المجموعات (Ensembles)

تعرف المجموعة بأحد مرادفاتها كجماعة أو تجمع لأشياء تربطها خصائص مشتركة؛ تسمى عناصر.

لتكن E مجموعة نقول أن العنصر a من E أو ينتمي إلى المجموعة E a عندما

و نكتب $a \in E$ و قد لا يكون a عنصرا من E نقول في هذه الحالة إن a لا ينتمي إلى E ونكتب $a \notin E$

مجموعة خالية

يُقال أن المجموعة خالية إذا لم يكن بها أي عنصر و نشير إليها ب $\{\ \}$

أو في معظم الأحيان ب ϕ .

أمثلة :

- الأعداد الطبيعية $0,1,2,3,...$ تشكل مجموعة نرمز لها ب $\mathbb{N}$
- الأعداد الصحيحة النسبية $...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...$ تشكل مجموعة نرمز لها ب $\mathbb{Z}$
- الأعداد الناطقة من الشكل $\frac{p}{q}$ حيث $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}^*$ تشكل مجموعة نرمز لها ب $\mathbb{Q}$

المساواة بين مجموعتين

تعريف: مجموعتان E و F يقال إنهما متساويتان إذا كان لهما نفس

العناصر و نكتب

$$E = F \Leftrightarrow \forall x \in E \Leftrightarrow \forall x \in F$$

عمليات على المجموعات

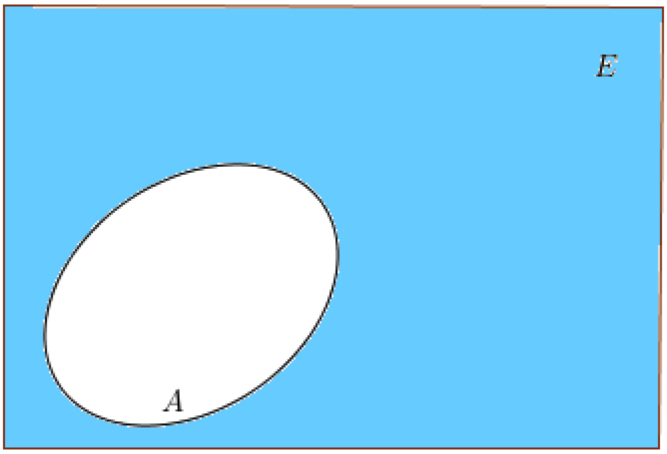
الاحتواء

تعريف : نقول إن المجموعة A محتواة في المجموعة E

و نكتب $A \subset E$ إذا كانت جميع عناصر A موجودة في E

أي $A \subset E \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in E$

BER-TECH



خواص الاحتواء

لدينا ما يلي

- $A \subset A$
- $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ تعدي علاقة الاحتواء
- $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$ بمعنى علاقة الاحتواء ضد تناظرية

مثال: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

مجموعة أجزاء مجموعة

تعريف: لتكن E مجموعة. نسمي مجموعة أجزاء المجموعة E

مجموعة المجموعات الجزئية من E ونرمز لها ب $P(E)$

و نكتب $A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$

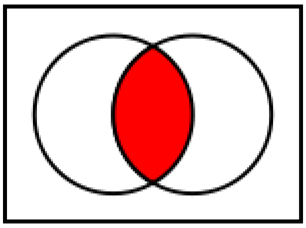
مثال : لنعتبر المجموعة $E = \{1, 2, 3\}$

مجموعة أجزاء E هي $P(E) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$

التقاطع:

تعريف: تقاطع مجموعتين A و B هي مجموعة العناصر المشتركة بين A و B ونرمز لها بالرمز $A \cap B$

و نكتب $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$



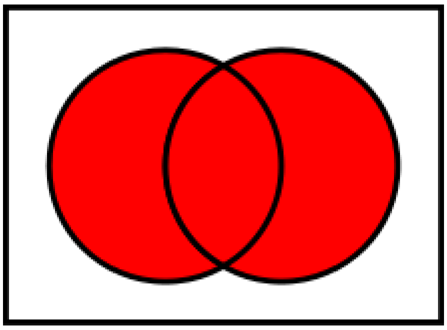
اتحاد مجموعتين:

