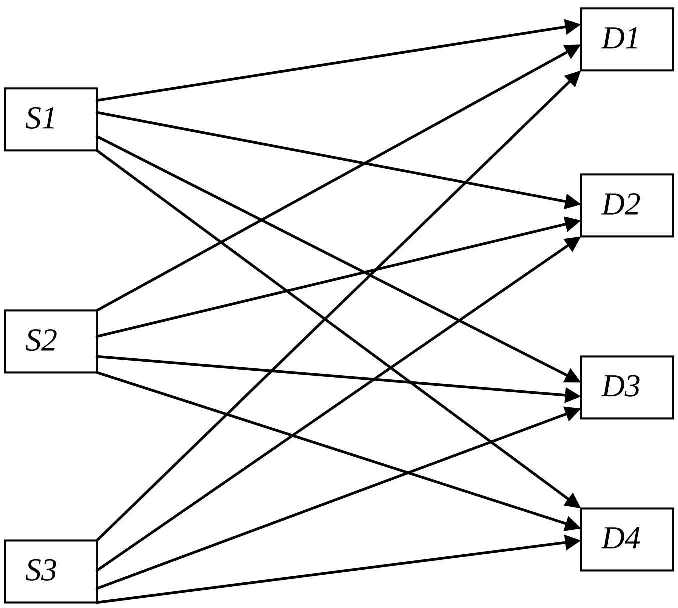
CH III Problème de transport

Il s'agit de déterminer la façon optimale d'acheminer des biens à partir de *m* entrepôts et de les transporter vers n destinations et cela à moindre coût. Nous allons faire l'hypothèse que toute la marchandise de tous les entrepôts doit être acheminée vers les différentes destinations.
Nous allons illustrer ce problème à partir de l'exemple suivant.

Entrepôt	D1	D2	D3	D4	***Offre***
S1	1470	1210	3440	5520	450 T
S2	2410	1530	1020	3120	450 T
S3	4510	3640	5570	2850	750 T
Demande	400 T	450 T	550 T	250 T	1650 T

S : Indique la source (l'entrepôt).
D : indique la destination.

On notera que l'offre totale est bien égale à la demande ce qui est conforme à l'hypothèse ci-dessus.



2- Mise en équation

Le problème général de transport sous l'hypothèse que l'offre totale égale la demande, s'énonce comme suit. Notons les sources par *S1, S2, ………..Sm* et *D1, D2, ……………,Dn* les destinations. On introduit les notations suivantes :

x_{ij} = quantité transportée de *Si* à *Dj* ,
c_{ij} = coût unitaire du transport de *Si* à *Dj* ,
a_i = offre de la source *Si*,
b_j = demande de la destination *Dj* .

On suppose que les *ai* sont positifs $ai \geq 0$ et de même pour les $bj \geq 0$.
Il s'agit de minimiser le coût de transport. La fonction objective s'écrit :

$$z = \sum_{i,j} c_{ij}\ x_{ij}$$

Sous les contraintes :
Offre :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, 2, 3, \ldots \ldots . m$$

Demande :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \geq 0 \qquad 1 \;\; \forall j = 1, 2, 3, \ldots \ldots . n$$

Positivité :

$$x_{ij} \geq 0$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de transport admet une solution optimale est que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Le problème de transport s'écrit de manière matricielle

$$Min\ z = c^t x$$
$$Ax = d$$
$$x \geq 0$$

où $x = (x_{11}, x_{12}, \ldots , x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots\ldots, x_{mn})$. C'est-à-dire que l'on déroule la matrice x_{ij} suivant les lignes. On fait de même pour $c = (c_{11}, \ldots\ c1n, c21, \ldots\ldots, cmn)$. Il y a $n \times m$ variables et $n + m$ contraintes. Le vecteur d correspond à $d = (a1, a2, \ldots , am, b1, b2, \ldots , bn)$.
Illustrons la matrice A pour $m = 3$ et $n = 4$.

