# Chapitre *II* *Flexion composée*

## 1. <u>Définition</u>

Dans une poutre à plan sollicitée en flexion composée le système des forces appliquées à gauche d'une section S est réductible au centre de gravité G de S :

- A un effort normal ***N*** perpendiculaire au plan de ***S*** et dirigée vers la droite (effort de compression) ou vers la gauche (effort de traction),
- A un couple de moment **M** (moment de flexion) d'axe perpendiculaire au plan de symétrie de la section,
- A un effort tranchant **V** contenue dans le plan de S et dans le plan de symétrie de la section.

Les effets de effort tranchant sont étudiés indépendamment de ceux de M et de N.

Le système constitué par le moment fléchissant (M) et l'effort normal (N) peut être remplacé par une force unique équivalente à (N) et appliquée au point (C) appelé ***centre de pression*** distant de O d'une quantité : $e = \frac{M_o}{N}$

En flexion composée, il faut toujours préciser en quel point on effectue la réduction des forces.
Ce point sera normalement :

- Soit le centre de gravité $G_0$ du béton seul

$$e = \frac{M_G}{N}$$

- Soit le centre de gravité des armature tendues :

$$e_a = \frac{M_a}{N}$$

En flexion composée, la première chose à faire est de calculer e pour placer le centre de pression.

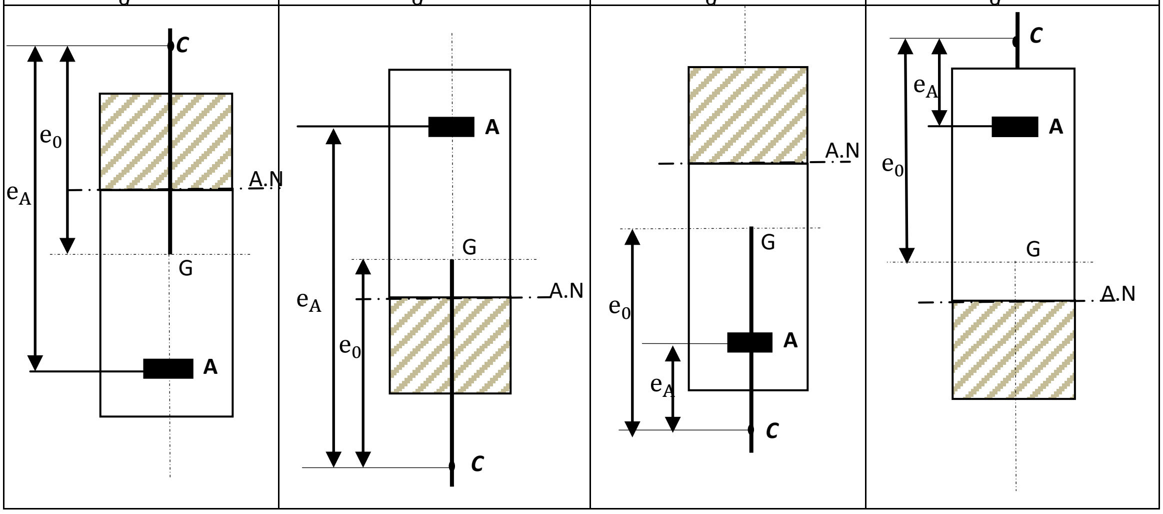
- Si (N) est un effort de compression le centre de pression (C) se trouve du côte des fibres comprimées $e_a > e_G$
- Si (N) est un effort de traction le centre de pression se trouve du côte des fibres tendues $e_a < e_G$

On peut distinguer que, suivant le signe de l'effort normal et la position du centre de pression, la section peut être :

- Entièrement tendue ,
- Partiellement comprimée ,

- Entièrement comprimée.

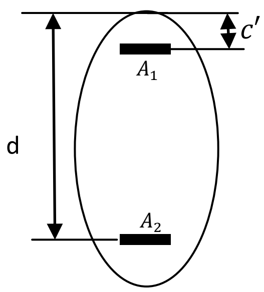
| *N est une compression* | | *N est une traction* | |
|---|---|---|---|
| $M_G > 0$ | $M_G < 0$ | $M_G > 0$ | $M_G < 0$ |




## 2. ***Flexion composée à état limite ultime de résistance***

### ***a) Section entièrement tendue***

Une section sera entièrement tendue si l'effort normal N est un effort de traction et le centre de pression C se trouve entre les armatures.