تعريف : اتحاد مجموعتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ هي مجموعة العناصر

التي تنتمي على الأقل إلى إحدى المجموعتين

$\mathbb{A}$ أو $\mathbb{B}$. نرمز ب $\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$ إلى هدا الاتحاد و نكتب

$$x\in\mathbb{A}\cup\mathbb{B}\Leftrightarrow x\in\mathbb{A}\vee x\in\mathbb{B}$$



خواص

لتكن B,A و C ثلاث مجموعات لدينا مايلي:

- $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ عملية التقاطع تجميعية أي
- $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ الاتحاد تجميعي
- $A\cap B=B\cap A$ التقاطع تبديلي
- $A\cap A=A$
- $A\cup B=B\cup A$ الاتحاد تبديلي
- $A\cap\phi=\phi$ ϕ هي العنصر الماص بالنسبة للتقاطع
- $A\cup\phi=A$ ϕ هي العنصر الحيادي بالنسبة للاتحاد
- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ التقاطع توزيعي على الاتحاد
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ الاتحاد توزيعي على التقاطع

المتممة

تعريف : لتكن A مجموعة جزئية من E أي $(A \subseteq E)$

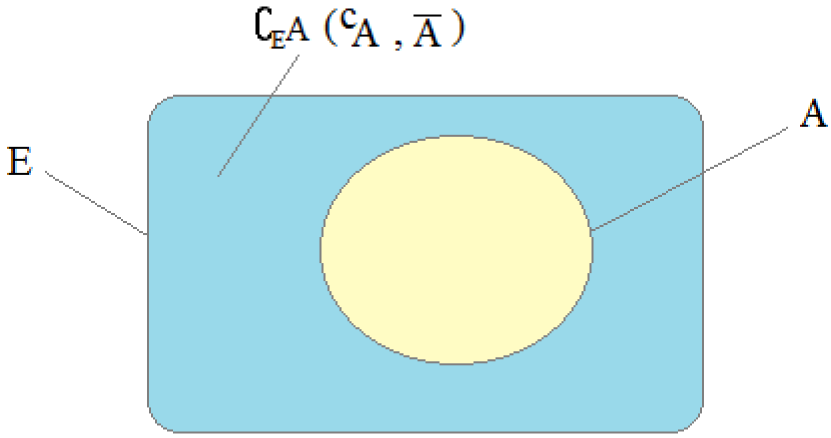
متممة المجموعة A في E هي مجموعة عناصر E التي لا تنتمي إلى A

ونرمز لها ب A^c و نكتب $A^c = \{x \in E : x \notin A\}$ بمعنى

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$$

يرمز أيضا للمتممة بإحدى الرموز

C_E^A أو $\overline{A}$



خواص المتممة

لتكن B, A مجموعتين جزئيتين من E لدينا مايلي :

- $E^C = \phi$
- $\phi^C = E$
- $A \cap A^C = \phi$
- $A \cup A^C = E$
- $(A^C)^C = A$

قانوني دي مورغان

- متممة اتحاد مجموعتين هو تقاطع متمميهما: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- متممة تقاطع مجموعتين هو اتحاد متمميهما: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
- تناقص المتممة $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$

فرق بين مجموعتين

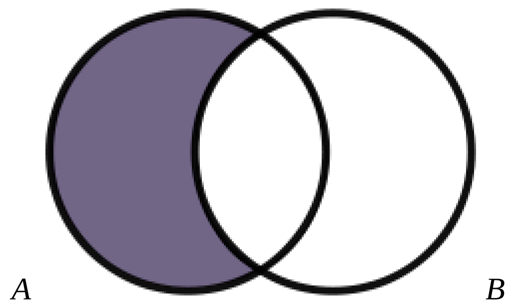
تعريف: فرق بين مجموعتين A و B

هي مجموعة العناصر التي تنتمي الى A و لا تنتمي إلى B

و نرمز له بالرمز $A\setminus B$ ونكتب

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

كما هو موضح باللون البنفسجي في الشكل



فرق تناظري بين مجموعتين Différence symétrique

تعريف: الفرق التناظري بين مجموعتين A و B

هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى $A\cup B$ و لا تنتمي إلى $A\cap B$

