Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des SE et SNV
Département de SM
Première année Licence: LMD, SM

Année Universitaire: 2021-2020
Premier Semestre, Module: Maths II

TD4

Exercice 1 ***(Equations différentielles à variables séparables)***

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $(x+1)y' + y = 0$

2) $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = 0$ *vérifiant* $y\,(0) = 1$

Exercice 2 ***(Equations différentielles linéaires du 1er ordre)***

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $y' + xy = x$

2) $y' - \dfrac{y}{x} = \ln x$

Exercice 3 ***(Equations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constants)***

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$

2) $y'' + 2y' + 5y = 0$ *vérifiant* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$

3) $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x$

4) $y'' - y' + y = 2x^2e^{-x}$

5) $y'' - y = -6\cos x + 2\sin x$

Solution : 1

Rappel :

Les équations différentielles à variables séparables s'écrivent sous la forme :

$$y' = f(x)g(y)$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

———————————————————————————————————

1) $(x+1)y' + y = 0$.....(E)

Remarque : $y = 0$ *est une solution de* (E)

si $y \neq 0$ *:*

$(x+1)y' + y = 0 \Longleftrightarrow y' = -\dfrac{1}{x+1}y$

$\Longleftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x+1}y \Longleftrightarrow \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{1}{x+1}dx$

d'où

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x+1}dx \Longrightarrow \ln|y| = -\ln|x+1| + C = \ln\frac{1}{|x+1|} + C,$ $C \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow |y| = \dfrac{1}{|x+1|}e^C \Longrightarrow y = \pm e^C \dfrac{1}{x+1} \Longrightarrow y = \dfrac{k}{x+1},\ \ k \in \mathbb{R}^*$

Puisque $y = 0$ *est solution de* (E) *alors :*

$y = \dfrac{K}{x+1},\ \ K \in \mathbb{R}$

———————————————————————————————————

2) $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = 0$.....$(G)$

Remarque : $y = 0$ *est une solution de* (G)

si $y \neq 0$ *:*

$y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = 0 \Longleftrightarrow y' = -\dfrac{x}{1-x^2}y$

$\Longleftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{1-x^2}y \Longleftrightarrow \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{x}{1-x^2}dx$

d'où

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{x}{1-x^2}dx \Longrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow |y| = \sqrt{|1-x^2|}e^C \Longrightarrow y = \pm e^C\sqrt{|1-x^2|}$

$\Longrightarrow y = k\sqrt{|1-x^2|},\ \ k \in \mathbb{R}^*$

Puisque $y = 0$ *est solution de* (G) *alors :*

$y = K\sqrt{|1-x^2|},\ \ K \in \mathbb{R}$

On cherche la solution qui vérifie la condition $y(0) = 1$.

$y(0) = 1 \Longleftrightarrow K = 1$

d'où $y = \sqrt{|1-x^2|}$

Solution : 2

Rappel :

Les équations différentielles linéaires du 1er ordre s'écrivent sous la forme :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont deux fonctions continues.*

——

1) $y' + xy = x......(E)$

La solution générale de $(E) : y_G = y_p + y$

où y_p *est une solution particulière de* (E)

et y *est la solution générale de l'équation sans second membre*

$(E_0) : y' + xy = 0$

On remarque que $y_p = 1$ *est une solution particulière de* (E).

On cherche maintenant la solution générale de l'équation sans second membre

$(E_0) : y' + xy = 0$ *c'est une équation différentielle à variables séparables*

On remarque que $y = 0$ *est solution de* (E_0).

Si $y \neq 0$:

$y' + xy = 0 \Longleftrightarrow y' = -xy$

$\Longleftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -xy \Longleftrightarrow \dfrac{dy}{y} = -xdx$

d'où

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int xdx \Longrightarrow \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow |y| = e^{-\frac{x^2}{2}}e^C \Longrightarrow y = \pm e^C e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\Longrightarrow y = ke^{-\frac{x^2}{2}}, \ \ k \in \mathbb{R}^*$

Puisque $y = 0$ *est solution de* (E_0) *alors*

$y = Ke^{-\frac{x^2}{2}}, \ \ K \in \mathbb{R}$

Par conséquent la solution générale de (E) *est donnée par :*

$y_G = y_p + y = 1 + Ke^{-\frac{x^2}{2}}, \quad K \in \mathbb{R}.$

——

2) $y' - \dfrac{y}{x} = \ln x ...(F)$

La solution générale de (F) : $y_G = y_p + y$

où y_p *est une solution particulière de* (F)

et y *est la solution générale de l'équation sans second membre*

$(F_0) : y' - \dfrac{y}{x} = 0$

La solution particulière y_p *de* (F) *n'étant pas évidente, on cherche tout d'abord la solution générale de l'équation sans second membre*

$(F_0) : y' - \dfrac{y}{x} = 0$ *c'est une équation différentielle à variables séparables*

On remarque que $y = 0$ *est solution de* (F_0).

