجع

$$|u_n-\alpha| \le (\sin 1)^n |1-\alpha|$$

يتضح أن :

$$|u_{n+1}-\alpha| < (\sin 1)|u_n-\alpha| \le (\sin 1)^n |1-\alpha| \,.$$

وهكذا يتم البرهان على صحة العلاقة $|u_n-\alpha| \le (\sin 1)^n |1-\alpha|$.

ومن جهة أخرى، نعلم أن $\lim\limits_{n}(\sin 1)^n = 0$ لأن $|\sin 1| < 1$. ولذا نستخلص بالمرور إلى النهاية في المتباينة المزدوجة :

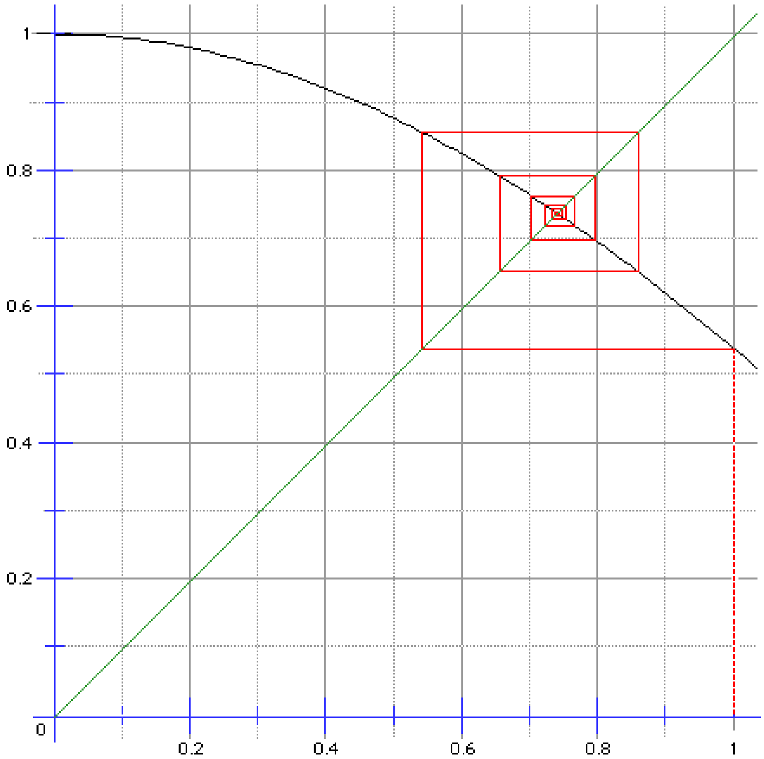
$$0 \le |u_n-\alpha| \le (\sin 1)^n |1-\alpha|$$

أن $\lim\limits_{n}(u_n-\alpha) = 0$، أي $\lim\limits_{n} u_n = \alpha$.

ملاحظة

هذه الطريقة لإثبات تقارب المتتالية المعطاة ليست وحيدة.

العدد α المطلوب هو فاصلة نقطة تقاطع المنصف الأول وبيان الدالة f. لاحظ هندسيا (في الشكل التالي) كيف تتقارب هذه المتتالية نحو نهايتها α التي تساوي بالتقريب 0.739085 :



حل التمرين 12

لا. ذلك أن تطبيق هذه النظرية يؤدي من جهة إلى وجود عدد c يحقق : $f(1)-f(0)=(2c,3c^2)$ مع العلم أن $f(1)-f(0)=(1,0)$. من الواضح أن ذلك مستحيل.

حل التمرين 13

نطلب من القارئ التأكد من قيام شروط قاعدة لوبيتال في كل مرة، التي نستعملها أحيانا عدة مرات في نفس التمرين، وسنكتفي بتقديم النتائج.

1) لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x - x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\cos x - 1}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{-\cos x}=-6\,.$$

2) لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{\cos x}=1\,.$$

3) لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1}=1\,.$$

لاحظ أن هناك طريقة أخرى لإيجاد هذه النهاية، وهي تتمثل في الضرب في "المرافق" :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right).\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\\&=1.\end{aligned}$$

4) لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0\,.$$

5) لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{24x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{24}{e^x}=+\infty\,.$$

حل التمرين 14

نلاحظ انطلاقا من خواص الدالة المثلثية أن :

$$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$$
$$f^{(2n)}(0)=0$$

ومنه فإنه يوجد عدد c محصور بين 0 و x بحيث :

$$f(x)=\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{p!}x^{2p+1}+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\,.$$

ذلك هو نشر ماك لوران. أما الباقي فهو $R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

لاحظ (بفضل كون القيمة المطلقة لأي مشتق لـــ f يساوي إما $|\sin x|$ وإما $|\cos x|$) أن $|R_n|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

لنضع $u_n=\frac{|x|^n}{n!}$ بعد تثبيت x كعنصر من $\mathbb{R}^*$. لنثبت أن $\lim_{x\to+\infty}u_n=0$. من السهل إثبات أن المتتالية متناقصة تماما، وهي محدودة من الأدنى. ولذلك فهي متقاربة. لتحديد نهايتــها نكتب $u_{n+1}=\frac{|x|}{n+1}u_n$ ونمرّ إلى النهاية في طرفي المساواة فنكتشف أن :

$$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{n+1}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{n+1}\times\lim_{n\to+\infty}u_n=0\times\lim_{n\to+\infty}u_n=0\,.$$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. إذن :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0 .$$

ملاحظة

لدينا نفس النتيجة فيما يخص مآل الباقي إلى 0 حتى لو نشرنا f نشرا "تايلوريا" (أي نشر بجوار نقطة ليست بالضرورة 0).

حل التمرين 15

لاحظ أن الدالة معرّفة من أجل $x \in]-1,+\infty[$. نحسب المشتقات المتوالية بالتراجع فنجد أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} .$$

ومنه يأتي

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! .$$

ولذلك فإن النشر المطلوب يكتب على الشكل :

$$f(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p} x^p + \frac{(-1)^n (1+c)^{-(n+1)}}{n+1} .$$

****

الفصل الخامس

النشر المحدود

حلول التمارين

حل التمرين 1

لدينا $\lim_{x\to a} f(x)=0$. نضع في ما يلي $f(x)=y$ فيكون (تذكّر أن : $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ و $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}&=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\\&=1,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}&=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\\&=1.\end{aligned}$$

وهذا يعني تكافؤ f و $\ln(1+f)$، وكذلك تكافؤ f و e^f-1. وبما أن علاقة التكافؤ متعدية فإن f و $\ln(1+f)$ و e^f-1 متكافئة.

حل التمرين 2

1) لدينا : $\sin x\overset{0}{\sim}x$ و $\ln(1+x^2)\overset{0}{\sim}x^2$ و $x\tan x\overset{0}{\sim}x^2$.

ومنه :

$$\frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x\tan x} \overset{0}{\sim} \frac{x.x^2}{x^2}.$$

وبالتالي : $\frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x\tan x} \overset{0}{\sim} x$.

2) لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\left(x - x\cos x\right) = 0$. ومنه :

$$\tan(x - x\cos x) \overset{0}{\sim} x - x\cos x .$$

ثم إن :

$$x - x\cos x \overset{0}{\sim} x - x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$x - x\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3}{2}.$$

كما أن :

$$\sin x + \cos x - 1 \overset{0}{\sim} x - \frac{x^2}{2} .$$

ينتج مما سبق أن :

$$\frac{\tan(x - x\cos x)}{\sin x + \cos x - 1} \overset{0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{2}}{x - \frac{x^2}{2}}$$

لكن :

$$\frac{\frac{x^3}{2}}{x - \frac{x^2}{2}} \overset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} .$$

وعليه :

$$\frac{\tan(x - x\cos x)}{\sin x + \cos x - 1} \overset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} .$$

3) لدينا : $\sqrt{1+x^2} \overset{+\infty}{\sim} x$ و $\ln(\frac{x}{1+x}) = \ln(1-\frac{1}{1+x})$. ثم إن :

$$\ln(1-\frac{1}{1+x}) \overset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{1+x}$$

$$-\frac{1}{1+x} \overset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}.$$

وعليه : $\ln(\frac{x}{1+x}) \overset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$.

ومن جهة أخرى : $\sin\frac{1}{x} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. ينتج من ذلك أن :

$$\frac{\sqrt{1+x^2}\ln(\frac{x}{1+x})}{\sin\frac{1}{x}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{x.(-\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} .$$

ومنه :

$$\frac{\sqrt{1+x^2}\ln(\frac{x}{1+x})}{\sin\frac{1}{x}} \overset{+\infty}{\sim} -x .$$

حل التمرين 3

نلاحظ أولا أن تكافؤ التابعين f و g يستلزم أن لهما نفس الإشارة بجوار a. ولذا نفرض مثلا أنهما موجبان بجوار هذه النقطة.

نضع $\lim_{x\to a} f(x) = l$. من الواضح أن هذا يؤدي إلى أن لدينا أيضا : $\lim_{x\to a} g(x) = l$. ذلك أن تكافؤ التابعين يمكّننا من كتابة $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)$ حيث $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. ومنه :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} g(x) &= \lim_{x\to a}\big(f(x)-\varepsilon(x)\big)\\ &= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a}\varepsilon(x)\\ &= l-0.\end{aligned}$$

وبالتالي : $l = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

نفرض الآن (بناء على المعطيات وعلى ما سبق ذكره حول تساوي نهايتي التابعين) أن :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l \neq 1 .$$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\ln f(x) &= \lim_{x\to a}\ln\big(g(x)+\varepsilon(x)\big)\\ &= \lim_{x\to a}\ln g(x)\left(1+\frac{\varepsilon(x)}{g(x)}\right)\\ &= \lim_{x\to a}\ln g(x) + \lim_{x\to a}\ln\left(1+\frac{\varepsilon(x)}{g(x)}\right).\end{aligned}$$

لاحظ أن : $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varepsilon(x)}{g(x)} = 0$ و $\lim\limits_{x\to a}\ln g(x) = \ln l \neq 0$.