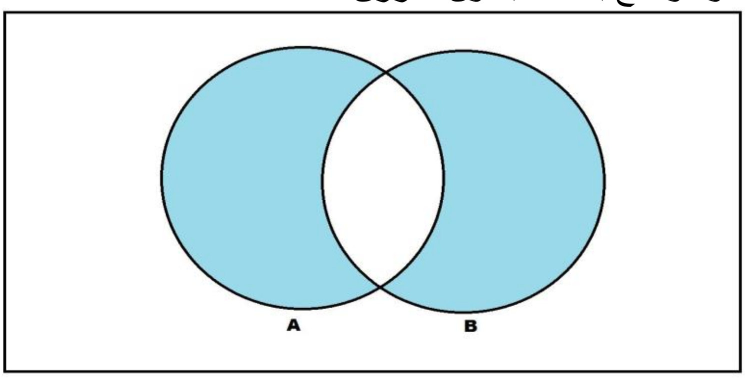
و نرمز له بالرمز $A\Delta B$ ونكتب

$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

و يمكن تعريف الفرق التناظري على انه

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

كما هو موضح بالشكل باللون الأزرق



خواص الفرق التناظري

لتكن B, A لدينا مايلي :

نلاحظ انه لدينا $A \setminus B = C_A^B$ في حالة ما إذا كان $B \subset A$

- $A \setminus B = A \cap B^C$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \Delta B = \phi$
- $A \Delta B = B \Delta A$ الفرق التناظري تبديلي
- $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ الفرق التناظري تجميعي
- $A \Delta \phi = A$ المجموعة الخالية هي العنصر الحيادي بالنسبة للعملية Δ
- $A \Delta A = \phi$ لكل عنصر عنصر نظير بالنسبة للعملية Δ هو نفسه
- $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ التقاطع توزيعي على الفرق التناظري

تجزئة مجموعة

تعريف **:** نقول عن جماعة الأجزاء $A_1, \dots, A_n$ إنها تشكل تجزئة للمجموعة E

إذا تحقق ما يلي

- الأجزاء $A_1, \dots, A_n$ غير خالية
- الأجزاء $A_1, \dots, A_n$ غير متقاطعة مثنى مثنى
- اتحاد الأجزاء $A_1, \dots, A_n$ هو E

مثال :

مجموعتي الأعداد الفردية و الزوجية تشكلان تجزئة لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

الجداء الديكارتي

لتكن F و E مجموعتين غير خاليتين

تعريف : الجداء الديكارتي للمجموعتين F و E بهذا الترتيب هو المجموعة

التي نرمزلها ب $E \times F$ المكونة من كل الثنائيات (x, y)

حيث $y \in F$ و $x \in E$ ونكتب $(x, y) \in E \times F \Leftrightarrow x \in E \wedge y \in F$

إذا كان $E = F$ نكتب $E^2 = E \times E$

و تسمى المجموعة $\Delta = \{(x, x), x \in E\}$ قطر المجموعة E^2

خواص

لتكن E و F لدينا مايلي :

1. $E \times \phi = \phi \times E = \phi$

2. $E\times F\neq F\times E$
3. $(E\times F)\times G\neq E\times(F\times G)$
4. $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$
5. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
6. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

العلاقات و التطبيقات

علاقة ثنائية

تعريف: نسمي علاقة ثنائية على مجموعة E كل جزء $\mathcal{R}$ من $E\times E$

نقول إن العنصر $x\in E$ له علاقة مع العنصر $y\in E$ إذا كان $(x,y)\in\mathcal{R}$.