Les armatures pourront être déterminées par application des formules suivantes :

$$A_1 = \frac{N e_A}{100(d - c')\sigma_{10}} \qquad A_2 = \frac{N}{100\sigma_{10}} - A_1$$

### ***b) Section partiellement comprimée***

Une section sera partiellement comprimée si :

- ✓ Le centre de pression est situé à l'extérieur de la section (que l'effort normal soit un effort de traction ou de compression).

- ✓ Le centre de pression se trouve à l'intérieur de la section (proche des armatures supérieures) et l'effort appliqué est un effort de compression et la condition suivante est vérifiée:
  - ➢ Pour une section rectangulaire :

$$\mathrm{N}(\mathrm{d}-\mathrm{c}')-\mathrm{M}_1 \leq (0.337\,\mathrm{h}-0.81\mathrm{c}')\mathrm{bh}\times\sigma_{\mathrm{bc}}$$

Avec $M_1 = M_0 + \left(\frac{h}{2} - c\right)N$

  - ➢ Pour une section en T :

$$N_r(\mathrm{d}-\mathrm{c}')-\mathrm{M_r} \leq (0.337\,\mathrm{h}-0.81\mathrm{c}')\mathrm{bh}\times\sigma_{\mathrm{bc}}$$

Avec $M_r = M_1 - (b-b_0)h_0\left(d - \frac{h_0}{2}\right)\sigma_{bc}$ et $N_r = N - (b-b_0)h_0\sigma_{bc}$

Les armatures d'une section rectangulaire soumise à la flexion composée et partiellement comprimée pourront être calculées comme suivant :

1. Calculer la section donnée en supposant qu'elle est soumise à la flexion simple sous l'effet d'un moment fictif $M_1$ égale au moment par rapport aux armatures tendues,
2. Soient $A_f$, $A_f'$ les armatures ainsi déterminées.
3. Les armatures $A$, $A'$ de la section réelle auront pour valeurs :
   - ✓ Si N est un effort de compression $A' = A_f'$ $\quad A = A_f - \frac{N}{100\sigma_{10}}$
   - ✓ Si N est un effort de traction $A = A_f + \frac{N}{100\sigma_s}$ $\quad A'=A_f'$

<u>Remarque :</u> si on trouve $A<0$ on prévoira pour A la valeur minimale pour que la pièce ne soit pas fragile.

### c) <u>*Section entièrement comprimée*</u>

Une section sera entièrement comprimée si :

- ✓ l'effort normal N est un effort de compression et le centre de pression C se trouve entre les armatures et la condition suivante est vérifiée:

$$(0.337-0.81\,c')\,b.h^2\,\bar{\sigma}_b < N(d-c')-M_1$$

  - ➢ **Si $N(d-c')-M_1 \geq (0.5\mathrm{h}-\mathrm{c}')\mathrm{b.h}\,\sigma_{\mathrm{bc}}$**

La section des armatures seront obtenues par les formules suivantes :

$$A_1' = \frac{\mathrm{M_1}-(\mathrm{d}-0.5\mathrm{h})\mathrm{b.h}\,\sigma_{\mathrm{bc}}}{(d-c')\sigma_2} \qquad A_2' = \frac{\mathrm{N_u}-100\mathrm{b.h}\,\sigma_{\mathrm{bc}}}{100\sigma_2} - A_1'$$

Avec $\sigma_2$ contrainte de l'acier pour $\varepsilon_s = 2\%$

➢ **Si** $N(d-c')-M1 < (0.5\mathbf{h}-\mathbf{c}')\mathbf{b.h}\,\sigma_{bc}$

La section des armatures seront obtenues par les formules suivantes :

$$A'_2 = 0 \quad ; \; A'_1 = \frac{N_u - 100\psi.b.h\,\sigma_{bc}}{100\sigma_s^1}$$

Avec $\psi = \dfrac{0.357 + \frac{N(d-c')-100M1}{100b.h^2\,\sigma_{bc}}}{0.8571 - \frac{c'}{h}}$ $\quad et \quad \varepsilon_s^1 = 2 + \left(3.437 - 8.019\frac{c'}{h}\right)\sqrt{1-\psi}$ $\quad$ d'ou $\sigma_s^1$

***Remarque :***

Selon l'article (A.4.4 BAEL91), les sections soumises à un effort normal de compression sont justifiées vis-à-vis de l'état limite ultime de résistance de forme en adoptant une excentricité totale de calcul : $e_t = e_1 + e_2$

Cependant il est possible de tenir compte des effets du second ordre de façon forfaitaire lorsque :

$$\frac{L_f}{h} \leq \max\left(15\,,20\,\frac{e_1}{h}\right)$$

Avec : h : la longueur totale de la section du poteau dans la direction du flambement.

