Séries entières

Suites de fonctions

Soient $u_1(z)$, $u_2(z)$, ..., $u_n(z)$, ou $(u_n(z))$ une suite de fonctions définies et uniformes sur un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$.

Si $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z)$, on dit que la suite de fonctions $(u_n(z))$ est convergente ou converge vers $u(z)$.

Sinon on dit qu'elle est divergente.

Exemple:

On a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z^2}{n}\right) = 1$, donc la suite $(u_n(z))$ de terme général $u_n(z) = 1+\frac{z^2}{n}$ converge vers 1

La suite $(u_n(z))$ de terme général $u_n(z) = z^n$ converge vers 0 si $|z| < 1$ et converge vers 1 si $|z| = 1$, diverge si $|z| > 1$.

Séries de fonctions

À partir d'une suite de fonctions $(u_n(z))$, nous définissons la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ qui est appelée série de fonctions infinie de terme général $u_n(z)$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = S(z)$ la série est dite convergente vers sa somme $S(z)$, sinon la série est dite divergente.

Convergence absolue

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est absolument convergente si la série des valeurs absolues $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ est convergente.

Remarques

1) Si la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = 0$, la réciproque est fausse.

2) Si une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge $\forall z \in D \subseteq \mathbb{C}$, on dira que D est le domaine de convergence de la série.

3) Si $\sum_{i=n}^{\infty} |u_n(z)|$ est convergente, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, est convergente, la réciproque est fausse.

4) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, est convergente mais que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ est divergente, on dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$est semi convergente.

Séries entières

Définition:
Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose
$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$, $\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}$ et
$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$.
On dit que $D(z_0, r)$ (respectivement $\bar{D}(z_0, r)$, $C(z_0, r)$ est le disque ouvert (respectivement disque fermé, cercle) de centre z_0 et de rayon r.
Définition:
On appelle série entière en $(z - z_0)$ toute série qui est de la forme
$\sum_{n=0}^{\infty} u_n (z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, où $a_n \in \mathbb{C}$.

Rayon de convergence

Théorème:
Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière, alors il existe un unique élément $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que:
1) si $|z - z_0| < r$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est absolument convergente
2) si $|z - z_0| > r$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est divergente.
3) Pour $|z - z_0| = r$ elle peut converger ou diverger.
On dit que r est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ et $D(z_0, r)$, est le disque de convergence
Remarques:
1) Si $r = 0$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniquement en $z = z_0$.
2) Si $r = \infty$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$.
Théorème:
Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n (z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière, alors le rayon de convergence de la série est donné par:
1) **Critère de d'Alembert:**

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

.
2) **Critère de Cauchy**:

$$r = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Exemple:
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:
$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)\,3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$.

1) $a_n = n$,
donc $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$

2) $a_n = n!$,
donc $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$

3) $a_n = \frac{1}{(2n-1)!}$,

$$\text{donc } r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|(2n+1)\,2n\right| = \infty$$

4) $a_n = \frac{1}{(2n+1)\,3^n}$,

$$\text{donc } r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(2n+1)\,3^n}}{\frac{1}{(2n+3)\,3^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(2n+1)\,3^n}}{\frac{1}{(2n+3)\,3^{n+1}}}\right| = 3.$$

5) $a_n = n^n$,
donc $r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Critères spéciaux de convergence:

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ une série entière.

1) **Critère de d'Alembert:**
Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$, alors série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge absolument si $l<1$, diverge si $l>1$, et si $l=1$ on ne peut rien conclure et le domaine de convergence est

a) $D(z_0, \frac{1}{l})$ si $l>0$.
b) $D(z_0, \infty)$ si $l=0$

2) **Critère de Cauchy:**
Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, alors série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge absolument si $l<1$, diverge si $l>1$, et si $l=1$ on ne peut rien conclure. et le domaine de convergence est

a) $D(z_0, \frac{1}{l})$ si $l>0$.
b) $D(z_0, \infty)$ si $l=0$.

Exemple:
Déterminer le domaine de convergence des séries entières suivantes:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n,\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)\,3^n},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$
1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)}{n}\right| = 1$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$ converge absolument pour $|z|<1$ (c'est à dire
dans le disque ouvert $D((0,1)$.
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)}{n!}\right| = \infty.$
donc la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$ converge simplement pour $z=0$.
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n-1)!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right| = 0$
donc la série entière $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ converge absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{(z+2)^n}{(2n+3)\,3^{n+1}}}{\frac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)\,3^n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(2n+3)\,3^{n+1}}}{\frac{1}{(2n+1)\,3^n}}\right| = \dfrac{1}{3}$

donc la série entière$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)\,3^n}$ converge absolument pour $|z+2|<3$.
5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

donc la série entière $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. converge simplement pour $z=0$.
Les séries entières sont holomorphes
Maintenant nous allons voir, plus généralement, que toute série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

qui converge dans $D(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C},\ |z-z_0|<r\}$ est holomorphe dans $D(z_0,r)$.