Si $y \neq 0$:

$y' - \dfrac{y}{x} = 0 \Longleftrightarrow y' = \dfrac{y}{x}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \Longleftrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$

d'où

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln|y| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow |y| = |x| e^C \Longrightarrow y = \pm e^C x \Longrightarrow y = kx, \ \ k \in \mathbb{R}^*$

Puisque $y = 0$ *est solution de* (F_0) *alors :*

$y = Kx, \ \ K \in \mathbb{R}$

Pour trouver la solution particulière, on applique ***la méthode de variation de la constante (MVC).*** *Cette méthode consiste à remplacer la constante* K *par une fonction* $K(x)$.

On pose : $y = K(x)x$

alors $y' = K'(x)x + K(x)$

On remplace y *et* y' *dans l'équation* (F) *pour obtenir* $K'(x)$:

$K'(x)x + K(x) - \dfrac{K(x)x}{x} = \ln x \Longrightarrow K'(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$\Longrightarrow K(x) = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx$

On pose $U = \ln x \Longrightarrow dU = \dfrac{1}{x} dx$

$K(x) = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx = \int U dU = \frac{U^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

d'où $y = K(x)x = \dfrac{(\ln x)^2}{2} x + Cx$

Solution : 3

Rappel :

Les équations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constants s'écrivent sous la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x).......(E)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue.*

La solution générale de (E) *s'écrit sous la forme :* $y = y_p + y_0$

où y_p *est une solution particulière de* (E) *et* y_0 *est la solution générale de l'équation sans second membre* (E_0).

$y'' + ay' + by = 0....(E_0)$ *est l'équation sans second membre.*

$r^2 + ar + b = 0.....(E_c)$ *est l'équation caractéristique.*

- Si $\Delta > 0$, *on a deux racines réelles* r_1 *et* r_2, *dans ce cas la solution de* (E_0) *s'écrit sous la forme :*

$y_0 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

- Si $\Delta = 0$, *on a une racine double* r, *dans ce cas la solution de* (E_0) *s'écrit sous la forme :*

$y_0 = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

- Si $\Delta < 0$, *on a deux racines complexes et conjuguées* $r = \alpha \pm \beta i$, *dans ce cas la solution de* (E_0) *s'écrit sous la forme :*

$y_0 = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Résolution de l'équation avec second membre :

$y'' + ay' + by = f(x)....(E)$

On cherche la solution générale de (E) *en utilisant la méthode de variation des constantes. Cette méthode consiste à remplacer les constantes* C_1 *et* C_2 *par des fonctions* $C_1(x)$ *et* $C_2(x)$.

Soit $y_0 = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ *la solution générale de* (E_0)

On pose $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

Pour trouver $C_1(x)$ *et* $C_2(x)$, *on résoud le système suivant :*

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x) \end{cases}$$

———————————————————————————

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$
L'équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$
$\Delta = 1 \Longrightarrow r_1 = 1$ *et* $r_2 = 2$
donc $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

———————————————————————————————————

2) $y'' + 2y' + 5y = 0$ *vérifiant* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$
L'équation caractéristique : $r^2 + 2r + 5 = 0$
$\Delta = -16 = 16i^2 \Longrightarrow r = -1 \pm 2i$
donc $y_0 = e^{-x}\left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
On cherche la solution particulière qui vérifie $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$
$y(0) = 0 \Longleftrightarrow C_1 = 0$
donc $y_0 = C_2 e^{-x} \sin(2x) \Longrightarrow y_0' = -C_2 e^{-x} \sin(2x) + 2C_2 e^{-x} \cos(2x)$
$y'(0) = 1 \Longleftrightarrow C_2 = \dfrac{1}{2}$
d'où $y_0 = \dfrac{1}{2} e^{-x} \sin(2x)$

———————————————————————————————————

3) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x ......(E)$
On commence par résoudre l'équation sans second membre
$y'' - 2y' + y = 0......(E_0)$
L'équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$
$\Delta = 0 \Longrightarrow r = 1$ *: racine double*
donc $y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

On cherche maintenant la solution générale de (E) *en utilisant la méthode de variation des constantes. Cette méthode consiste à remplacer les constantes* C_1 *et* C_2 *par des fonctions* $C_1(x)$ *et* $C_2(x)$.