وبالتالي :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\ln f(x) &= \lim_{x\to a}\ln g(x)\\ &= \ln l \neq 0.\end{aligned}$$

إذن :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} &= \frac{\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\ln g(x)}\\ &= \frac{\ln l}{\ln l}\\ &= 1.\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

حل التمرين 4

لاحظ أن الأمر يتعلق بعدم تعيين. لهذا نضع $x=\frac{1}{y}$ فيكتب f على الشكل :

$$f(x)=g(y)=\frac{1}{y}\left(\sqrt{1+\sqrt{1+y^2}}-\sqrt{2}\right)=\frac{u(y)}{y}$$

حيث $u(y)=\sqrt{1+\sqrt{1+y^2}}-\sqrt{2}$، مع الملاحظة أن $x\to+\infty$ يكافئ $y\to 0^+$.

ننشر u بجوار 0. لذلك نحسب مشتقي f الأوليْن. لدينا :

$$u'(x)=\frac{y}{2\sqrt{1+\sqrt{1+y^2}}.\sqrt{1+y^2}},$$

$$u''(x)=\frac{2\sqrt{1+y^2}-y^2\sqrt{1+y^2}+2}{4\left(1+\sqrt{1+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}.\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

وبالتالي فإن $u(0)=0$، $u'(0)=0$، $u''(0)=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$. ومنه فنشر u حتى الرتبة الثانية هو :

$$u(y)=0+\frac{0.y}{1}+\frac{y^2}{2^{\frac{3}{2}}.2}+\circ(y^2)$$
$$=\frac{y^2}{2.\sqrt{2}}+\circ(y^2).$$

وبالرجوع إلى تعريف g نحصل على $g(y)=\frac{y}{2.\sqrt{2}}+\circ(y)$. وبالعودة إلى f نحصل على المطلوب، وهو أن : $f(x)\overset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{2}.x}$.

حل التمرين 5

يمكن استخدام العلاقة التالية مباشرة باعتبار $n=3$ و $\alpha=-\frac{1}{2}$:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\circ(x^{n})$$

أو حساب مشتقات f عند 0 حتى الرتبة 3 والتعويض في عبارة النشر فنحصل في كل من الحالتين على:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^{2}}{8}-\frac{5x^{3}}{16}+\circ(x^{3}).$$

حل التمرين 6

يمكن استخدام العلاقة التالية مباشرة باعتبار $n=6$ و $\alpha=-\frac{1}{2}$ واستبدال x بـ x^{2} (لاحظ أن الدالة هنا زوجية وبالتالي سوف لن نجد سوى الحدود ذات الدليل الزوجي) :

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\circ(x^{n})$$

أو حساب مشتقات f عند 0 حتى الرتبة 6 والتعويض في عبارة النشر فنحصل في كل من الحالتين على :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}=1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{3x^{4}}{8}-\frac{5x^{6}}{16}+\circ(x^{6}).$$

تعقيب

يمكن في النشر السابق تعويض $\circ(x^{6})$ بـ $\circ(x^{7})$ لأن الدالة زوجية ولذا فالحد الموالي – لو واصلنا النشر– سيكون أس المتغير فيه 6.

الحل التمرين 7

يمكن استخدام العلاقة التالية مباشـــرة باعتبـــار $n=4$ و $\alpha=-\frac{1}{2}$ واستبدال x بـــ $-x^2$ (لاحظ أن الدالة هنا زوجية وبالتالي سوف لن نجد سوى الحدود ذات الدليل الزوجي) :

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

أو حساب مشتقات f عند 0 حتى الرتبة 4 والتعويض في عبـــارة النـــشر فنحصل في كل من الحالتين على:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+\circ(x^4).$$

تعقيب

يمكن في النشر السابق تعويض $\circ(x^4)$ بـــ $\circ(x^5)$ لأن الدالة زوجية، ولذا فالحد الموالي – لو واصلنا النشر– سيكون أس المتغير فيه 6.

حل التمرين 8

يمكن استخدام العلاقة التالية مباشرة باعتبار $n=2$ و $\alpha=-2$:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

أو حساب مشتقات f عند 0 حتى الرتبة 2 والتعويض في عبارة النشر فنحصل في كل من الحالتين على :

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2+\circ(x^2).$$

حل التمرين 9

طريقة أولى

يمكن استخدام العلاقة التالية مباشرة باعتبار $n=5$ و $\alpha=-1$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

واستبدال x بـــ x^2 للحصول على نشر $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$، ثم نضرب النشر المحصل عليه في كثير الحدود $1+x^3$، ولا نحافظ إلا على الحـــدود الـــتي لا يتجاوز أس متغيرها 5. بذلك نحصل على :

$$g(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\circ(x^5)\ .$$

لاحظ أننا استفدنا هنا من كون الدالة g زوجية، وبالتالي فليس هناك حدود غير منعدمة تحمل x^3، x^5، ... نقوم بعد ذلك بضرب g في $1+x^3$ فنحصل على :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x^3)g(x) \\
&= \frac{1}{1+x^2} \\
&= (1+x^3)\left[1-x^2+x^4+\circ(x^5)\right] \\
&= 1-x^2+x^4+\circ(x^5)+x^3-x^5+x^7+x^3.\circ(x^5) \\
&= 1-x^2+x^3+x^4-x^5+\left[\circ(x^5)+x^7+x^3.\circ(x^5)\right] \\
&= 1-x^2+x^3+x^4-x^5+\circ(x^5).
\end{aligned}$$

ذلك أنه من السهل التأكد من العلاقة :

$$\circ(x^5)+x^7+x^3.\circ(x^5)=\circ(x^5)\ .$$

طريقة ثانية

نقسم قسمة إقليدية كثير الحدود $1+x^3$ على كثير الحدود $1+x^2$ وفق الأس المتزايد فنجد بسهولة أن :

$$f(x) = 1 - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 + \circ(x^5) .$$

طريقة ثالثة (مطابقة المعاملات)

نكتب $(1+x^2)f(x) = 1+x^3$ ونعتبر الكتابة :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^5 + a_5 x^5 + \circ(x^5)$$

ثم نفكك الجداء :

$$(1+x^2)\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^5 + a_5 x^5 + \circ(x^5)\right]$$

ونقارن معاملاته بمعاملات الطرف الثاني في المساواة $(1+x^2)f(x) = 1+x^3$ فتنتج الجملة التالية:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 + a_3 = 1, \\ a_1 = 0, \\ a_0 + a_2 = 0, \\ a_2 + a_4 = 0, \\ a_3 + a_5 = 0. \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -1, \\ a_3 = 1,\ a_4 = 1,\ a_5 = -1. \end{cases}$$

وهذا يؤدي بالضبط إلى النشر الذي حصلنا عليه بالطريقة الأولى.

حل التمرين 10

طريقة أولى

نحسب مشتقات الدالة f حتى الرتبة الرابعة عند الصفر ونعوّض (في النشر) المشتقات بقيمها :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

أي في :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \circ(x^4)$$

فنجد :

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x},$$
$$f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x},$$
$$f'''(x) = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{2\cos 2x - 4}{\cos 4x}.$$

ولذا :

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = -2.$$

وبالتالي فالنشر المطلوب هو :

$$f(x) = 0 + 0x - \frac{1}{2!}x^2 + 0x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \circ(x^4)$$
$$= -\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \circ(x^4).$$

طريقة ثانية

نضع $y=\cos x-1$. لاحظ أن مآل x إلى الصفر يكافئ مآل y إلى الصفر. ولذا يمكن كتابة $f(x)=g(y)=\ln(1+y)$ ونشر g بالنسبة لـــ y بجوار الصفر؛ كما ننشر y بجوار الصفر بالنسبة لـــ x، ثم نركّب النشرين.

من نشر دالة جيب التمام :

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\circ(x^{2n}).$$

نستنتج أن : $y=\cos x-1=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\circ(x^4)$.

ومن نشر الدالة $\ln(1+y)$ يأتي :

$$\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\circ(y^4).$$

بتركيب النشرين نحصل على كثير الحدود (مع الحفاظ فقط على الحدود التي لا يتجاوز أس متغيرها 4): $-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}x^4$

ومنه نجد مجددا النشر الذي توصلنا إليه بالطريقة الأولى، وهو :

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+\circ(x^4).$$

حل التمرين 11

للحصول على هذا النشر نضع $y=\frac{1}{x}$ فيرد الأمر إلى نشر بجوار 0 .

نكتب :

$$f(x)=g(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y}}$$

فنلاحظ أنه يمكن استخدام النشر باعتبار $\alpha=-\frac{1}{2}$ و $n=2$ وباستبدال (في العلاقة) x بـــ $-y$:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

وهكذا نجد : $f(x)=g(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y}}=1+\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2+\circ(y^2)$

أي :

$$f(x)=1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\circ(\frac{1}{x^2}).$$

تعقيب

كان بإمكاننا ملاحظة أن الدالة المعطاة زوجية، وبالتالي نكون واثقين مسبقا بأننا لن نحصل إلا على أسس زوجية.

حل التمرين 12

باستخدام العلاقة $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ والنشر المحدود للدالة $\ln(1+y)$ عندما يؤول y إلى الصفر، نحصل على :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}&=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\\&=e^1=e.\end{aligned}$$

لاحظ استعمال استمرار الدالة الأسية عندما كتبنا : $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$.