**$e_1$** : excentricité (dite du premier ordre) de la résultante des contraintes normales, y compris l'excentricité additionnelle. $\quad e_1 = \frac{M}{N} + e_a$

**$e_a$** : excentricité additionnelle traduisant les imperfections géométriques des efforts appliqués.

$$e_a = \max\left(2\text{cm},\ \frac{L}{250}\right)$$

**$e_2$** : excentricité due aux effets du second ordre, liés à la déformation de la structure.

$$e_2 = \frac{3\,.\,(l_f)^2}{10^4\,.\,h}\,(2+\alpha\varphi)$$

**α** : Le rapport du moment du premier ordre, dû aux charges permanentes et quasi-permanentes, au moment total du premier ordre, le coefficient α est compris entre 0 et 1.

➢ L'effort normal ultime est définit comme étant l'effort axial maximal que peut supporter un poteau sans subir des instabilités par flambement.

On doit vérifier que :

$$N_d \leq N_u = \alpha\left(\frac{B_r f_{c28}}{0.9\gamma_b} + A_s\frac{f_e}{\gamma_s}\right)$$

- $A_s$ est la section d'acier comprimée prise en compte dans le calcul;

- $B_r$ est la réduite du poteau obtenue en déduisant de sa section réelle un centième d'épaisseur sur toute sa périphérie;
- $\alpha$ est un coefficient fonction de l'élancement mécanique λ qui prend les valeurs :

$\alpha = \frac{0.85}{1+0.2\left(\frac{\lambda}{35}\right)^2}$ pour $\lambda \leq 50$

$\alpha = 0.60\left(\frac{50}{\lambda}\right)^2$ pour $50 < \lambda \leq 70$

- Si plus de la moitié des charges est appliquée avant 90 jours, alors on remplace α par α/1.10.
- L'élancement mécanique est donné par :

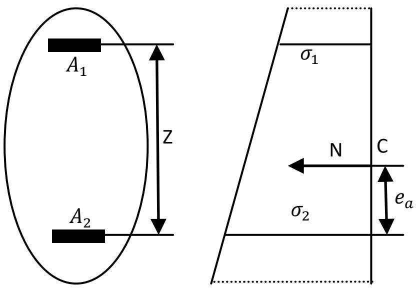
$$\lambda = 3.46\ {}^{l_f}/_{b} \quad pour\ les\ section\ rectangulaires$$

$$\lambda = 4\ {}^{l_f}/_{\emptyset} \quad pour\ les\ sections\ circulaires$$

## 3. *Flexion composée à état limite de service*

### a) *Section entièrement tendue*

Une section sera entièrement tendue si l'effort normal N est un effort de traction et le centre de pression C se trouve entre les armatures.




On aura alors avec le notation indiquées sur la figure ci-dessus, ou $e_a$ représente la distance du centre de pression C à l'armature inférieure :

$$\sigma_1 = \frac{Ne_a}{A_1 Z} \qquad \sigma_2 = \frac{N(Z - e_a)}{A_2 Z}$$

### b) *Section entièrement comprimée*

Une section sera entièrement comprimée si :

- ✓ l'effort normal N est un effort de compression et le centre de pression C se trouve entre les armatures et la condition suivante est vérifiée :

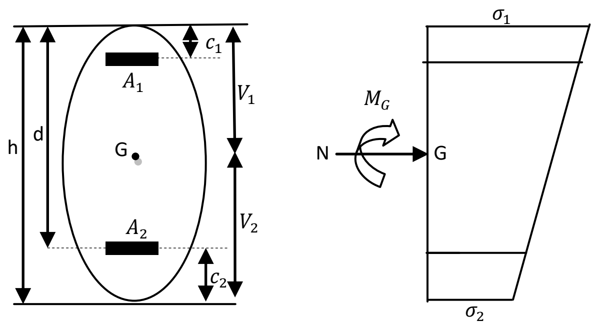
$$\frac{M_G}{N} \leq \frac{I}{B_0 V_2}$$

