Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider - Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologie

Tronc commun des Sciences et Technologie

L'essentiel du cours

Electrotechnique fondamentale 1

Niveau:

2ème année Tronc commun ST (3eme Semestre)

Tous les Filières de Génie Electrique

Préparé par:

Professeur Megherbi Ahmed Chaouki

Département de Génie électrique

Année Universitaire 2021/2022

CHAPITRE 1

I. Rappels Mathématiques sur les nombres complexes

I. Rappels Mathématiques sur les nombres complexes

I.1. Nombres complexes

I.1.1 Définition

On appelle nombre complexe z toute expression qui s'écrit de la forme suivante :

$$z = a + i\,b$$

Où a et b sont des nombres réels quelconques et i un nombre imaginaire tel que

$$i^2 = -1 \quad \text{et} \quad i = \sqrt{-1}\ .$$

a est appelé la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z.

Notation : a = Re(z) et b = Im(z).

a + i b est la forme algébrique de z.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle (a = 0) est appelé imaginaire pur. Si b = 0 on retrouve un nombre réel.

Exemples :

$$z = 3 - 2i \qquad z = -2i \qquad z = 1.$$

I.2. Opération dans ℂ

L'ensemble des nombres complexes est noté ℂ. Les règles de calcul dans ℂ sont les mêmes que dans ℝ.

I.2. 1.Egalité de deux nombres complexes

Comme tout nombre complexe z s'écrit de façon unique z = a + ib, a et b ∈ IR, on en déduit :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$Z_1 = Z_2$ si

$$a_1 = a_2 \ \text{et} \ b_1 = b_2$$

Conséquence: un nombre complexe est égale à zéro (nulle) z = a + ib = 0 ⇔ a = 0 et b = 0.

I.2. 2.Principales opérations sur les nombres complexes

- **<u>Addition :</u>**

La somme de deux nombres complexes $z_1 = a_1 + i\,b_1$ et $z_2 = a_2 + i\,b_2$ est un nombre complexe définie par :

$$Z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\ (b_1 - b_2)$$

- **La soustraction :**

La différence de deux nombres complexes $z_1= a_1+i\ b_1$ et $z_2= a_2+i\ b_2$ est un nombre complexe définie par :

$$Z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i\ (b_1 - b_2)$$

- **Multiplication**

La produit de deux nombres complexes $z_1= a_1+i\ b_1$ et $z_2= a_2+i\ b_2$ est un nombre complexe définie par :

$$Z = z_1 * z_2 = (a_1\ a_2 - b_1\ b_2)) + i\ (b_1\ a_2 - a_1\ b_2)$$

Cas particulier : $z^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2ab\ i$

- **Conjugué d'un nombre complexe**

Pour tout nombre complexe z = a + ib on associer le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$ appelé conjugué de z
On peut vérifie que :

$$z + \bar{z} = 2\,\Re \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = 2\,\mathrm{I}mg$$

- **Inverse d'un nombre complexe non nul**

Tout nombre complexe admet un inverse :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Cette propriété permet de mettre $\frac{1}{z}$ sous la forme a + i b (a et b $\in$ IR).

Exemple :

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)\,(3-4i)} = \frac{3}{25} - i\frac{4}{25}$$

Opérations sur les complexes conjugués

- Pour tout nombre complexe z : $\overline{(\bar{z})} = z$ (z et $\bar{z}$ sont conjugués l'un de l'autre)
- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.

- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.
- Si z = a + i b , alors $\bar{z} \cdot z = a^2 + b^2$.

On démontre que :

- Pour tous z_1 et z_2 de $\mathbb{C}$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- Pour tout z non nul , $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Conséquences: Pour tout z, z_1 et z_2

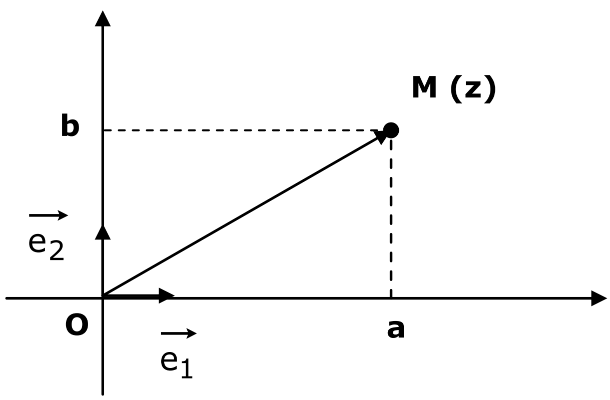
- $\overline{(-z)} = -\bar{z}$
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- Si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- Pour $\lambda \in IR$, $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$
- Pour $n \in IN$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