حل التمرين 13

يكفي أن نكتب (باستخدام النشر) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^2(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2 - x^2(1-\frac{1}{2}x^2)}{x^2(\frac{1}{2}x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{6}}{x^2(\frac{1}{2}x^2)} = \frac{1}{3}.$$

حل التمرين 14

نستــخدم النــشر المحدود بجوار $x = 3$: ننشر البــسط $f(x) = \sqrt{x+3} - 3$ والمقام $g(x) = \sqrt{x+1} - 2$ فنجد :

$$f(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \circ(x-3)^3$$
$$= 0 + \frac{x-3}{6} + +\circ(x-3)^3,$$

$$g(x) = g(3) + g'(3)(x-3) + \circ(x-3)^3$$
$$= 0 + \frac{x-3}{4} + +\circ(x-3)^3.$$

وبالتالي :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x-3}{6}+\circ(x-3)^2}{\frac{x-3}{4}+\circ(x-3)^2}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x-3}{6}}{\frac{x-3}{4}+\circ(x-3)^2}+\lim_{x\to 3}\frac{\circ(x-3)^2}{\frac{x-3}{4}+\circ(x-3)^2}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}+\circ(x-3)}+\lim_{x\to 3}\frac{\circ(x-3)}{\frac{1}{4}+\circ(x-3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}+\lim_{x\to 3}\circ(x-3)}+\frac{\lim_{x\to 3}\circ(x-3)}{\frac{1}{4}+\lim_{x\to 3}\circ(x-3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}+0}+\frac{0}{\frac{1}{4}+0}$$

$$=\frac{4}{6}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

حل التمرين 15

يؤدي نشر الدالة الجيبية (حتى الرتبة الثانية أو الثالثة) إلى :

$$\sin x = 1-\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3)\ .$$

ثم نحسب :

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\circ(x^2)\ .$$

ومنـــــه (باعتبـــــار أن $\circ(x^2)+\circ(x^2)=\circ(x^2)$ و $x^2\circ(x^2)=\circ(x^2)$ و $\left(\circ(x^2)\right)^2=\circ(x^2)$) :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2&=\left(1-\frac{x^2}{6}+\circ(x^2)\right)^2\\&=1+\frac{x^4}{36}-\frac{x^2}{3}+2\circ(x^2)\left(1-\frac{x^2}{6}\right)+\left(\circ(x^2)\right)^2\\&=1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{36}+2\circ(x^2)-\frac{x^2}{3}\circ(x^2)+\left(\circ(x^2)\right)^2\\&=1-\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)+\circ(x^2)+\circ(x^2)\\&=1-\frac{x^2}{3}+\circ(x^2).\end{aligned}$$

وهكذا فالنشر المطلوب هو : $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1-\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)$.

حل التمرين 16

1) ننشر الدالة $g(x)=\ln\cos x$ حتى الرتبة الرابعة فنجد (لاحظ أن الدالة زوجية) :

$$(\ln\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x},$$
$$(\ln\cos x)'' = -\frac{1}{\cos^2 x},$$
$$(\ln\cos x)^{(3)} = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$
$$(\ln\cos x)^{(4)} = \frac{2\cos 2x-4}{\cos 4x}.$$

نحسب الآن قيم هذه المشتقات عند الصفر فيأتي :

$$\ln\cos 0=0,$$
$$(\ln\cos x)'(0)=0,$$
$$(\ln\cos x)''(0)=-1,$$
$$(\ln\cos x)^{(3)}(0)=0,$$
$$(\ln\cos x)^{(4)}(0)=-2.$$

ومن ثمّ نستنتج النشر :

$$f(x) = \frac{0+0x-\frac{x}{2}+0x^3-\frac{x^4}{12}+\circ(x^5)}{x}$$
$$= -\frac{1}{2}-\frac{x^3}{12}+\circ(x^4).$$

2) نلاحظ في البداية أن تعريف $h(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ هو :

$$h(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln\cos x}{x}} = e^{f(x)}$$

ولما كان نشر الدالة الأسية يكتب على الشكل :

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{4!}+\circ(x^4)$$

فإن :

$$e^{f(x)}=1+f(x)+\frac{f(x)^2}{2}+\frac{f(x)^3}{6}+\frac{f(x)^4}{4!}+\circ(f(x)^4)$$
$$=1-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\circ(x^4)+\left[-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\circ(x^4)\right]^2$$
$$+\left[-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\circ(x^4)\right]^3+\left[-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\circ(x^4)\right]^4$$
$$+\circ\left(\left[-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\circ(x^4)\right]^4\right)$$

نتخلص من كل رموز لوندو المتكررة التي تُرَدّ إلى $\circ(x^4)$ ونعوضها برمز واحد $\circ(x^4)$ في آخر النشر. عندئذ يمكن كتابة النشر السابق على النحو التالي :

$$e^{f(x)}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\left[-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right]^2$$
$$+\left[-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right]^3+\left[-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right]^4+\circ(x^4),$$

وبعد ذلك نجري عملية التفكيك والتخلص من كل حدّ يكون فيه $5\le n$ في x^n (لأن مثل هذه الحدود تساوي كلها $\circ(x^4)$) فنحصل على :

$$e^{f(x)}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{48}+\frac{x^4}{384}+\circ(x^4).$$

نقوم ببعض الاختصارات في العلاقة السابقة فيأتي النشر المطلوب، وهو :

$$h(x)=\left(\ln\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{5x^3}{48}+\frac{17x^4}{384}+\circ(x^4)\,.$$

حل التمرين 17

الطريقة الأولى

ننشر البسط والمقام حتى الرتبة الخامسة لأن المقام يكافئ x بجوار الصفر فنجد :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^5),$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \circ(x^5).$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\ln(1+x)} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^5)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \circ(x^5)} \\ &= \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \circ(x^4)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \circ(x^4)}. \end{aligned}$$

بعد ذلك نلجأ إلى القسمة الإقليدية لكثير حدود على كثير حدود فنحصل على النشر المطلوب، وهو :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \circ(x^4)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \circ(x^4)} \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{240} + \circ(x^4). \end{aligned}$$

الطريقة الثانية

نكتب المساواة $f(x)=\dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$ على الشكل :

$$f(x).\ln(1+x)=\sin x$$

ونستعمل دستور ليبنيتز لاشتقاق جداء دالتين من الرتبة الأولى حتى الرتبة الخامسة فيأتي على الترتيب:

$$\big(f(x).\ln(1+x)\big)'=f'(x).\ln(1+x)+\frac{f(x)}{1+x}=\cos x,$$

$$\big(f(x).\ln(1+x)\big)''=f''(x).\ln(1+x)+\frac{2f'(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}=-\sin x,$$

$$\big(f(x).\ln(1+x)\big)'''=f'''(x).\ln(1+x)+\frac{3f''(x)}{1+x}-\frac{3f'(x)}{(1+x)^2}+\frac{2f(x)}{(1+x)^3}$$
$$=-\cos x,$$

$$\big(f(x).\ln(1+x)\big)^{(4)}=f^{(4)}(x).\ln(1+x)+\frac{4f'''(x)}{1+x}-\frac{6f''(x)}{(1+x)^2}$$
$$+\frac{8f'(x)}{(1+x)^3}-\frac{6f(x)}{(1+x)^4}$$
$$=\sin x,$$

$$\big(f(x).\ln(1+x)\big)^{(5)}=f^{(5)}(x).\ln(1+x)+\frac{5f^{(4)}(x)}{1+x}-\frac{10f'''(x)}{(1+x)^2}$$
$$-\frac{4f''(x)}{(1+x)^3}-\frac{30f'(x)}{(1+x)^4}+\frac{24f(x)}{(1+x)^5}$$
$$=\cos x.$$

نحسب الآن بالتعويض في السطور الخمسة السابقة قيم مشتقات f عند الصفر فيأتي من تلك السطور على التوالي : $f(0)=1$ ، $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ ،

$f''(0)=-\frac{1}{2}$ ، $f'''(0)=-\frac{1}{4}$ ، $f^{(4)}(0)=-\frac{1}{10}$. ولما كان النشر المطلوب من الشكل :

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x}{1}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!}+\circ(x^4)$$

فإن تعويض مشتقات f بقيمها في هذا النشر يعطي مباشرة النشر المطلوب، وهو :

$$f(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{240}+\circ(x^4).$$

لاحظ أنه يطابق النشر التي نتج عن الطريقة الأولى.

حل التمرين 18

نشتق f أربع مرات ونحسب صور المشتقات عند 0. لدينا :

$f'(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. وبالتالي : $f'(0)=0$ ،

$f''(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. وبالتالي : $f'(0)=0$ ،

$f''(x)=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. وبالتالي : $f''(0)=-2$ ،

$f'''(x)=\frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$. وبالتالي : $f'''(0)=0$ ،

$f^{(4)}(x)=\frac{25(1-10x^2+5x^4)}{(1+x^2)^5}$. وبالتالي : $f^{(4)}(0)=24$.

ومنه :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^2}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} + \circ(x^4)$$
$$= 1 - x^2 + x^4 + \circ(x^4)$$

وهكذا يمكن أن نستنتج من هذا النشر أن f تكافئ بجوار الصفر كلا من كثيرات الحدود التالية :

$$f(x) \sim 1,$$
$$f(x) \sim 1 - x^2,$$
$$f(x) \sim 1 - x^2 + x^4.$$

حل التمرين 19

بإيجاز : نلاحظ أن الدالة فردية، وبالتالي يكفي دراستها في $\mathbb{R}^+$ والاستفادة في رسم البيان من التناظر بالنسبة لمركز المعلم.