On pose $y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$
où $y_1 = e^x$ *et* $y_2 = xe^x$
Pour trouver $C_1(x)$ *et* $C_2(x)$, *on résoud le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 & = & 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' & = & f(x) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x & = & 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x & = & (x^2+1)e^x \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} C_1'(x) + C_2'(x)x & = & 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x)(x+1) & = & x^2+1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} C_1'(x) & = & -C_2'(x)x \\ C_2'(x) & = & x^2+1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} C_1'(x) & = & -x^3 - x \\ C_2'(x) & = & x^2+1 \end{array}\right.$$

d'où

$$\begin{cases} C_1(x) &= -\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + K_1 \\ C_2(x) &= \dfrac{x^3}{3} + x + K_2 \end{cases}$$

donc $y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x = (-\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + K_1)e^x + (\dfrac{x^3}{3} + x + K_2)xe^x$

d'où $y = (\dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^2}{2} + K_1 + K_2x)e^x$ *est la solution générale de* (E).

---

4) $y'' - y' + y = 2x^2e^{-x}$.....$(F)$

On commence par résoudre l'équation sans second membre

$y'' - y' + y = 0$......(F_0)

L'équation caractéristique : $r^2 - r + 1 = 0$...(F_c)

$\Delta = -3 = 3i^2 \Longrightarrow r = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

donc $y_0 = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

On cherche maintenant une solution particulière de (F) *en utilisant la deuxième méthode :*

le second membre de l'équation (F) *s'écrit sous la forme*

$f(x) = 2x^2e^{-x} = P_2(x)e^{\lambda x}$

avec $\lambda = -1$ *et* $P_2(x) = 2x^2$ *polynôme de degré* 2.

$\lambda = -1$ *n'est pas racine de l'équation caractéristique* (F_c), *donc la solution particulière de l'équation* (F) *s'écrit sous la forme*

$y_p = Q_2(x)e^{\lambda x} = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

On calcule y_p' *et* y_p'' *:*

$y_p' = -(ax^2+bx+c)e^{-x} + (2ax+b)e^{-x} = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$

$y_p'' = -(-ax^2 + (2a-b)x + b - c)e^{-x} + (-2ax + 2a - b)e^{-x}$

$= (ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b + c)e^{-x}$

On remplace y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (F), *on obtient*

$(ax^2 + (-4a+b)x + 2a - 2b + c)e^{-x} - (-ax^2 + (2a-b)x + b - c)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)e^{-x} = 2x^2e^{-x}$

$\Longleftrightarrow 3ax^2 + (-6a + 3b)x + 2a - 3b + 3c = 2x^2$

Par identification on trouve

$$\begin{cases} 3a &= 2 \\ -6a + 3b &= 0 \\ 2a - 3b + 3c &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a &= 2/3 \\ b &= 4/3 \\ c &= 8/9 \end{cases}$$

donc $y_p = (\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{9})e^{-x}$
d'où la solution générale de (F) *est*
$y = y_p + y_0$
$y = (\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{9})e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right),$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

5) $y'' - y = -6\cos x + 2\sin x$.....$(G)$
On commence par résoudre l'équation sans second membre
$y'' - y = 0$......(G_0)
L'équation caractéristique : $r^2 - 1 = 0$...(G_c)
$\Longrightarrow r^2 = 1 \Longrightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$
donc $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$
On cherche maintenant une solution particulière de (G) *en utilisant la deuxième méthode :*
le second membre de l'équation (G) *s'écrit sous la forme*
$f(x) = e^{\lambda x}[P_0(x)\cos(\gamma x) + Q_0(x)\sin(\gamma x)] = -6\cos x + 2\sin x$
avec $\lambda = 0$, $\gamma = 1$, $P_0(x) = -6$ *et* $Q_0(x) = 2$ *polynômes de degré* 0.
$\lambda + \gamma i = i$ *n'est pas racine de l'équation caractéristique* (G_c)*, donc la solution particulière de l'équation* (G) *s'écrit sous la forme*
$y_p = e^{\lambda x}[U_0(x)\cos(\gamma x) + V_0(x)\sin(\gamma x)] = A\cos(x) + B\sin(x)$
On calcule y_p' *et* y_p'' *:*
$y_p' = -A\sin x + B\cos x$
$y_p'' = -A\cos x - B\sin x$
On remplace y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (G)*, on obtient*
$-A\cos x - B\sin x - A\cos x - B\sin x = -6\cos x + 2\sin x$
$\Longrightarrow -2A\cos x - 2B\sin x = -6\cos x + 2\sin x$
Par identification on trouve

$$\left\{\begin{array}{lcl} -2A & = & -6 \\ -2B & = & 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 3 \\ B & = & -1 \end{array}\right.$$

donc $y_p = 3\cos(x) - \sin(x)$
d'où la solution générale de (G) *est*

$$y = y_p + y_0 = 3\cos(x) - \sin(x) + C_1e^x + C_2e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$