I.3 - Représentation géométrique des nombres complexes

I.3.1 – Image d'un nombre complexe

A tout nombre complexe z = a + ib on peut associer le point M de coordonnées (a , b) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

On dit que : M est **l'image** du nombre complexe z et z est **l'affixe** du point M. On note M(z).



.**Propriétés**:

- Les images du complexe z et de son opposé -z sont symétriques par rapport à l'origine O.
- Les images du complexe z et de son conjugué $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

I.3.2 - Module d'un nombre complexe

Le module d'un nombre complexe z, dont l'image est M, est la distance OM.
On note | z | = OM.
Posons z = a + ib, alors $\vec{OM} = a\,\vec{e_1} + b\,\vec{e_2}$

$$|z| = OM = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

En **particulier**, si z est réel (z = a) alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$

Inégalité triangulaire :

On démontre que pour tous z_1 et z_2 de $\mathbb{C}$, $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.
Module d'un produit :
z, z_1 et z_2 étant des complexes quelconques, on démontre que :
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| . |z_2|$.
$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ pour $z \neq 0$
$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ pour $z_2 \neq 0$.
Pour $n \in Z$, et pour $z \neq 0$, $|z^n| = |z|^n$.

I.3.2 Argument d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

En posant $|z| = \rho$,===➔ $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. ρ est le module de z et θ un argument de z.

Pour tout nombre complexe z non nul dont l'image M a pour coordonnées cartésiennes (a ; b) et pour coordonnées polaires (ρ ; θ), on a :

$$\begin{cases} a = \rho.\cos\theta \\ b = \rho.\sin\theta \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$

Forme algébrique : $z = a + ib$
Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i.\sin\theta)$

I.4.- Propriétés

Soit z et z' deux complexes non nuls : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

- **Egalité de deux nombres complexes**

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument.

$$z = z' \text{ équivaut à } (|z| = |z'| \text{ et } \theta = \theta')$$

- **Conjugués et opposés**

Deux complexes non nuls **sont conjugués** si et seulement si ils ont le même module et des arguments opposés.

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$

Deux complexes non nuls **sont opposés** si et seulement si ils ont le même module et des arguments de différence $\pi + 2k\pi$ ($k \in Z$).

$$|-z| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(-z) = \arg(z) + \pi.$$

- **Argument d'un produit**

Soit z et z' deux complexes non nuls.

- $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$, pour tout $n \in Z$.

I.5. Formule de Moivre

Ce dernier résultat peut aussi s'écrire sous la forme dite **formule de Moivre** :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \text{ pour } n \in Z.$$

Conseil pratique : Pour les opérations dans C, on utilise

- la forme algébrique pour les additions et soustractions.
- la forme trigonométrique pour les multiplications, divisions et puissances.

I.6. Forme exponentielle des nombres complexes

Définition

Pour tout réel θ, on pose : $\mathbf{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.}$

Propriétés

Soit z et z' deux complexes non nuls. $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

La notation exponentielle donne : $z = |z|\, e^{i\theta}$ et $z' = |z'|\, e^{i\theta'}$.

D'où

- ✓ $z \cdot z' = |z| \cdot |z'| \; e^{i(\theta+\theta')}$
- ✓ $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|\, e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|} e^{-i\theta}$
- ✓ $\frac{z}{z'} = \frac{|z|\, e^{i\theta}}{|z'|\, e^{i\theta'}} = \frac{|z|}{|z'|} e^{i\theta - i\theta'}$
- ✓ $z^n = (|z| \cdot e^{i\theta})^n = |z|^n \cdot e^{in\theta}$, pour $n \in Z$.

Remarque

- Dans la notation exponentielle, la formule de Moivre s'écrit : $\mathbf{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$

I.7. Formules d'Euler

Pour tout réel θ, on a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$.

Par addition et soustraction membre à membre, on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$