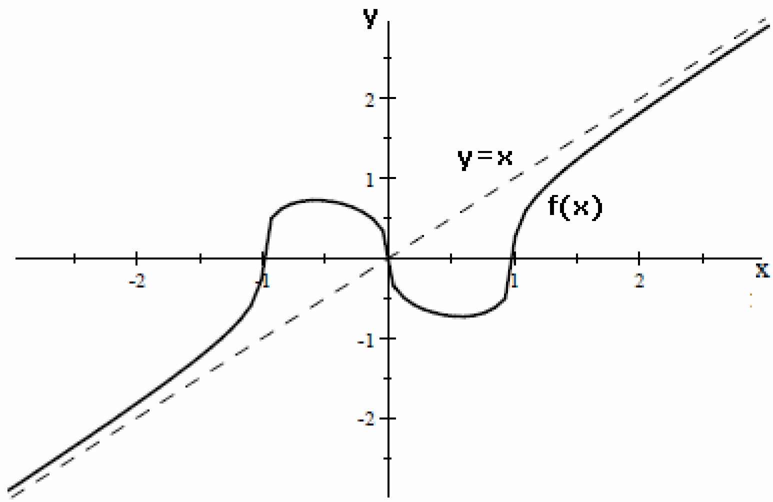
نحسب النهاية عند $+\infty$، ونعيّن بعض قيم وإشارات الدالة في مجال تعريفها، وكذلك المشتق (الموجود في كل نقطة من مجال التعريف ما عدا 0 و 1) فنجد :

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 1}{\left(x^3 - x\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

بعد ذلك ندرس إشارة المشتق فنلاحظ أنه موجب في اتحاد المجالين $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right[\cup]1, +\infty[$ وسالب في المجال $\left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$. وهكذا تكون الدالة متزايدة في $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right[\cup]1, +\infty[$ ومتناقصة في $\left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$.

نلاحظ أيضا أن المنصف الأول خط مقارب من جهتي ∞+ و ∞- .

بمراعاة جميع هذه المعلومات وحساب بعض قيم الدالة عند بعـــض النقاط يمكننا رسم بيانها :



****

الفصل السابع

الدوال المألوفة

حلول التمارين

حل التمرين 1

1) لدينا :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{p-1}{n})\\
&=\frac{1}{p!}\times\frac{(n-1)(n-2)...(n-(p-1))}{p^{p-1}}\times\frac{(n-p)...2.1}{(n-p)...2.1}\\
&=\frac{1}{p!}\times\frac{(n-1)!}{n^{p-1}}\times\frac{1}{(n-p)!}\\
&=\frac{1}{p!}\times\frac{n!}{n^{p}}\times\frac{1}{(n-p)!}\\
&=\frac{1}{n^{p}}C_{n}^{\ p}\\
&=u_{n}.
\end{aligned}$$

ومنه العلاقة المطلوبة.

2) لدينا من أجل كل عددين طبيعيين n و k بحيث $k \leq n+1$:

$$(1-\frac{k}{n})\leq(1-\frac{k}{n+1}) .$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^p}C_n^{\ p} &= \frac{1}{p\,!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{p-1}{n})\\ &\le \frac{1}{p\,!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{p-1}{n+1})\\ &= \frac{1}{(n+1)^p}C_{n+1}^{\ p}\end{aligned}$$

ومن ثمّ نستخلص تزايد المتتالية (u_n).

ومن جهة أخرى :

$$\forall j=1,...,p-1: \qquad \left(1-\frac{p-1}{n}\right)\le\ 1-\frac{j}{n}\le 1,$$

ومنه :

$$\left(1-\frac{p-1}{n}\right)^{p-1}\le(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{p-1}{n})\le 1.$$

وبالتالي :

$$\left(1-\frac{p-1}{n}\right)^{p-1}\frac{1}{p!}\le u_n\le\frac{1}{p!}.$$

لاحظ أن $\lim\limits_{n}\left(1-\frac{p-1}{n}\right)^{p-1}=1$ (تأكد من ذلك بتطبيق التعريف).

ولذلك عندما نجعل n يؤول إلى $+\infty$ في المتباينة السابقة (مع ترك p مثبتا) نحصل على المطلوب، وهو أن نهاية المتتالية (u_n) تساوي $\frac{1}{p!}$.

حل التمرين 2

1) النهاية $\lim\limits_{x\to e}\frac{x^e-e^x}{x-e}$: لحساب هذه النهاية يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال. كما يمكن استخدام النشر المحدود. نضع مثلا $y=x-e$ فيأتي :

$$\lim_{x\to e}\frac{x^e-e^x}{x-e}=\lim_{y\to 0}\frac{(e+y)^e-e^e.e^y}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^e+e.e^{e-1}y-e^e.(1+y)+\circ(y)}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{\circ(y)}{y}$$
$$=0.$$

2) النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\ln(1+x)}-\sqrt{\ln x}\right)$: لحساب هذه النهاية نستفيد من خواص الدوال المتكافئة في الكتابة :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\ln(1+x)}-\sqrt{\ln x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\ln(1+x)}-\sqrt{\ln x}\right)\left(\sqrt{\ln(1+x)}+\sqrt{\ln x}\right)}{\sqrt{\ln(1+x)}+\sqrt{\ln x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{2\sqrt{\ln x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{2\sqrt{\ln x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$
$$=0.$$

3) النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\left(3^x-2^x\right)$: لحساب هذه النهاية يمكن استخدام النشر المحدود. لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x-b^x}{x}\right)&=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{x\ln a}-e^{x\ln b}}{x}\right)\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x\ln a-1-x\ln b+\circ(x)}{x}\right)\\&=\lim_{x\to0}\left(\ln a-\ln b+\frac{\circ(x)}{x}\right)\\&=\ln a-\ln b.\end{aligned}$$

حل التمرين 3

لما كان $x\in[-1,0[\cup]0,1]$ يمكننا أن نضع $x=\cos t$. ثم إن العبارة المعطاة فردية، ولذا يكفي أن ندرسها في المجال $]0,1]$. لدينا من أجل $x\in]0,1]$:

$$\begin{aligned}\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}&=\arctan\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos x}\\&=\arctan\frac{|\sin t|}{\cos t}.\end{aligned}$$

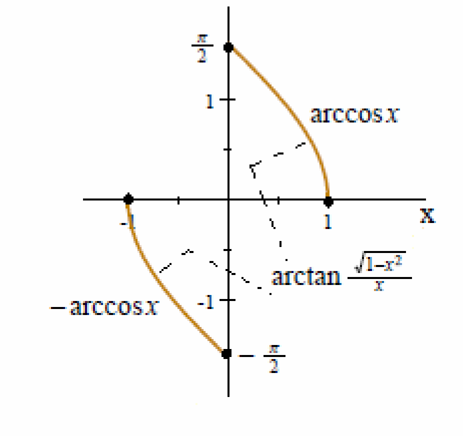
إذا كان $x\in]0,1]$ فإن $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. وبالتالي $\sin t$ موجب. وعليه :

$$\begin{aligned}\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}&=\arctan\frac{|\sin t|}{\cos t}\\&=\arctan(\tan t)\\&=t\\&=\arccos x.\end{aligned}$$

ومن فردية العبارة المعطاة نستخلص أن :

$$\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\begin{cases}\arccos x, & x\in]0,1],\\-\arccos x, & x\in[-1,0[.\end{cases}$$

البيان التالي يوضح هذا الوضع :



حل التمرين 4

من الواضح أن العبارة زوجية وأنها دورية، وبالتالي يكفي دراستها في الدورة $[0,2\pi]$.

نبدأ بإزالة الجذر فنلاحظ :

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}} = \frac{1-\cos x}{|\sin x|}.$$

ثمّ نضع $x = 2t$ ونعيد كتابة العبارة $\frac{1-\cos x}{|\sin x|}$ بدلالة t :

$$\frac{1-\cos x}{|\sin x|} = \frac{1-(1-2\sin^2 t)}{2|\sin t \cos t|} = |\tan t|.$$

عندما يكون $x\in[0,2\pi]$ فإن $t\in[0,\pi]$. ومن ثمّ فإن :

$$|\tan t|=\begin{cases}\tan t, & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ -\tan t, & t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$$

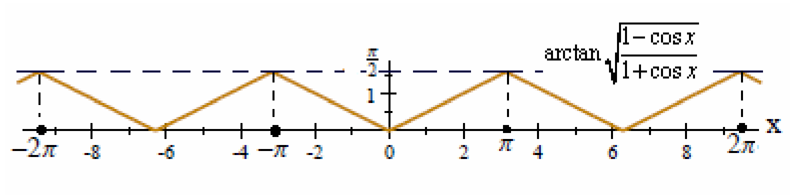
نستخلص من ذلك :

$$\begin{aligned}\arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}&=\arctan|\tan t|\\ &=\begin{cases}\arctan\tan t, & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \arctan(-\tan t), & t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}\\ &=\begin{cases}t, & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ -t, & t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}\\ &=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\in[0,\pi]\\ -\dfrac{x}{2}, & x\in[\pi,2\pi].\end{cases}\end{aligned}$$

وهكذا تكون الإجابة عن السؤال كما يلي : من أجل كل $n\in\mathbb{Z}$

$$\arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\in[2n\pi,(2n+1)\pi]\\ -\dfrac{x}{2}, & x\in[(2n+1)\pi,(2n+2)\pi].\end{cases}$$

يؤكد هذه النتيجة بيان الدالة $f(x)=\arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$:



حل التمرين 5

1) العبارة $\sin\arccos x$: نعلم أن $\arccos x$ تأخذ قيمها في المجال $[0,\pi]$. وبالتالي فإن $\sin\arccos x$ موجبة. كما نعلم أن :

$$(\sin\arccos x)^2+(\cos\arccos x)^2=1$$

أي :

$$(\sin\arccos x)^2+x^2=1.$$

ومنه :

$$\sin\arccos x=\sqrt{1-x^2}\ .$$

2) العبارة $\cos\arcsin x$: نعلم أن $\arcsin x$ تأخذ قيمها في المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. وبالتالي فإن $\cos\arcsin x$ موجبة. كما نعلم أن :

$$(\cos\arcsin x)^2+(\sin\arcsin x)^2=1$$

أي :

$$(\cos\arcsin x)^2+x^2=1.$$

ومنه :

$$\cos\arcsin x=\sqrt{1-x^2}\ .$$

3) العبارة $\sin\arctan x$: نضع $y=\sin\arctan x$ و $z=\cos\arctan x$ ، ونلاحظ أن إشارة y من إشارة x. أما إشارة z فهي موجبة. ومن جهة أخرى نرى أن :

$$\begin{cases} y^2+z^2=1, \\ \dfrac{y}{z}=\tan(\arctan x)=x. \end{cases}$$

ومن ثمّ ينتج أن :

$$\begin{cases} \sin\arctan x=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \\ \cos\arctan x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{cases}$$