ونكتب $x\mathcal{R}y$ بدلا عن الكتابة $(x,y)\in\mathcal{R}$.

نقول ان العلاقة $\mathcal{R}$

- انعكاسية إذا كان $\forall x\in E: x\mathcal{R}x$
- تناظرية إذا كان $\forall x,y\in E: x\mathcal{R}y\Rightarrow y\mathcal{R}x$
- متعدية إذا كان $\forall x,y,z\in E: x\mathcal{R}y\wedge y\mathcal{R}z\Rightarrow x\mathcal{R}z$
- ضد تناظرية إذا كان $\forall x,y\in E: x\mathcal{R}y\wedge y\mathcal{R}x\Rightarrow x=y$

علاقة تكافؤ هي علاقة انعكاسية، تناظرية و متعدية.

إذا كانت $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ و $x\in E$، نسمي صنف تكافؤ العنصر x مجموعة العناصر $y\in E$ بحيث $x\mathcal{R}y$ نرمز ب $\bar{x}$ أو ب $C(x)$ لصنف تكافؤ العنصر x

ونكتب $\bar{x}=\{y\in E, x\mathcal{R}y\}$

مثال : بين أن العلاقة $\equiv$ المعرفة على $\mathbb{Z}$ ب

$m,n\in\mathbb{Z}: m\equiv n\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}: m-n=3k$ علاقة تكافؤ

الحل: نبرهن أن $\equiv$ علاقة تكافؤ

ليكن $n\in\mathbb{Z}$، لدينا $\exists k=0\in\mathbb{Z}: n-n=3k$ أي $n\equiv n$ و منه $\equiv$ علاقة انعكاسية

ليكن $m,n\in\mathbb{Z}$، نفرض أن $m\equiv n$ اذا يستلزم

$\exists k\in\mathbb{Z}: m-n=3k\,(*)$

بضرب طرفي المعادلة $(*)$ في -1 لنجد $\exists k\in\mathbb{Z}: n-m=3(-k)$

ومنه $\exists k'=-k\in\mathbb{Z}: n-m=3k'$

معناه أن $n\equiv m$ أي ان $\equiv$ علاقة تناظرية

بقي إثبات أن $\equiv$ علاقة متعدية

ليكن $m,n,p\in\mathbb{Z}$ بحيث $m\equiv n$ و $n\equiv p$

لدينا

$$\begin{cases} m\equiv n\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}: m-n=3k\\ n\equiv p\Leftrightarrow\exists k'\in\mathbb{Z}: n-p=3k'\end{cases}$$

نقوم بجمع المعادلتين لنتحصل على $m-p=3(k+k')$

وعليه $\exists k''\in\mathbb{Z}: m-p=3k''$ ومنه $m\equiv p$ أي $\equiv$ علاقة متعدية.

بما أن $\equiv$ علاقة انعكاسية، تناظرية و متعدية فهي علاقة تكافؤ.

تعيين أصناف تكافؤ $\bar{0},\bar{1},\bar{2}$

$$\bar{0}=\{m\in\mathbb{Z},m\equiv 0\}=\{3k,k\in\mathbb{Z}\}=3\mathbb{Z}$$
$$\bar{1}=\{m\in\mathbb{Z},m\equiv 1\}=\{3k+1,k\in\mathbb{Z}\}$$
$$\bar{2}=\{m\in\mathbb{Z},m\equiv 2\}=\{3k+2,k\in\mathbb{Z}\}$$

مجموعة حاصل القسمة

تعريف: لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على E. حاصل قسمة E على $\mathcal{R}$ هي مجموعة أصناف التكافؤ و نرمز لها ب $E/\mathcal{R}$ ونكتب $E/\mathcal{R}=\{\bar{x},x\in E\}$.

نظرية: لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على E. عندئذٍ مجموعة أصناف التكافؤ $E/\mathcal{R}$ تشكل تجزئة للمجموعة E.

علاقة الترتيب هي علاقة انعكاسية، ضد تناظرية و متعدية.