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1
\end{bmatrix}$$

Or

$$\begin{array}{l|llllcr}
\text{(Entrepôt 1)} & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & & & & = & 450 \\
\text{(Entrepôt 2)} & & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & & & = & 450 \\
\text{(Entrepôt 3)} & & & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & & = & 750 \\
\text{(Destination 1)} & x_{11} & +x_{21} & +x_{31} & & = & 400 \\
\text{(Destination 2)} & \quad x_{12} & \quad +x_{22} & \quad +x_{32} & & = & 450 \\
\text{(Destination 3)} & \qquad x_{13} & \qquad +x_{23} & \qquad +x_{33} & & = & 550 \\
\text{(Destination 4)} & \qquad\quad x_{14} & \qquad\quad +x_{24} & \qquad\quad +x_{34} & & = & 250
\end{array}$$

Dans cet exemple, il ya $m+n=7$ contraintes propres avec 12 inconnus
Le tableau pourrait donc devenir un tableau du simplexe :

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	d_i
1	**1**	**1**	**1**									**450**
				1	**1**	**1**	**1**					**450**
								1	**1**	**1**	**1**	**750**
1				**1**				**1**				**400**
	1				**1**				**1**			**450**
		1				**1**				**1**		**550**
			1				**1**				**1**	**250**
1740	**1210**	**3440**	**5520**	**2410**	**1530**	**1020**	**3120**	**4510**	**3640**	**5570**	**2850**	

3- Méthode du simplexe appliquée au problème de transport:

Les démarches à suivre sont :

- Trouver une solution réalisable de base
- Passer à une autre solution de base adjacente
- Déterminer si la solution est optimale.

<u>3.1. Détermination d'une solution réalisable de base</u>

<u>3.1.1. Méthode du coin Nord-Ouest</u>

Démarche :

a) On débute par la case (1, 1) (coin nord-ouest). Allouer à cette case la quantité la plus grande possible afin de satisfaire la demande *j* ou bien d'épuiser la source *i*.

b) Si la source *i* est épuisée, rayer la ligne *i*. Si la demande *j* est satisfaite, rayer la colonne *j*.

c) On recommence l'étape (a) à partir de la sous-matrice.

Par exemple :

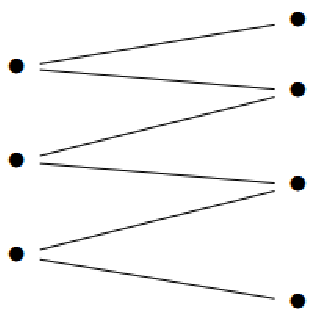
Entrepôt	D1	D2	D3	D4	***Offre***
S1	1470	1210	3440	5520	450 T
S2	2410	1530	1020	3120	450 T
S3	4510	3640	5570	2850	750 T
Demande	400 T	450 T	550 T	250 T	1650 T

	D1	D2	D3	D4	***Offre***
S1	400	50			450
S2		400	50		450
S3			500	250	750
Demande	400	450	550	250	1650

Les variables de base sont : x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33} *et* x_{34}

pour un total de $6 = m + n - 1$ variables car $m = 3$ et $n = 4$. Le coût associé à cette solution est :

z = 1740x400+1210x50+1530x400+1020x50+5570x500+2850x250=4809000. En terme de graphe, on obtient la représentation



qui est un arbre partiel générateur du graphe biparti associé au problème de transport. Ce qui montre bien que *x* est une solution de base.

Remarque

— méthode facile,

— ne tient pas compte des coûts de transport,

— loin de la solution optimale,

— la moins efficace.

3 .1 .2. Méthode de l'entrée minimale (coût réduit)

Démarche :

a) Choisir la case *(i, j)* de coût minimal. Allouer à cette case la quantité la plus grande possible afin de satisfaire la demande *j* ou bien d'épuiser la source *i*.

b) Si la source *i* est épuisée, rayer la ligne *i*. Si la demande *j* est satisfaite, rayer la colonne *j*.

c) On recommence l'étape (a) à partir de la sous-matrice.

Par exemple :

Entrepôt	D1	D2	D3	D4	***Offre***
S1					450 T
S2					450 T
S3					750 T
Demande	400 T	450 T	550 T	250 T	1650 T

Entrepôt	D1	D2	D3	D4	***Offre***
S1		450			450 T
S2			450		450 T
S3	400		100	250	750 T
Demande	400 T	450 T	550 T	250 T	1650 T

Les variables de base sont : x_{12}, x_{23}, x_{31} , x_{33} *et* x_{34}
avec un total de 5 < 6 = m + n-1 variables de base. Donc la solution de base est dégénérée. Le coût associé à cette solution est z = 4077000. Ceci est mieux que la solution du coin nord-ouest. En terme de graphe, on obtient la représentation :