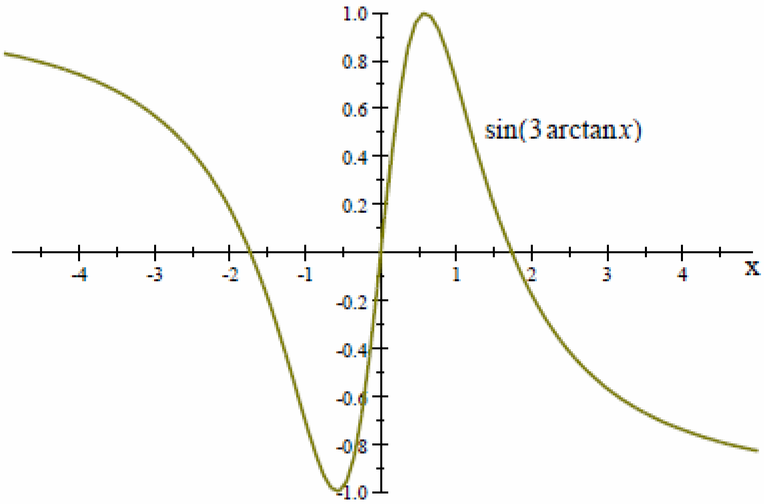
4) العبارة $\sin 2\arctan x$: يكفي أن نكتب اعتمادا عما ورد آنفا :

$$\begin{aligned} \sin 2\arctan x &= 2\sin\arctan x\times\cos\arctan x \\ &= 2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

5) العبارة $\sin 3\arctan x$: نستفيد من كتابة $\sin\arctan x$ و $\sin 2\arctan x$ فنجد :

$$\begin{aligned}\sin 3\arctan x &= \sin\left(\arctan x + 2\arctan x\right)\\ &= \sin\arctan x \times \cos 2\arctan x\\ &\quad + \sin 2\arctan x \times \cos\arctan x\\ &= \sin\arctan x\left[1-2(\sin\arctan x)^2\right]\\ &\quad + 2\sin\arctan x \times (\cos\arctan x)^2\\ &= \sin\arctan x\left[3-4(\sin\arctan x)^2\right]\\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\times(3-\frac{4x^2}{1+x^2})\\ &= \frac{x(3-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

ملاحظة : دراسة هذه الدالة الفردية تعطي البيان التالي :



حل التمرين 6

نلاحظ في البداية أن الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بأكمله لأن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1,$$
$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

لنحسب جيب عبارة f . لدينا :

$$\sin\left(\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}+\arccos\frac{2x}{1+x^2}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\times\cos\left(\arccos\frac{2x}{1+x^2}\right)+\sin\left(\arccos\frac{2x}{1+x^2}\right)\times\cos\left(\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}+\arccos\frac{2x}{1+x^2}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}\times\frac{2x}{1+x^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\times\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}$$
$$=\frac{2x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+\frac{2|x|\left|1-x^2\right|}{(1+x^2)^2}.$$

إن التمعن في العبارة

$$\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+\frac{2|x|\left|1-x^2\right|}{(1+x^2)^2}$$

يبيّن أنها منعدمة عندما يكون $x\in[-1,0]\cup[1,+\infty[$. وهكذا فإن $\sin f(x)=0$ من أجل $x\in[-1,0]\cup[1,+\infty[$.

ولما كانت f قابلة للاشتقاق فإن $0=(\sin f(x))'=f'(x)\cos f(x)$ علما أن $\cos f(x)\neq 0$ في $[-1,0]\cup[1,+\infty[$ لأن $\sin f(x)=0$. يؤدي ذلك إلى التأكيد بأن $f'(x)=0$ على الاتحاد $[-1,0]\cup[1,+\infty[$.

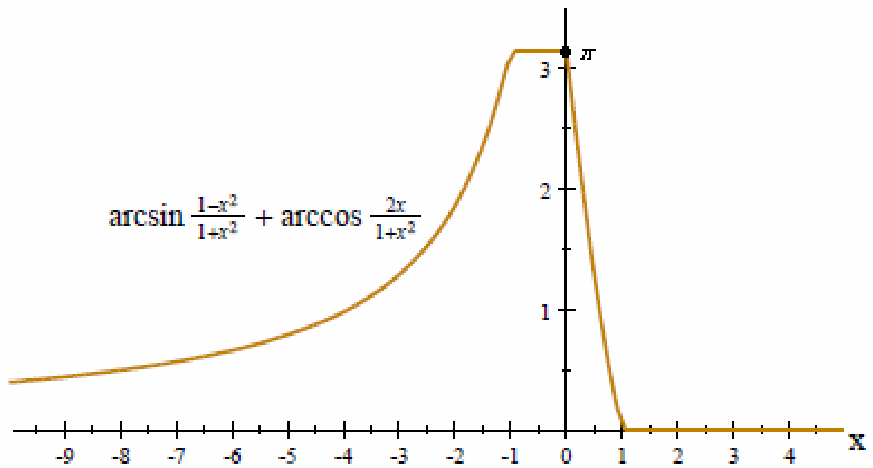
ومن ثمّ نستنتج أن f ثابتة على كل مجال من اتحاد المجالين، مع احتمال تساوي الثابتين. ولمعرفة هذين الثابتين يكفي حساب $f(-1)$ و $f(1)$. لدينا :

$$f(-1)=\arccos(-1)=\pi\,,$$
$$f(1)=\arccos 1=0\,.$$

نستنتج مما سبق أن :

$$f(x)=\begin{cases}\pi, & x\in[-1,0],\\ 0, & x\in[1,+\infty[.\end{cases}$$

لاحظ أن بيان الدالة f أدناه يؤكد هذه النتيجة :



حل التمرين 7

نضع $y = \arctan x$ و $z = \text{arccot}\, x$ حيث x عدد حقيقي. ومنه $x = \tan y$ و $x = \cot z$. فنلاحظ أن :

$$\frac{\sin y}{\cos y} = \tan y = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

وبالتالي : $\cos y \cos z - \sin y \sin z = 0$. وهذا يعني $\cos(y+z) = 0$. إذن $y + z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ حيث n عدد صحيح.

وبمراعاة كون دالة قوس الظل تأخذ قيمها في المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ والدالة قوس تمام الظل تأخذ قيمها في المجال $]0, \pi[$ فإن $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ و $0 < z < \pi$. وبالتالي $-\frac{\pi}{2} < y + z < \frac{3\pi}{2}$.

وعليه فليس لدينا سوى اختيار واحد للعدد الصحيح n في العلاقة $y + z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ وهو $n = 0$. ولذلك فإن:

$$\arctan x + arc\cot x = y + z = \frac{\pi}{2}.$$

وهو المطلوب.

حل التمرين 8

يكفي أن نكتب بأن المعادلة تعني :

$$\begin{aligned} x &= \cos(\arccos x) \\ &= \cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right) \\ &= \left(\cos\arccos\frac{3}{4}\right)^2 - \left(1-\left(\cos\arccos\frac{3}{4}\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

ومنه يأتي أن الحل المطلوب هو $x = \frac{1}{8}$.

حل التمرين 9

طريقة 1 (حسابية) : من أجل إيجاد حل المعادلة $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$ نضع $x = \tan y$ و $2x = \tan z$. ومنه $y + z = \frac{\pi}{2}$ و $\tan z = 2\tan y$. وبالتالي :

$$\frac{\cos y}{\sin y} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 2\tan y = 2\frac{\sin y}{\cos y}$$

ولذا :

$$\cos^2 y - 2\sin^2 y = 0.$$

وهكذا يأتي :

$$\begin{cases} \cos^2 y = \frac{2}{3}, \\ \sin^2 y = \frac{1}{3}, \\ \tan^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

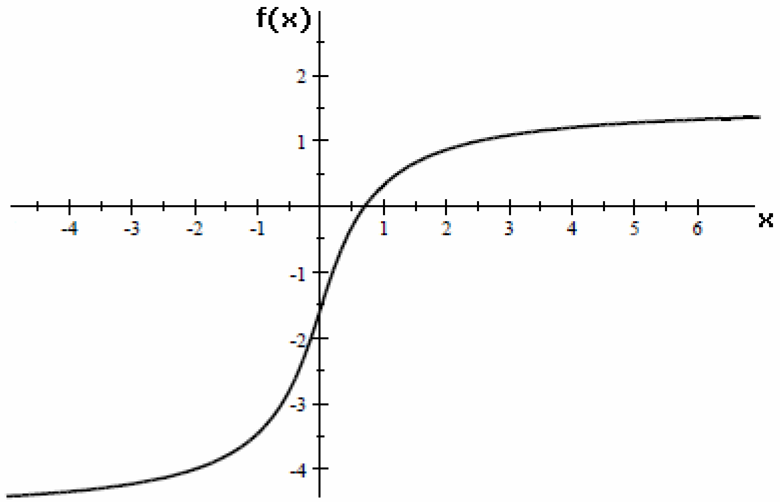
ومنه : $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.70711$.