نقول ان العلاقة $\mathcal{R}$

إنها علاقة ترتيب كلي إذا استطعنا مقارنة العناصر مثنى مثنى بمعنى $\forall x,y\in E: x\mathcal{R}y\vee y\mathcal{R}x$

مثال : العلاقة "$\leq$" علاقة ترتيب كلي

نقول ان العلاقة $\mathcal{R}$ إنها علاقة ترتيب جزئي إذا كانت $\mathcal{R}$ ليست علاقة ترتيب كلي أي
$\exists x,y\in E: x\not\mathcal{R}y\wedge y\not\mathcal{R}x$

مثال : العلاقة يقسم "/" في $\mathbb{N}$ علاقة ترتيب جزئي لأنه مثلا $2\nmid 3\wedge 3\nmid 2$

التطبيقات

تعريف : نسمي تطبيق من E نحو F كل علاقة f معرفة على $E\times F$ ترفق بكل عنصر x من E عنصر وحيد y من F ونكتب

$$f:E\to F\Leftrightarrow\forall x\in E,\exists! y\in F: y=f(x)$$ تطبيق

x تسمى سابقة، y تسمى صورة، E تدعى مجموعة البدء (السوابق) و F تدعى مجموعة الوصول (الصور).

إذا كانت E مجموعة، التطبيق **المطابق** أو **الحيادي** ل E Id_E معرف من E في E ب

$$\forall x\in E, Id_E(x)=x$$

إذا كان $A\subset E$ و f تطبيق من E نحو F، نسمي **اقتصار** f على A ونرمز له ب $f_{|A}$ المعرف على A ب $\forall x\in A: f_{|A}(x)=f(x)$

إذا كان $A\subset E$ و f تطبيق من A نحو F، نسمي **امتداد** f إلى E كل دالة g معرفة على E بحيث $\forall x\in A: g(x)=f(x)$

التطبيقات المتباينة

تعريف : ليكن f تطبيق من E نحو F، نقول إن متباين أو تباين إذا و فقط إذا كان لكل عنصر من F سابقة على الأكثر من E. أي أن f متباين $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال : التطبيق f المعرف ب

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$$

نلاحظ آن العدد $\sqrt{2}$ يقبل سابقتين و هما 1 و -1 أي $f(-1) = f(1)$ لكن $-1 \neq 1$ و منه f غير متباين

التطبيقات الغامرة

تعريف: ليكن f تطبيق من E نحو F، نقول إن f **غامر** أو **غمر** إذا و فقط إذا كان لكل عنصر من F سابقة على الأقل من E. أي أن f غامر $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

مثال : التطبيق f المعرف ب

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$$

ليس غامر لان المعادلة $\sqrt{x^2+1} = -1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

التطبيق التقابلي

تعريف: ليكن f تطبيق من E نحو F، نقول إن f تقابلي أو تقابل إذا و فقط إذا كان لكل عنصر من F سابقة وحيدة من E. و نكتب f تقابل $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$$

أي أن f تقابل $\Leftrightarrow$ f **غامر** و متباين في آن واحد.

مثال : التطبيق f المعرف ب

$$f: \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$$
$$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$$

التطبيق f تقابلي لان المعادلة $\sqrt{x^2+1} = y$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}_+$ هو $x = \sqrt{y^2-1}$

تركيب تطبيقات

تعريف: ليكن $f:E\to F$ و $g:F\to G$ تطبيقين. التطبيق المعرف من E نحو F ب $x\mapsto g(f(x))$ يسمى مركب التطبيقين f و g و نرمز له ب gof.

نكتب $\forall x\in E: gof\left(x\right)=g(f(x))$.