Avec

G : Centre de gravité de la section homogène ;

N : Effort normal de compression;

$M_G$ : Moment par rapport au centre de gravité G




Nous avons alors :

$$\sigma_1 = \frac{N}{B_0} + \frac{M_G V_1}{I}$$
$$\sigma_2 = \frac{N}{B_0} - \frac{M_G V_2}{I}$$

Avec

$B_0 = B + n(A_1 + A_2)$

$I = \frac{b}{3}(V_1^3 + V_2^3) + 15[A_1(V_1 - c_1)^2 + A_2(V_2 - c_2)^2]$

$v_1 = \frac{1}{B_0}\left[\frac{bh^2}{2} + 15(A_1c_1 + A_2 d)\right]$ $\quad et \quad$ $v_2 = h - v_1$

Pour que la section soit entièrement comprimée, il faut $\sigma_2 \geq 0$ , donc : $\frac{M_G}{N} \leq \frac{I}{B_0 V_2}$

### c) ***Section partiellement comprimée***

Une section sera partiellement comprimée si :

- ✓ le centre de pression est situé à l'extérieur de la section (que l'effort normal soit un effort de traction ou de compression).
- ✓ Le centre de pression se trouve à l'intérieur de la section (proche des armatures supérieures) et l'effort appliqué est un effort de compression on a :

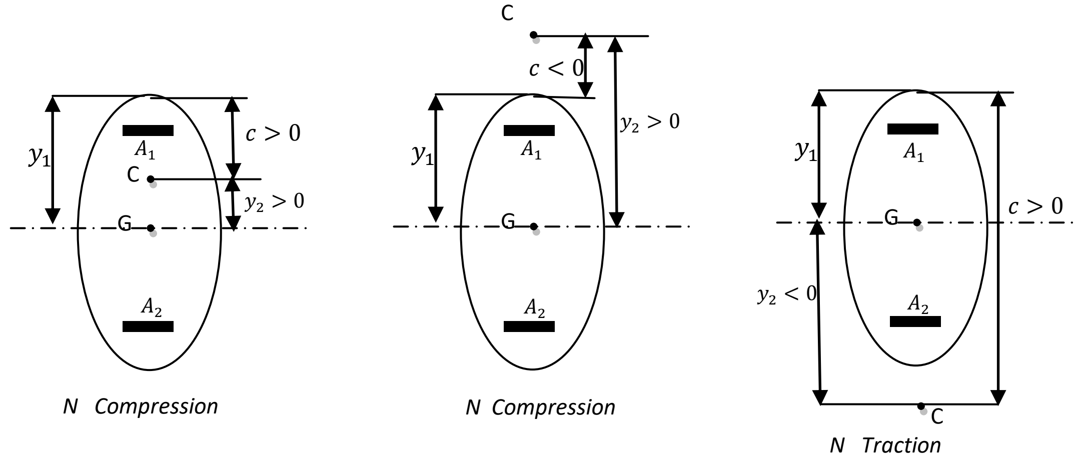
$$\frac{M_G}{N} \geq \frac{I}{B_0 V_2}$$

Avec

G : Centre de gravité de la section homogène ;

N :Effort normal de compression;

$M_G$ :Moment par rapport au centre de gravité G.




- **Si N est un effort de compression**

D'après les figures ci-dessus, on a $0 < y_1 = y_2 + c < h$

$y_2$ sera obtenu par résolution de l'équation suivante : $y_1^3 + py_2 + q = 0$

Avec

$$p = -3c^2 - \frac{90A'}{b}(c - c') + \frac{90A}{b}(d - c)$$

$$q = -2c^3 - \frac{90A'}{b}(c - c')^2 - \frac{90A}{b}(d - c)^2$$

$$S = \frac{by_1^2}{2} + 15(\,A'(y_1 - c') - A(d - y_1))$$

Les contraintes seront déterminées par les équations suivantes :

$$\sigma_b = \frac{N}{S} y_1$$

$$\sigma'_s = 15\frac{N}{S}(y_1 - c')$$

$$\sigma_s = 15\frac{N}{S}(d - y_1)$$

- **Si N est un effort de traction :** nous avons la valeur négative pour $y_2$ $et$ $N$, par suite on calcul la valeur $y_2$ et en déterminera les valeurs de K, S, $\sigma_{b,}$ $\sigma_s$, $\sigma_s{}'$.