طريقة 2 (بيانية) : يكفي أن نرسم بيان الدالة

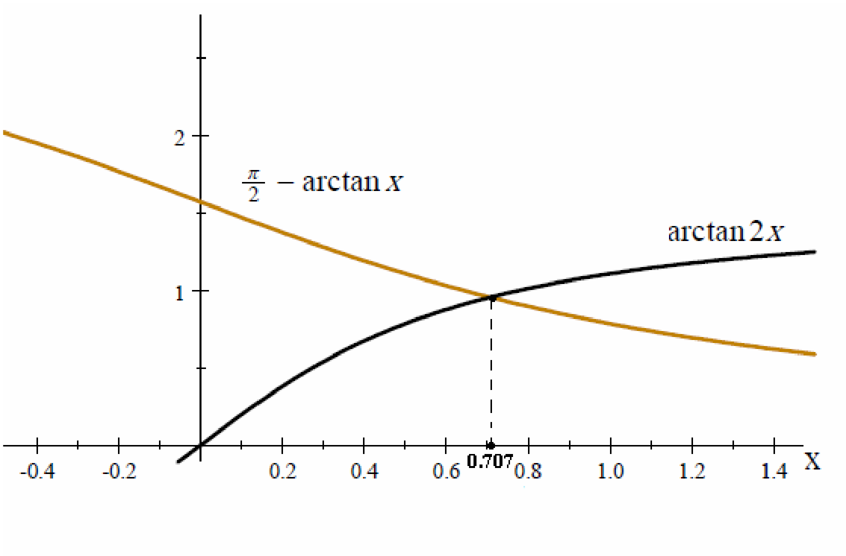
$$f(x) = \arctan 2x + \arctan x - \frac{\pi}{2}$$

والحل المطلوب سوف يكون فاصلة نقطة تقاطع البيان مع محور الفواصل.

نلاحظ في البيان أدناه فاصلة نقطة التقاطع هي فعلا حوالي 0.7 :



طريقة 3 (بيانية) : يمكننا أيضا الحصول على الحل البياني بطرق أخرى، مثلا برسم بياني الدالتين $g(x) = \arctan 2x$ و $h(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. وسيكون الحل هو فاصلة نقطة تقاطع البيانين (انظر الشكل أدناه) :



حل التمرين 10

طريقة 1 (حسابية) : نلاحظ أن 0 حل للمعادلة المعطاة وأنه إذا كان x حلا فإن $-x$ أيضا حل. ومن جهة أخرى، لدينا العلاقة $\cos\arcsin y = \sqrt{1-y^2}$ من أجل كل $y \in [-1,1]$ التي تم البرهان عليها (التمرين 5). سنستغل هذه العلاقة لتحويل المعادلة المعطاة إلى الشكل :

$$\sin\left(\arcsin 2x - \arcsin\sqrt{3}x\right) = \sin\left(\arcsin x\right)$$

علما أن المعادلة تقتضي أن يكون في آن واحد :

$$\begin{cases} -1 \le 2x \le 1, \\ -1 \le \sqrt{3}x \le 1. \end{cases}$$

وهذا يعني أن علينا أن نبحث عن حل المعادلة في المجال $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

وهكذا فالمعادلة تكافئ :

$$2x\cos\left(\arcsin\sqrt{3}x\right)-\sqrt{3}x\cos\left(\arcsin 2x\right)=x\ .$$

وبالتالي :

$$2x\sqrt{1-3x^2}-\sqrt{3}x\sqrt{1-4x^2}=x\ .$$

كنا ذكرنا أن 0 حل، وذلك ما نلاحظه في المعادلة السابقة. نستثني هذا الحل فيمكننا الاختصار بـــ x. وهكذا تصبح المعادلة السابقة :

$$2\sqrt{1-3x^2}-\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}=1\ .$$

نربّع الطرفين فيكون :

$$6\left(1-4x^2\right)=4\sqrt{3}\sqrt{1-3x^2}\sqrt{1-4x^2}\ .$$

ومن ثمّ نستخلص حالتين :

* الحالـــة الأولى : $1-4x^2=0$، أي $x=\pm\frac{1}{2}$ وهاتـــان القيمتـــان للمجهول تمثلان حلّين للمعادلة.

* الحالة الثانية : $1-4x^2\neq 0$، وعندئذ يمكن الاختصار في المعادلـــة السابقة التي تصبح على الشكل :

$$\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}=2\sqrt{1-3x^2}\ .$$

ولدى تربيع الطرفين يأتي :

$$3-12x^2=4-12x^2\ .$$

وهذا يوضح أن المعادلة لا تقبل حلا من هذا القبيل.

خلاصة القول إن للمعادلة المعطاة 3 حلول، هـــي : 0، $\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{2}$ (لاحظ أن هذه الحلول تنتمي إلى المجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ الذي ينبغي أن نحل فيـــه المعادلة).

ويمكن التأكد حسابيا بأن التعويض في المعادلة

$$\arcsin 2x - \arcsin\sqrt{3}x = \arcsin x$$

يعطي عند 0 :

$$\arcsin 0 - \arcsin 0 = \arcsin 0$$

أي : $0 - 0 = 0$.

ويعطي عند $\frac{1}{2}$:

$$\arcsin 1 - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \arcsin\frac{1}{2}$$

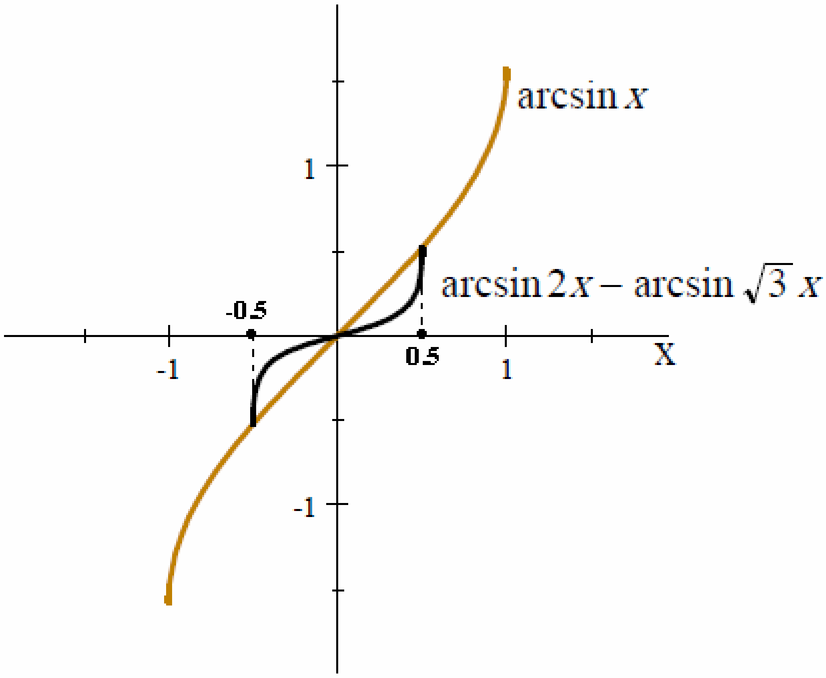
أي : $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

ويعطي عند $-\frac{1}{2}$:

$$\arcsin(-1) - \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \arcsin(-\frac{1}{2})$$

أي : $-\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{6}$.

طريقة 2 (بيانية) : نـــضع مـــثلا $f(x) = \arcsin 2x - \arcsin\sqrt{3}x$ و $g(x) = \arcsin x$. ثم نرسم بياني هاتين الدالتين. لاحظ أنهمـــا فرديتـــان ومنعدمتان عند الصفر. وبالتالي فإن 0 حل. حلول المعادلة المعطـــاة هـــي فواصل نقاط تقاطع البيانين. إليك البيانين في نفس المعلم :

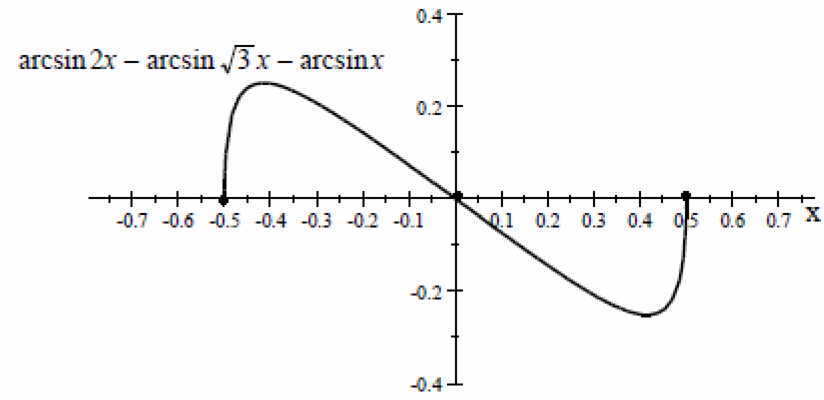


لاحظ في الشكل فواصل نقاط تقـاطع البيـانين. إنهـا : $x = 0$، $x = \frac{1}{2}$، $x = -\frac{1}{2}$. وهذا ما يؤكد صحة النتيجة المحصل عليهـا بالطريقـة الحسابية.

طريقة 3 (بيانية) : يمكن رسم بيان الدالة

$$h(x) = \arcsin 2x - \arcsin \sqrt{3}x - \arcsin x \ .$$

وستكون حلول المعادلة في هذه الحالة فواصل نقاط تقاطع هذا البيان مـع محور الفواصل. لاحظ أن ذلك ما نكتشفه في الشكل الموالي :



حل التمرين 11

طريقة 1 (حسابية): نلاحظ من خلال المعادلة أن حلها (أو حلولها) موجب تماما لأن طرفها الأيمن موجب أما الطرف الثاني فإشارته من إشارة x ولذلك وجب أن يكون x موجبا.