De plus pour tout $z\in D(z_0,r)$ on a:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

et

Développement en séries entières

Théorème de Taylor

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D, alors

$f(z) = f(z_0) + (z-z_0) f^{'}(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} f^{''}(z_0) + \frac{(z-z_0)^3}{3!} f^{^{(3)}}(z_0) + ... + \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{^{(n)}}(z_0) + ...$

Cette série est appelée série de Taylor de f centrée en z_0.

Si le centre $z_0 = 0$ alors la série devient

$f(z) = f(0) + z f^{'}(0) + \frac{z^2}{2!} f^{''}(0) + \frac{z^3}{3!} f^{^{(3)}}(0) + ... + \frac{z^n}{n!} f^{^{(n)}}(0) + ...$

et on l'appelle la série de Maclaurin de f.

Le domaine de convergence de la de série est défini par $|z - z_0| < r$,

où r est le rayon de convergence

Théorème de Cauchy-Taylor

Soit f une fonction holomorphe dans $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < r\}$, alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{pourtout } z \in D(z_0, r)$$

avec

$$a_n = \frac{f^{^{(n)}}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2...$$

$C(z_0, r)$ est le cercle de centre z_0 et de rayon r.

Exemple:

Quelques séries de Maclaurin avec leurs domaines de convergence

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1$

$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + ... + (-1)^n z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad |z| < 1.$

$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad |z| < 1.$

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad |z| < \infty.$

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad |z| < \infty.$

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad |z| < \infty.$

Exemple:

Développer en série de Taylor autour de $z_0 \in \mathbb{C}$, les fonctions suivantes:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z+3}, \quad z_0 = 1.$

2) $f(z) = \ln \dfrac{1+z}{1-z}, \quad z_0 = 0.$

3) $f(z) = \cos z, \quad z_0 = \pi/4.$

Dans chacun des cas, donner le domaine de convergence de la série obtenue.

Solution

1) On peut écrire $f(z)$ comme

$$f(z) = \frac{1}{z+3} = \frac{1}{z-1+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\dfrac{z-1}{4}\right)}$$

On développe $\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{z-1}{4}\right)}$ en série de Taylor en $z_0 = 1$.ou en série de puissances de $(z-1)$:

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{z-1}{4}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{4}\right)^n,$$

donc la série de Taylor de la fonction $f(z)$ en $z_0 = 1$ est:

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{4}\right)^n$$

On a: $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}{(-1)^n\left(\dfrac{1}{4}\right)^n} \right| = \dfrac{1}{4}$, donc la série converge absolument pour $|z-1| < 4$.

c'est à dire à l'intérieur du disque de rayon 4 centré au point 1.

2) La série de Taylor de la fonction $\ln(1+z)$ en $z_0 = 0$ est

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + ...$$

et la série de Taylor de la fonction $\ln(1-z)$ en $z_0 = 0$ est

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - ... - \frac{z^{n+1}}{n+1} + ...$$

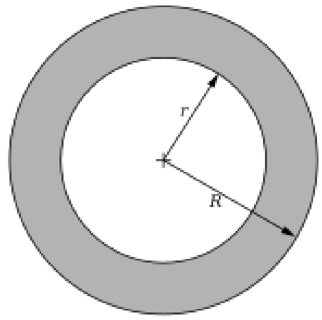
Puisque la fonction $f(z) = \ln \dfrac{1+z}{1-z} = \ln(1+z) - \ln(1-z)$,

donc la série de Taylor de la fonction $\ln \dfrac{1+z}{1-z}$en $z_0 = 0$ est

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = 2z + 2\frac{z^3}{3} + ... + 2\frac{z^{2n+1}}{2n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{2\dfrac{1}{2n+3}}{2\dfrac{1}{2n+1}} \right| = 1$, donc la série converge absolument pour $|z| < 1$.

3) $f(z) = \cos z$



On a $f\left(\pi/4\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ f^{'}\left(\pi/4\right)=-\sin\left(\pi/4\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ f^{''}\left(\pi/4\right)=-\cos\left(\pi/4\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

La série de Taylor de la fonction $\cos z$ en $z_0=\pi/4$ est

$$f\left(z\right)=\cos z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)^{n}}{n!}$$

On a $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\left(-1\right)^{n+1}\dfrac{1}{(n+1)!}}{\left(-1\right)^{n}\dfrac{1}{n!}}\right|=0,$

donc série converge absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$.

Séries de Laurent et développement en séries de Laurent