مثال : لنعتبر التطبيقين f و g المعرفين ب $f\left(x\right)=x^3, g(x)=x+2$

لدينا $gof(x)=g(f(x))=g(x^3)=x^3+2$ في حين أن $fog(x)=f(g(x))=(g(x))^3=\left(x+2\right)^3$

ملاحظات:

- من اجل كل تطبيق $f:E\to F$ لدينا $Id_F of = f = foId_E$
- عملية تركيب التطبيقات عموما ليست تبديلية أي $fog\neq gof$
- عملية تركيب التطبيقات تجميعية أي $\left(fog\right)oh=fo\left(goh\right)$

التطبيق العكسي

تعريف: ليكن f تطبيق تقابلي من E نحو F، بمعنى لكل صورة $y\in F$ لها سابقة وحيدة $x\in E$ بحيث $y=f(x)$. إذن يمكننا تعريف التطبيق g المعرف من F نحو E ب $g(y)=x$ ، يسمى التطبيق العكسي ل f. نرمز f^{-1} للتطبيق العكسي ل f عوضا عن g

نلاحظ أن $g(y)=x\Leftrightarrow g\left(f(x)\right)=x$.

مثال : التطبيق f المعرف ب $f:\begin{cases}\left]-\infty,0\right]\to\left[3,+\infty\right[\\ x\mapsto f(x)=x^2+3\end{cases}$ تقابلي و يقبل تطبيق عكسي

$$f^{-1}:\begin{cases}\left[3,+\infty\right[\to\left]-\infty,0\right]\\ y\mapsto f^{-1}(y)=-\sqrt{y-3}\end{cases}$$

خواص:

- لدينا $f^{-1}of=Id_E$ و $fof^{-1}=Id_F$
- $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$
- يتم الحصول على مقلوب مركب تطبيقين من خلال العبارة $\left(gof\right)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$

الصورة المباشرة

تعريف: الصورة المباشرة لمجموعة جزئية A من E بواسطة تطبيق $f:E\to F$ هي مجموعة جزئية من F نرمز لها ب $f(A)$ تتكون من العناصر التي لها بواسطة f ، سابقة على الأقل من A. و نكتب $f(A)=\left\{f(x), x\in A\right\}=\left\{y\in F:\exists x\in A, y=f(x)\right\}$

مثال : لنعتبر التطبيق f ، معرف ب $f:\{1,2,3\}\to\left\{a,b,c,d\right\}$ حيث

$$f\left(1\right)=a, f(2)=c, f(3)=d$$

لدينا مثلا $f\left(\{2,3\}\right)=\{c,d\}$

الصورة العكسية

تعريف: ليكن f تطبيق من E نحو F ، ليكن $B\subseteq F$. الصورة العكسية للجزء B هي مجموعة جزئية من E نرمز لها ب $f^{-1}(B)$ مكونة من عناصر E التي صورها ب f تنتمي إلى B .
و نكتب $f^{-1}(B)=\{x\in E: f(x)\in B\}$

مثال : لنعتبر التطبيق f ، معرف ب $f:\{1,2,3\}\rightarrow\{a,b,c,d\}$ حيث
$f(1)=a,\ f(2)=c,\ f(3)=d$

لدينا مثلا $f^{-1}(\{a\})=\{1\}$ ، $f^{-1}(\{b\})=\phi$ ، $f^{-1}(\{a,b,d\})=\{1,3\}$.

ملاحظة : f غامر إذا و فقط إذا كان $f(E)=F$

خواص:

- $f(\phi)=\phi$ ، $f^{-1}(\phi)=\phi$
- $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$
- من اجل كل $A,B\in P(E)$ لدينا $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
- من اجل كل $A,B\in P(E)$ لدينا $f(A\cap B)\subset f(A)\cup f(B)$
- $gof(A)=g(f(A))$
- $A\subset B\Rightarrow f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$
- من اجل كل $A\in P(E)$ لدينا $A\subset f^{-1}(f(A))$
- f غامر إذا و فقط إذا كان $\forall B\subset F, f(f^{-1}(B))=B$
- من اجل كل $A,B\in P(F)$ لدينا $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$
- من اجل كل $A,B\in P(F)$ لدينا $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$
- من اجل كل $A,B\in P(F)$ لدينا $f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$
- $(gof)^{-1}(B)=f^{-1}(g^{-1}(B))$