من جهة أخرى، نعلم أن $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$. ومن ثمّ نستطيع حساب :

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=-(2+\sqrt{3}).$$

كما نستغل العلاقة المعروفة

$$\tan(y+z)=\frac{\tan y+\tan z}{1-\tan y.\tan z}$$

فنستخلص :

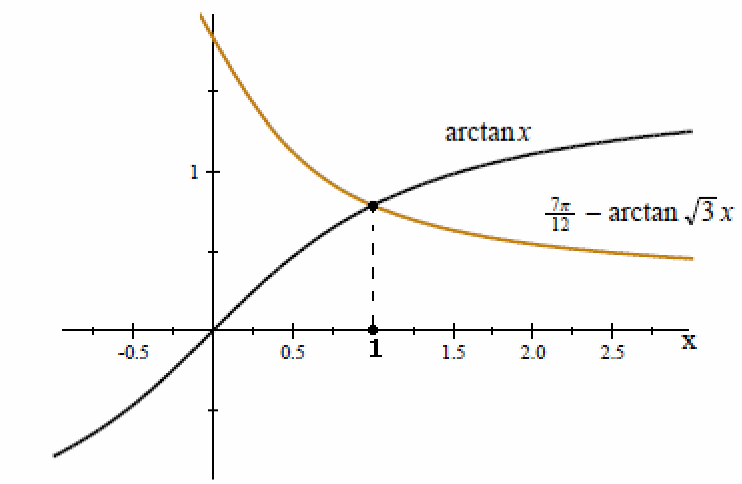
$$\begin{aligned}-(2+\sqrt{3})&=\tan\frac{7\pi}{12}\\&=\tan\left(\arctan x+\arctan\sqrt{3}x\right)\\&=\frac{x+\sqrt{3}x}{1-\sqrt{3}x^2}.\end{aligned}$$

ومنه نستنتج المعادلة التي يحققها x :

$$(3+2\sqrt{3})x^2-(1+\sqrt{3})x-(2+\sqrt{3})=0\,.$$

بحلّ هذه المعادلة (من الدرجة الثانية بالنسبة لـــ x) نجد $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $x=1$. ولمّا كان على الحل أن يكون موجبا فالحل الوحيد للمعادلة المعطاة هو $x=1$.

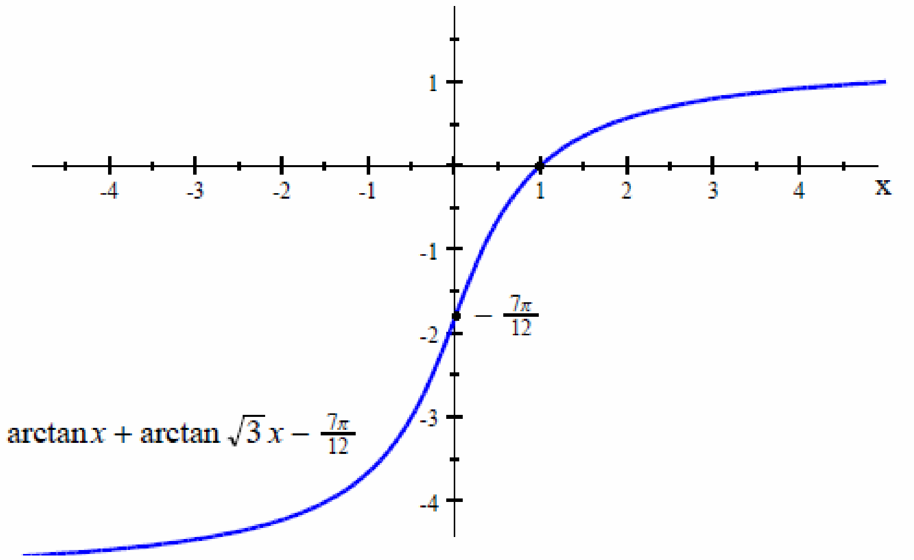
طريقة 2 (بيانيـــة) : نرســـم بيـــاني الـــدالتين $f(x)=\arctan x$ و $g(x)=\frac{7\pi}{12}-\arctan\sqrt{3}x$. ومن ثمّ يكون الحل المطلوب هو فاصـــلة نقطـــة تقاطع البيانين، وهي $x=1$ كما يبيّن الشكل أدناه :



طريقة 3 (بيانية) : نرسم بيان الدالة

$$h(x)=\arctan x+\arctan\sqrt{3}x-\frac{7\pi}{12}$$

فيكون الحل المطلوب هو نقطة تقاطع هذا البيان مع محور الفواصل. نلاحظ فعلا في الشكل الموالي تأكيدا للحل السابق، وهو $x=1$.



حل التمرين 12

1) لإثبات المتباينتين

$$\forall x \in]-1,0[\qquad \arcsin x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\forall x \in]0,1[\qquad \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

نعتبر الدالة $f(x) = \arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. فنلاحظ أن تحديد إشارة هذه الدالة يسمح بالإجابة عن السؤال إذ أن المتباينتين تكافئان، على التوالي :

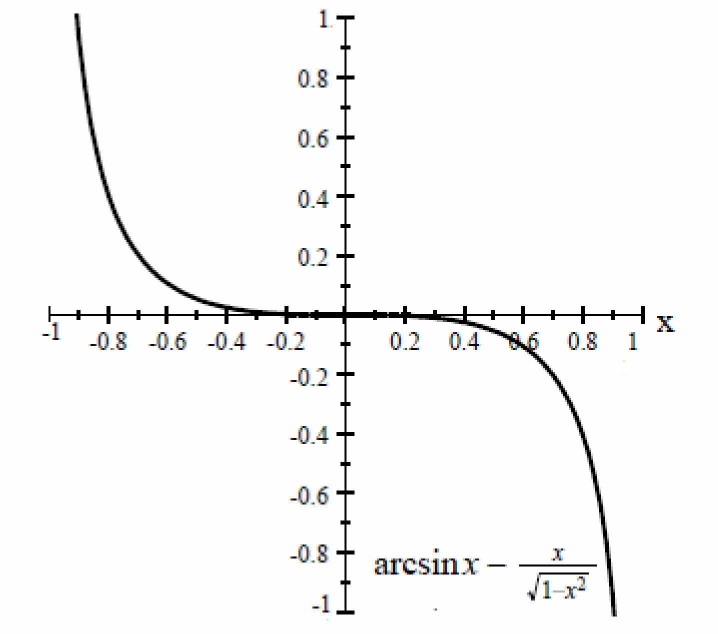
$$\forall x \in]-1,0[\qquad f(x) > 0$$
$$\forall x \in]0,1[\qquad f(x) < 0.$$

بحساب مشتق f يتضح أن :

$$f'(x) = -\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

ويتبيّن عندئذ أن المشتق سالب في المجال $]-1,1[$. وعليه فالدالـــة f متناقصة في هذا المجال علما أن $f(0)=0$. هذه المعطيات حول f تــؤدي مباشرة إلى المطلوب.

كما أن الشكل الموالي الذي يمثل بيان f يؤكد النتيجة :



2) لإثبات المتباينة الثالثة، وهي :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \arcsin x > \frac{x}{1+x^2}$$

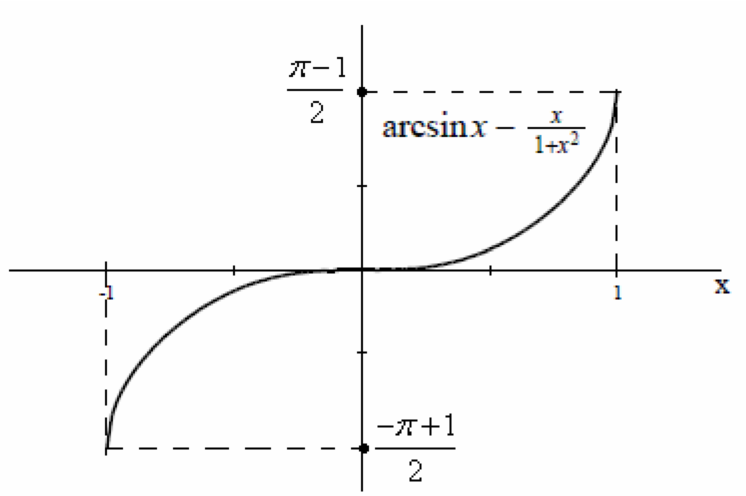
يمكن أن ندرس إشارة الدالـــة $g(x) = \arcsin x - \frac{x}{1+x^2}$ في المجـــال $]-1,1[$.

فنلاحظ أن مشتقها هو :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(1+x^2)^2 + (x^2-1)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(1+x^2)^2 - \sqrt{1-x^2} + x^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

وبالتالي فالمشتق موجب لكون المقام موجب وكـــذلك البـــسط في العبارة الأخير (لاحظ أن $(1+x^2)^2-\sqrt{1-x^2}$ موجب من أجل $x\in]-1,1[$). ولذا فالدالة g متزايدة علما أن $g(0)=0$. وعليه فهي سالبة في المجال $]-1,0[$ وموجبة في المجال $]0,1[$. وهذا يجيب عن السؤال المطروح.

كما أن الشكل التالي الذي يوضح بيان g يؤكد هذه النتيجة.



حل التمرين 13

1) نلاحظ أن الدالة cosh زوجيـــة وبالتـــالي ينبغـــي أن يكـــون $e^x = f(\arccos x) = f(\cosh(-x)) = e^{-x}$. وبالتالي حتى تكون f دالة لا بـــد

أن يكون $e^{-x}=e^{x}$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$. وهذا غير صحيح. إذن لا توجد دالة تحقق المطلوب.

2) نضع $t=e^{x}$ فيأتي $\cosh x=\dfrac{1+t^2}{2t}$ علما أن $x\in\mathbb{R}$ يعني $t\in\left]0,+\infty\right[$. ومنه تكتب $f(e^{x})=\cosh x$ على الشكل $f(t)=\dfrac{1+t^2}{2t}$ من أجل كل $t\in\left]0,+\infty\right[$. وهي الدالة الوحيدة التي تحقق المطلوب.

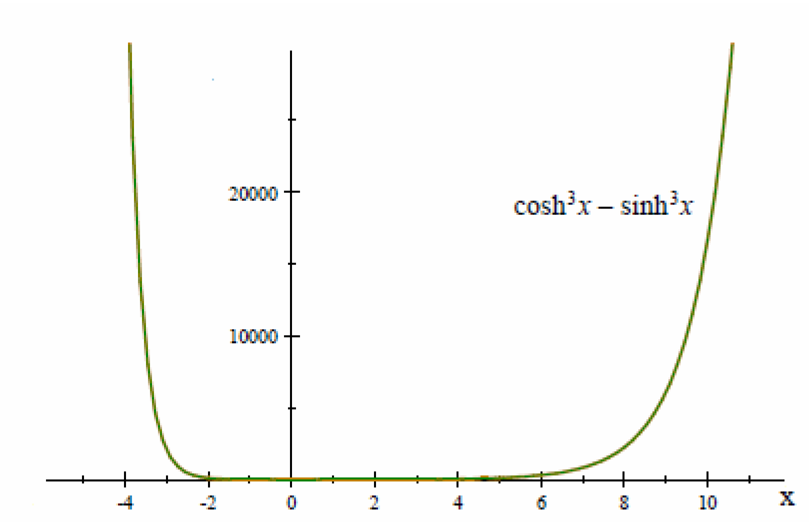
3) نضع كما في الحالة السابقة $t=e^{x}$ فيأتي $\cosh x=\dfrac{1+t^2}{2t}$ علما أن $x\in\mathbb{R}$ يعني $t\in\left]0,+\infty\right[$. ومنه تكتب $f(e^{x})=\cosh x$ على الشكل $f(t)=\dfrac{1+t^2}{2t}$ من أجل كل $t\in\left]0,+\infty\right[$. وهذا يعرّف f على المجال $\left]0,+\infty\right[$، لكنه لا يعرّفها عند 0. وليس هناك ما يفرض علينا تعريفا معيّنا للدالة عند 0. ولذلك يمكننا أن نعطي أية قيمة لـ f عند 0. نستخلص أن هناك عددا غير منته من الاختيارات للدالة f، وكلها متطابقة على المجال المفتوح $\left]0,+\infty\right[$ وتختلف عند 0.

حل التمرين 14

بالحساب المباشر نجد :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\cosh^3 x-\sinh^3 x\right)&=\lim_{x\to+\infty}\left(3e^{x}+e^{-3x}\right)\\&=+\infty.\end{aligned}$$

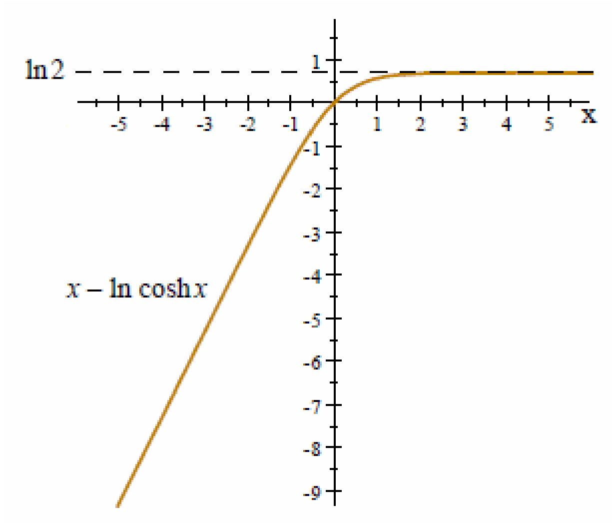
هذه النتيجة يؤكدها بيان الدالة، المعرفة بـ $\cosh^3 x-\sinh^3 x$، أدناه :



وفي ما يخص النهاية الثانية، لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x-\ln\cosh x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln e^{2x}(1+\frac{1}{e^{2x}})+\ln 2e^x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(x-2x-\ln(1+\frac{1}{e^{2x}})+\ln 2+x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln 2-\ln(1+\frac{1}{e^{2x}})\right)\\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

هذه النتيجة يؤكدها بيان الدالة، المعرفة بـــــ $x-\ln\cosh x$، أدنـــاه الذي يقبل المستقيم $y=\ln 2$ كمستقيم مقارب بجوار $+\infty$:



حل التمرين 15

1) لدينا :

$$\begin{cases} y = \operatorname{argch} x, \\ x \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cosh y, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

ومنه، وبمراعاة كون e^y موجب دوما :

$$\begin{aligned} y = \arg \operatorname{ch} x &\Leftrightarrow x = \cosh y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{e^{2y} + 1}{2e^y} \\ &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right). \end{aligned}$$

لذلك : $\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

2) لدينا

$$\begin{cases} y = \operatorname{argsh} x \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sinh y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ومنه، وبمراعاة كون e^y موجب دوما :

$$\begin{aligned} y = \operatorname{argsh} x \Leftrightarrow x &= \sinh y \\ \Leftrightarrow x &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{e^{2y} - 1}{2e^y} \\ \Leftrightarrow e^y &= x + \sqrt{x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow y &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

لذلك : $\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

3) لدينا :

$$\begin{cases} y = \operatorname{argth} x, \\ -1 < x < 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tanh y, \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{aligned} y = \operatorname{argth} x \Leftrightarrow x &= \tanh y \\ \Leftrightarrow x &= \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \\ \Leftrightarrow e^{2y} &= \frac{x + 1}{x - 1} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right). \end{aligned}$$

أي أن : $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

****

أهم المصطلحات

Français	**English**	**عربية**
Sine hyperbolique (sinh)	**Hyperbolic sine**	الجيب الزائدي
Argument sinus hyperbolique (argsh / $\sinh^{-1}$**)**	**Inverse hyperbolic sine**	الجيب الزائدي العكسي
Tangente hyperbolique (tanh)	**Hyperbolic tangent**	الظل الزائدي
Argument tangente hyperbolique (argth / $\tanh^{-1}$**)**	**Inverse hyperbolic tangent**	الظل الزائدي العكسي
Tangente (tan)	**Tangent**	الظل، المماس
Logarithme népérien	**Neperian logarithm**	اللوغاريتم النبيري
Droite réelle	**Real line**	المستقيم الحقيقي
Fonction	**Function**	تابع ، دالة
Fonction exponentielle	**Exponential function**	تابع أسي
Diverger	**Diverge**	تباعدَ
Divergence	**Divergence**	تباعدُ
Récurrence	**Induction**	تراجع (تدريج)
Accumulation	**Accumulation**	تراكم

Converger	**Converge**	تقاربَ
Convergence	**Convergence**	تقاربُ
Prolongement	**Continuation**	تمديد ، امتداد
Fonctions équivalentes	**Equivalent functions**	توابع متكافئة
Constante	**Constant**	ثابتة
Partie entière	**Integer part**	جزء صحيح
Voisinage	**Neighborhood**	جوار
Cosinus hyperbolique (cosh)	**Hyperbolic cosine**	جيب التمام الزائدي
Argument cosinus hyperbolique (argch / $\cosh^{-1}$**)**	**Inverse hyperbolic cosine**	جيب التمام الزائدي العكسي
Borne inférieure	**Lower bound**	حد أدنى
Borne supérieure	**Upper bound**	حد أعلى
Corps	**Field**	حقل
Réel	**Real**	حقيقي
Formule de Taylor	**Taylor formula**	دستور تايلور
Période	**Period**	دورة
Périodique	**Periodic**	دورية
Monotone	**Monotone**	رتيب
Notation de Landau	**Landau notation**	رمز لوندو

Cotangente hyperbolique (coth)	**Hyperbolic cotangent**	ظل التمام الزائدي
Argument cotangente hyperbolique (argcoth / $\coth^{-1}$**)**	**Inverse hyperbolic cotangent**	ظل التمام الزائدي العكسي
Nombre irrationnel	**Irrational number**	عدد أصم
Entier relatif	**Integer**	عدد صحيح
Nombre naturel	**Natural number**	عدد طبيعي
Nombre rationnel	**Rational number**	عدد ناطق
Numérique	**Numerical**	عددية
Complexe	**Complex**	عُقَدي ، مركب
Elément	**Element**	عنصر
Dérivable	**Differentiable**	قابل للاشتقاق
Règle de l'Hôpital	**L'Hôpital's Rule**	قاعدة لوبيتال
Arc sinus (arcsin)	**Arc sine**	قوسُ الجيب
Arc tangente (arctan)	**Arc tangente**	قوسُ الظل
Arc cosinus (arccos)	**Arc cosine**	قوسُ جيب التمام
Arc cotangente (arccot)	**Arc cotangent**	قوسُ ظل التمام
Minimum	**Minimum**	قيمة صغرى
Maximum	**Maximum**	قيمة عظمى

Extremum	**Extremum**	قيمة قصوى
Valeur absolue	**Absolute value**	قيمة مطلقة
Dense	**Dense**	كثيف
Principe d'Archimède	**Axiom of Archimedes**	مبدأ أرخميدس
Suites adjacentes	**Adjacent sequences**	متتاليات متجاورة
Suite	**Sequence**	متتالية
Sous suite	**subsequence**	متتالية جزئية
Suite de Cauchy	**Cauchy sequence**	متتالية كوشية
Suite extraite	**subsequence**	متتالية مستخرجة
Croissant	**Increasing**	متزايد
Variable	**Variable**	متغير
Discontinue	**Discontinuous**	متقطع
Décroissant	**Decreasing**	متناقص
Intervalle	**Interval**	مجال
Intervalles emboîtés	**Nested intervals**	مجالات متداخلة
Borné	**Bounded**	محدود
Continu	**Continuous**	مستمر
Axiome	**Axiom**	مُسَلَّمة
Fermé	**Closed**	مغلق
Ouvert	**Open**	مفتوح

Uniforme	**Uniform**	منتظم
Théorème des accroissements finis	**Mean value theorem**	نظرية التزايدات المنتهية، نظرية المتوسط
Théorème de Rolle	**Rolle theorem**	نظرية رول
Point fixe	**Fixed point**	نقطة صامدة
Limite	**Limit**	نهاية

****